

آزمون آزمایشی خیلی سبز



پایه دوازدهم

آزمون جامع (مرحله بیست و یکم)

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

۲۳/ مرداد/ ۱۴۰۵

دفترچه شماره یک

پایه

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	دوازدهم	یازدهم	دهم
حسابان و ریاضیات پایه	۱۸	۱	۱۸	۷۰ دقیقه	کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۴۴	کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۵۱	فصل ۱ تا ۵ صفحه ۱ تا ۱۱۷
هندسه	۱۲	۱۹	۳۰		کل کتاب صفحه ۹ تا ۸۶	کل کتاب صفحه ۹ تا ۷۵	کل کتاب صفحه ۹ تا ۹۶
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰		کل کتاب صفحه ۱ تا ۸۴	کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۳۱	فصل ۶ و ۷ صفحه ۱۱۸ تا ۱۷۰
مجموع	۴۰ سؤال			۷۰ دقیقه	—		

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
حسابان و ریاضیات پایه	طراحان: کاظم اجلائی - کورش اسلامی - فرشاد حسن زاده - عادل حسینی بابک سادات - علی شهرابی - مصطفی کرمی - محمد گودرزی - میلاد منصوری سروش موئینی - حسین نادری - محمدسجاد نقیه کارشناسان علمی: علی افضل زاده - احمد عابدزاده - سروش موئینی - مازیار احمدی ناو	محمدسجاد نقیه
هندسه	طراحان: امیرحسین ابومحبوب - سید محمدرضا حسینی فرد - کیوان صارمی محمد طاهر شعاعی - حمید گلزاری - حسین هاشمی طاهری کارشناس علمی: امیرحسین ابومحبوب - سید عباس حسینی	حمید گلزاری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	طراح: مصطفی دیداری کارشناسان علمی: سعید قندچی - سید عباس حسینی	مصطفی دیداری

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاچانپور

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفترچه سؤالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرای، فونت سؤالات، سائز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می شود.



Azmoon.kheilisabz.com



۱- تابع f با دامنه $\mathbb{R}$ دارای مشخصات زیر است:

(الف) $f(2) = 3$ و $f(-5) = -2$ است.

(ب) روی بازه $[0, 2]$ ثابت است.

(پ) برای هر عدد بزرگ‌تر از ۲، مربع آن را نسبت می‌دهد.

(ت) برای x های منفی خطی است که محور طول‌ها را در $x = -2$ قطع می‌کند.

تعداد جواب‌های معادله $f(x) + |x| = 3$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲- اگر $f(x) = 2x - 3$ و $(g \circ f)(x) = 8x^2 - 22x + 15$ باشد، برد تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $[-\frac{13}{4}, +\infty)$ (۲) $[-3, +\infty)$

- (۳) $[-\frac{7}{2}, +\infty)$ (۴) $[-4, +\infty)$

۳- تابع f با ضابطه $f(x) = 2x^3 - 24x^2 + 96x + a$ مفروض است. اگر $f^{-1}(3a) = 1$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۳۵ (۲) ۳۶ (۳) ۳۷ (۴) ۳۸

۴- حاصل عبارت $\cot 40^\circ + \cot 20^\circ + \tan 20^\circ + \tan 10^\circ$ کدام است؟

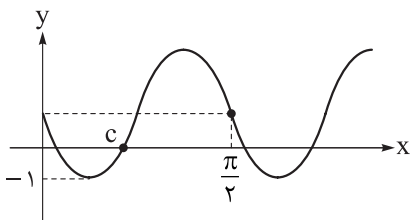
- (۱) $\cot 10^\circ - \cot 40^\circ$ (۲) $\cot 20^\circ - \cot 40^\circ$

- (۳) $\cot 80^\circ$ (۴) ۲

۵- تعداد جواب‌های معادله $\tan 5x - \tan 3x = \cot(\frac{17\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) + 2^{\log_2 \sqrt{3}}$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۶- قسمتی از نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = 1 + a \sin bx$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار c کدام است؟



- (۲) $\frac{\pi}{24}$

- (۱) $\frac{\pi}{12}$

- (۴) $\frac{5\pi}{24}$

- (۳) $\frac{5\pi}{12}$

۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow 16^+} \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x^2 - 256} - 2}{\sqrt[4]{x} - 16}$ کدام است؟

- (۴) $2\sqrt{2}$

- (۳) $2\sqrt[4]{2}$

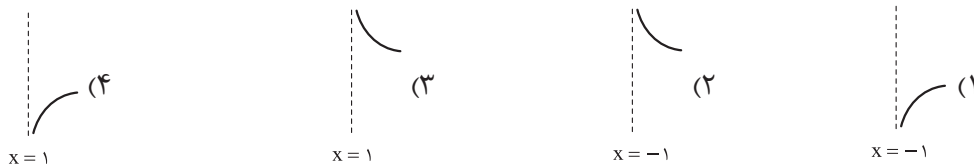
- (۲) $\sqrt{2}$

- (۱) $\sqrt[4]{2}$

محل انجام محاسبات



۸- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \log\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\right)$ در همسایگی مجانب قائم آن کدام است؟



۹- اگر $f(x) = \begin{cases} x^3 - x + 4 & ; x < 1 \\ x^3 + 3x & ; x \geq 1 \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-h^2)}{h^2}$ کدام است؟ آزمون وی ای پی

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۰- تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ مفروض است. اگر $f'(1) = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{3}{4\sqrt{2}}\right)$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ (۴) $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$

۱۱- تابع f با ضابطه $f(x) = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{4-x}$ مفروض است. عرض نقطه عطف نمودار تابع f^{-1} کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۲- تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{x} |x-1|$ مفروض است. اگر m, n و p به ترتیب تعداد نقاط ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی

و عطف نمودار تابع $|f|$ باشد، حاصل $\frac{p+n}{m}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۳- دنباله هندسی ...، $2 + \sqrt{3}$ ، 1 ، $2 - \sqrt{3}$ شامل ۲۰ جمله است. در این دنباله مجموع جملات ردیف زوج چند برابر مجموع جملات ردیف فرد است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $2 - \sqrt{3}$ (۳) $2 + \sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{3} - 2$

۱۴- اگر $\alpha + 1 = \frac{3}{\alpha}$ باشد، مقدار عبارت $\frac{(x-1)(x^6-64)(x+3)}{(x^2+2)^2+12}$ به ازای مقدار $x = \alpha$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

محل انجام محاسبات

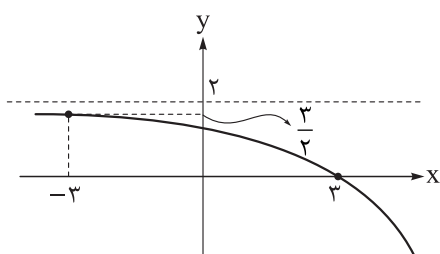
۱۵- نقطه A روی نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ و نقطه B روی نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = x^3 - x - 4$ قرار دارد. اگر پاره خط AB موازی محور عرض‌ها باشد، کم‌ترین مقدار طول آن کدام است؟

- (۱) $\frac{19}{8}$ (۲) $\frac{29}{4}$ (۳) $\frac{31}{4}$ (۴) $\frac{39}{8}$

۱۶- مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{ax^3 + bx^2 + cx - 4}{x - 2} < 0$ ، بازه $(-\infty, -1)$ است. حاصل $\left[\frac{b}{c}\right]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) صفر (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) ۱

۱۷- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = a + b \times c^x$ در شکل زیر رسم شده است. عرض از مبدأ نمودار تابع f کدام است؟



- (۱) $\sqrt{2} - 1$
(۲) $\sqrt{3} - 1$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) ۱

۱۸- تعداد جواب‌های معادله $\frac{1}{\log_2 x^3} + \frac{1}{\log_4 x^3} - \frac{1}{\log_8 x^3} = \log_{x^3} \left(\frac{x^3}{3} - x \right)$ کدام است؟

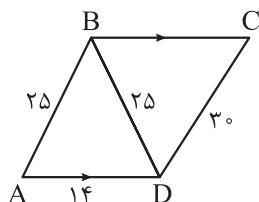
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳



۱۹- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. اگر I و J به ترتیب نقاط هم‌رسی نیم‌سازهای زوایای دو مثلث قائم‌الزاویه ABH و ACH باشند، آن‌گاه نقطه هم‌رسی نیم‌سازهای زوایای مثلث ABC برای مثلث AIJ چگونه نقطه‌ای است؟

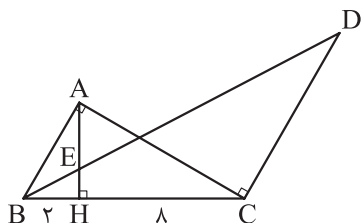
- (۱) نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها
(۲) نقطه هم‌رسی ارتفاع‌ها
(۳) نقطه هم‌رسی نیم‌سازها
(۴) نقطه هم‌رسی میانه‌ها

۲۰- در دوزنقه زیر، فاصله رأس A از خط شامل ساق CD کدام است؟



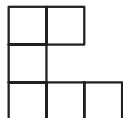
- (۱) $11/2$
(۲) 12
(۳) $10/8$
(۴) $14/4$

۲۱- در شکل زیر، مثلث ABC قائم‌الزاویه و $AC = CD$ است. اگر $BH = 2$ و $CH = 8$ باشد، طول پاره خط AE کدام است؟



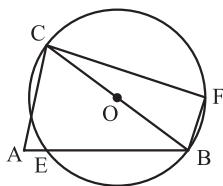
- (۱) $\frac{20}{7}$
(۲) 3
(۳) $\frac{25}{7}$
(۴) 4

۲۲- تفاضل حداقل و حداکثر تعداد مکعب‌های کوچکی که باید از یک مکعب به ابعاد $3 \times 3 \times 3$ حذف کنیم تا نمای بالای آن به صورت زیر باشد، چه قدر است؟



- (۱) 9
(۲) 18
(۳) 12
(۴) 15

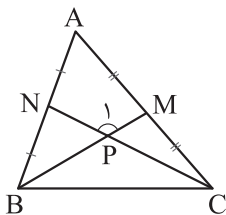
۲۳- در شکل زیر، نقطه O ، وسط قطر $BC = 8$ و فاصله F از وسط پاره خط AC برابر با 7 است. اگر $\widehat{EBF} = \widehat{CF}$ ، آن‌گاه طول پاره خط AB کدام است؟



- (۱) 7
(۲) 6
(۳) 5
(۴) 8

محل انجام محاسبات

۲۴- مطابق شکل، M و N وسط‌های AC و AB هستند و نقطه تقاطع BM و CN را P نامیده‌ایم. اگر زاویه‌های $\hat{A}$ و $\hat{P}$ مکمل باشند، آنگاه حاصل $\frac{BM}{CN}$ برابر با کدام است؟



$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \quad (۲)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{AB}{AC} \quad (۱)$$

$$\sqrt{\frac{AB}{AC}} \quad (۳)$$

۲۵- می‌خواهیم از نقطه $A(-1, 5)$ به نقطه B واقع بر محور y رفته و پس از طی مسیری به طول ۲ روی این محور به نقطه C رسیده و از C به نقطه $D(4, -2)$ برویم. عرض نقطه B کدام باشد تا طول مسیر شکسته ABCD کوتاه‌ترین مقدار ممکن شود؟

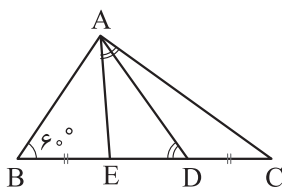
$$\frac{7}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{9}{2} \quad (۳)$$

$$3 \quad (۲)$$

$$4 \quad (۱)$$

۲۶- در شکل زیر، $\hat{ADB} = \hat{EAC}$ و $\hat{B} = 60^\circ$. اگر $AB = 5$ و $DE = 3$ ، آنگاه طول پاره خط BC کدام است؟



$$7 \quad (۲)$$

$$8 \quad (۱)$$

$$11 \quad (۴)$$

$$10 \quad (۳)$$

۲۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $(A+B) \times (A-B)$ یک ماتریس قطری باشد، آنگاه نسبت درایه‌های

غیرصفر در این ماتریس قطری کدام است؟

$$8 \quad (۴)$$

$$6 \quad (۳)$$

$$-4 \quad (۲)$$

$$-5 \quad (۱)$$

۲۸- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ و $|A^2 + 2A| = 27$ باشد، آنگاه اختلاف بین حداکثر و حداقل مقدار دترمینان $I_3(a+1)$

کدام است؟ آزمون وی ای پی

$$64 \quad (۴)$$

$$32 \quad (۳)$$

$$16 \quad (۲)$$

$$8 \quad (۱)$$

۲۹- طول مماس مشترک خارجی دو دایره با معادله‌های $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$ و $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ کدام است؟

$$1 \quad (۴)$$

$$\sqrt{3} \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$\sqrt{2} \quad (۱)$$

۳۰- توسط بردارهای $\vec{a} = (1, 1, 0)$ ، $\vec{b} = (0, m, 1)$ و $\vec{a} \times \vec{b}$ ، یک مکعب مستطیل تولید می‌شود. حجم این مکعب مستطیل،

کدام است؟

$$3\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$2\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$2 \quad (۱)$$

۳۱- اگر گزاره $r \Rightarrow (p \vee q)$ درست باشد، احتمال این که گزاره q نادرست باشد، چه قدر است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۳۲- دو مجموعه $A = \{y-1, xz, 4\}$ و $B = \{6, -3, x+1\}$ داده شده است. اگر $A \times B = B \times A$ باشد، بیشترین مقدار $x-y+z$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) -۵

۳۳- دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال حداقل یکی مضرب ۳ و حداکثر یکی عدد اول ظاهر شده است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{5}{12}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۳۴- یک تیم والیبال ۷ بازیکن دارد که قد هیچ دو نفری یکسان نیست. یک والیبالیست به تصادف انتخاب می کنیم، اگر دو نفر دیگر انتخاب کنیم و ببینیم هر دو از والیبالیست اولی کوتاه ترند، با کدام احتمال والیبالیست اول، سومین والیبالیست قد بلند است؟

- (۱) $\frac{1}{7}$ (۲) $\frac{2}{7}$ (۳) $\frac{6}{35}$ (۴) $\frac{4}{7}$

۳۵- داده های زیر را از کوچک به بزرگ با شماره های ۱ تا n شماره گذاری می کنیم. برای انتخاب نمونه ۵ عضوی به روش سیستماتیک شماره اولین داده نمونه برابر ۳ است. واریانس داده های انتخاب شده کدام است؟

داده	۳	۴	۵	۶	۸
فراوانی	۵	۴	۶	۳	۲

- (۱) $2/4$ (۲) $2/6$ (۳) $2/8$ (۴) ۳

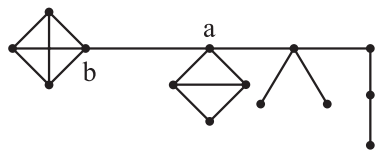
۳۶- اگر m بزرگ ترین عدد طبیعی باشد که $42 \equiv (m-13)^{21}$ ، بزرگ ترین عدد طبیعی دورقمی y که در معادله $11x + my = 29$ صدق می کند، کدام است؟

- (۱) ۹۴ (۲) ۹۳ (۳) ۹۲ (۴) ۹۱

۳۷- عدد $x^2 - 13^36$ بر ۱۹ بخش پذیر است. رقم یکان بزرگ ترین عدد دورقمی x کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۳۸- در گراف G با نمودار زیر، تعداد مجموعه های احاطه گر مینیمم برابر با کدام است؟



$$4\gamma(G) \quad (2)$$

$$|N_G(a) \cup N_G[b]| \quad (1)$$

$$\Delta(G) + \gamma(G) \quad (4)$$

$$\frac{q(\bar{G})-1}{3} \quad (3)$$



۳۹- معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 19$ چند جواب صحیح نامنفی با این شرط که حداقل سه تا از متغیرها زوج و حداقل یکی از آنها فرد باشد، دارد؟

۳۹۲۵ (۴)

۳۹۷۵ (۳)

۳۵۷۵ (۲)

۳۴۲۵ (۱)

۴۰- از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 24\}$ ، حداقل چند عدد انتخاب کنیم تا مطمئن شویم که دست کم دو عدد هست که ضربشان برابر ۲۴ است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخنامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام رسان ها با ما به اشتراک بگذارید.

محل انجام محاسبات

آزمون آزمایشی خیلی سبز



پایه دوازدهم

آزمون جامع (مرحله بیست و یکم)

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

۲۳/ مرداد/ ۱۴۰۵

دفترچه شماره دو

پایه		دوازدهم	یازدهم	دهم
مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه
مجموع	۶۵ سؤال	۷۵ دقیقه	—	

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
فیزیک	طراحان: علیرضا جباری - یاشار انگوتی - رضا سبزمیدانی - هادی حمزه پور - نوید شاهی کارشناسان علمی: علیرضا جباری - سعید محبی - هادی نجفی	رضا سبزمیدانی - نوید شاهی
شیمی	طراحان: فرشید ابراهیمی - عین الله ابوالفتحی - مهدی براتی - پیمان خواجوی مجد سروش عبادی - یاسر عبداللہی - محمد عظیمیان زواره - وحید فارسیان محمد قهرمانی نژاد - محسن مجنون - محمد مرادی - امیرحسین مسلمی - مرتضی نصیرزاده کارشناسان علمی: یاشار ذریه - محمد مهدی کریمیان - مرتضی نصیرزاده	یاسر عبداللہی

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

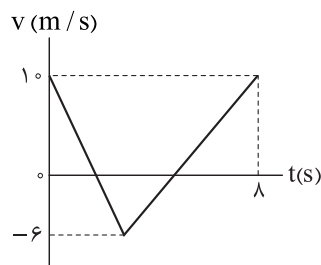
دفترچه سؤالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرای، فونت سؤالات، سائز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می شود.



Azmoon.kheilisabz.com

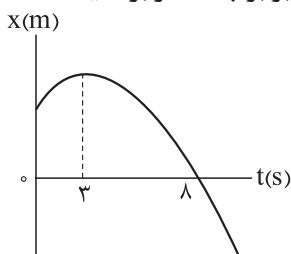


۴۱- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. در بازه ای که متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می کند، اندازه جابه جایی آن چند متر است؟



- (۱) ۶
(۲) ۹
(۳) ۱۲
(۴) ۱۸

۴۲- نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر تندی متوسط متحرک در ۸ ثانیه اول برابر با $8/5 \text{ m/s}$ باشد، اندازه سرعت متوسط متحرک در ۳ ثانیه اول، برابر چند متر بر ثانیه است؟



- (۱) ۳
(۲) ۶
(۳) ۹
(۴) ۱۸

۴۳- خودرویی پشت چراغ قرمز ایستاده است. با سبز شدن چراغ، خودرو با شتاب ثابت شروع به حرکت می کند. در همین لحظه، کامیونی با سرعت ثابت از آن سبقت می گیرد و در فاصله ۴۰۰ متری چراغ راهنمایی، خودرو به کامیون می رسد. در لحظه ای که تندی خودرو با تندی کامیون برابر می شود، فاصله آن ها از هم چند متر است؟ آزمون وی ای پی

- (۱) ۵۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۲۰۰ (۴) ۳۰۰

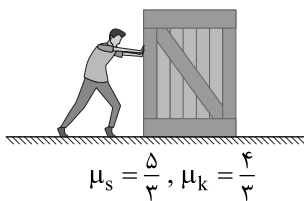
۴۴- گلوله ای در شرایط خلأ از ارتفاع ۸۰ متری سطح زمین رها می شود. این گلوله بعد از رسیدن به سطح زمین، 0.4 s طول می کشد تا سرعتش به صفر برسد. بزرگی شتاب متوسط گلوله در این 0.4 s چند متر بر مربع ثانیه است؟

$$(g = 10 \text{ m/s}^2)$$

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۵۰ (۴) ۱۰۰

۴۵- در شکل زیر، شخصی به یک جعبه ساکن به جرم 30 kg ، در حالت اول نیروی افقی 225 N و در حالت دوم نیروی افقی 525 N وارد می کند. نیرویی که سطح افقی به جعبه وارد می کند، در حالت دوم چند برابر حالت اول است؟

$$(g = 10 \text{ N/kg})$$



$$\frac{4}{3} \quad (2)$$

$$\frac{5}{\sqrt{34}} \quad (4)$$

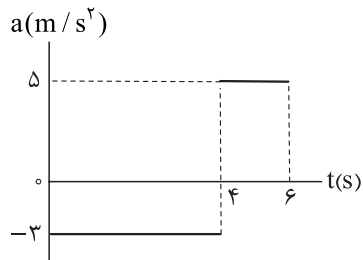
$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{34}}{5} \quad (3)$$

محل انجام محاسبات



۴۶- نمودار شتاب - زمان جسمی به جرم 3 kg که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در بازه زمانی $t_1 = 1 \text{ s}$ تا $t_2 = 6 \text{ s}$ بر حسب نیوتون کدام است؟



- (۱) $\vec{i}$
(۲) $-\vec{i}$
(۳) $6\vec{i}$
(۴) $-6\vec{i}$

۴۷- اندازه شتاب گرانش در فاصله 2600 کیلومتری سطح زمین، چند برابر اندازه شتاب گرانش در فاصله 5600 کیلومتری سطح زمین است؟ (شعاع کره زمین 6400 km است.)

- (۱) $\frac{3}{4}$
(۲) $\frac{4}{3}$
(۳) $\frac{9}{16}$
(۴) $\frac{16}{9}$

۴۸- یک پروتون و یک ذره α با تندی یکسان به ناحیه ای از یک میدان مغناطیسی به طور عمود بر میدان یکنواخت وارد می شوند و در مسیر دایره ای که بر میدان مغناطیسی عمود است، حرکت می کنند. کدام موارد درباره حرکت این دو ذره درست است؟

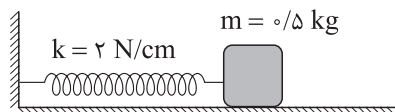
- (الف) شتاب مرکزگرای پروتون، بزرگ تر از شتاب مرکزگرای ذره α است.
(ب) شتاب مرکزگرای پروتون، کوچک تر از شتاب مرکزگرای ذره α است.
(پ) شعاع مسیر پروتون، بزرگ تر از شعاع مسیر ذره α است.
(ت) شعاع مسیر پروتون، کوچک تر از شعاع مسیر ذره α است.

- (۱) الف - پ (۲) الف - ت (۳) ب - پ (۴) ب - ت

۴۹- طول آونگ ساده ای 144 cm است. طول این آونگ چند سانتی متر و چگونه تغییر کند تا دوره تناوب آن 8 s باشد؟ (گشتاد و هشت پیدا کند؟) ($g = \pi^2 \text{ m/s}^2$)

- (۱) ۱۶، کاهش پیدا کند. (۲) ۱۶، افزایش پیدا کند.
(۳) ۸۰، کاهش پیدا کند. (۴) ۸۰، افزایش پیدا کند.

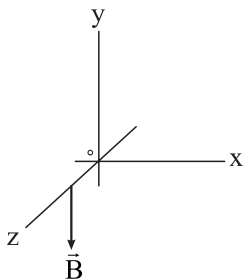
۵۰- در شکل زیر، جسم متصل به فنر روی سطح افقی بدون اصطکاک در حال نوسان است. اگر مسافت طی شده توسط جسم در هر نوسان برابر 30 cm باشد، بیشینه تندی جسم، چند متر بر ثانیه است؟



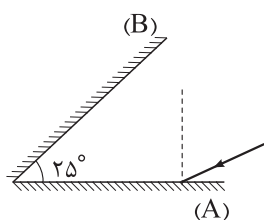
- (۱) $1/5$
(۲) ۳
(۳) ۱۵
(۴) ۳۰

محل انجام محاسبات

۵۱- شکل زیر، میدان مغناطیسی یک موج الکترومغناطیسی سینوسی را در نقطه‌ای معین و دور از چشمه، در یک لحظه نشان می‌دهد. اگر موج، انرژی را در خلاف جهت محور x انتقال دهد، جهت میدان الکتریکی موج در این لحظه و در این نقطه کدام است؟

(۱) $+x$ (۲) $-x$ (۳) $+z$ (۴) $-z$

۵۲- در شکل زیر، پرتوی نوری با زاویه تابش 5° به آینه A می‌تابد. در دومین برخورد این پرتو به آینه B ، زاویه بازتاب



چند درجه است؟

(۱) ۲۵

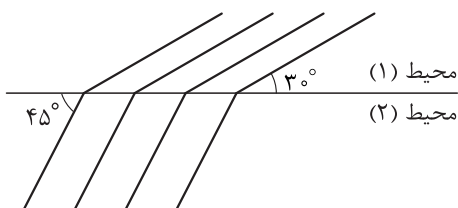
(۲) ۳۵

(۳) ۵۵

(۴) ۶۵

۵۳- جبهه‌های موج تختی در مرز دو محیط (۱) و (۲) به شکل زیر هستند. تندی انتشار موج در محیط (۲) چند برابر

تندی انتشار موج در محیط (۱) است؟

(۱) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

۵۴- طول موج پرتوی نوری در خلأ برابر 600 nm است. با ورود این پرتوی نور به یک محیط شفاف، طول موج آن

تغییر می‌کند. ضریب شکست این محیط شفاف برابر کدام است؟

(۲) ۳

(۴) $\frac{3}{2}$

(۱) ۴

(۳) $\frac{4}{3}$

محل انجام محاسبات



۵۵- شدت تابش متوسط خورشید در سطح زمین 300 W/m^2 است. اگر طول موج متوسط این تابش برابر با 550 nm باشد، در هر ساعت چند فوتون به هر متر مربع از سطح زمین می‌رسد؟ ($h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ و $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$)

$$5 \times 10^{24} \quad (2)$$

$$3 \times 10^{24} \quad (1)$$

$$5 \times 10^{23} \quad (4)$$

$$3 \times 10^{23} \quad (3)$$

۵۶- در طیف اتمی هیدروژن، اختلاف کوتاه‌ترین طول موج گسیلی کدام دو رشته برابر $\frac{1}{4} \mu\text{m}$ است؟ ($R = \frac{1}{100} (\text{nm})^{-1}$)

براکت	پاشن	بالمر	لیمان	نام رشته
۴	۳	۲	۱	n'

(۲) بالمر، لیمان

(۱) بالمر، پاشن

(۴) براکت، لیمان

(۳) براکت، پاشن

۵۷- اگر یک هسته پرتوزا ۳ ذره β^- و یک ذره α گسیل کند، به ترتیب از راست به چپ، عدد اتمی و عدد نوترونی آن چگونه تغییر می‌کند؟

(۱) ۱ واحد افزایش می‌یابد، ۳ واحد کاهش می‌یابد.

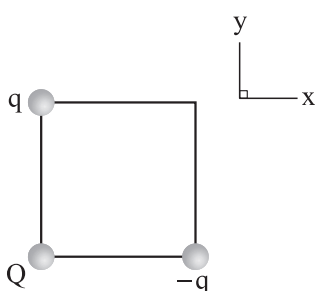
(۲) ۱ واحد کاهش می‌یابد، ۳ واحد کاهش می‌یابد.

(۳) ۱ واحد افزایش می‌یابد، ۵ واحد کاهش می‌یابد.

(۴) ۱ واحد کاهش می‌یابد، ۵ واحد کاهش می‌یابد.

۵۸- در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای روی سه رأس مربعی قرار دارند. اگر میدان الکتریکی خالص در رأس چهارم

مربع در جهت محور x باشد، $\frac{Q}{q}$ برابر کدام است؟



$$2\sqrt{2} \quad (1)$$

$$-2\sqrt{2} \quad (2)$$

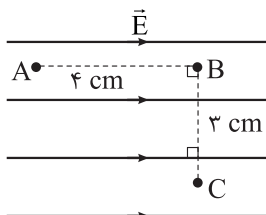
$$\sqrt{2} \quad (3)$$

$$-\sqrt{2} \quad (4)$$

محل انجام محاسبات



۵۹- در شکل زیر، اندازه میدان الکتریکی یکنواخت برابر $5 \times 10^3 \text{ N/C}$ است. اگر پتانسیل الکتریکی نقطه A برابر 300 V باشد، پتانسیل الکتریکی نقطه C برابر چند ولت است؟ آزمون وی ای پی



(۱) ۵۰

(۲) ۱۰۰

(۳) ۲۰۰

(۴) ۵۰۰

۶۰- ظرفیت خازنی که بین صفحه‌های آن هواست، برابر 20 nF و بار الکتریکی ذخیره شده در آن $1/8 \mu\text{C}$ است. خازن را از باتری جدا کرده و فاصله بین صفحه‌های آن را ۳ برابر می‌کنیم. انرژی ذخیره شده در خازن چند میکروژول و چگونه تغییر می‌کند؟

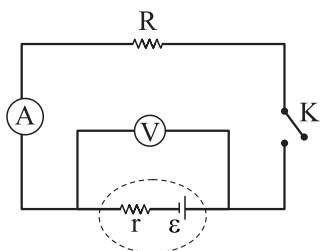
(۱) ۵۴، کاهش می‌یابد.

(۲) ۵۴، افزایش می‌یابد.

(۳) ۱۶۲، کاهش می‌یابد.

(۴) ۱۶۲، افزایش می‌یابد.

۶۱- در مدار شکل زیر، ابتدا کلید K باز است. اگر با بستن کلید، مقداری که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، 1 V و مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، 2 A تغییر کند، مقاومت درونی باتری برابر چند اهم است؟



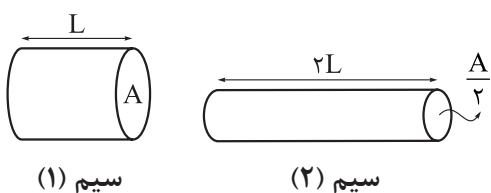
(۱) ۵ / ۰

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۴

۶۲- شکل زیر، دو سیم مسی استوانه‌ای را در یک دما نشان می‌دهد. سطح مقطع سیم (۲) نصف سطح مقطع سیم (۱) و طول آن دو برابر طول سیم (۱) است. نسبت مقاومت سیم (۲) به مقاومت سیم (۱) برابر کدام است؟



سیم (۱)

سیم (۲)

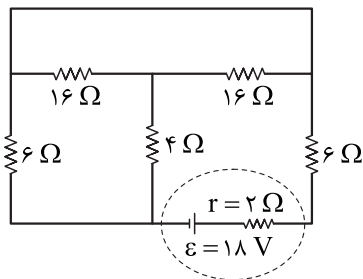
(۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{4}$

(۳) ۴

(۴) ۸



۶۳- در مدار شکل مقابل، توان خروجی باتری برابر چند وات است؟



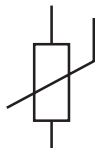
(۱) $22/5$

(۲) 24

(۳) 30

(۴) $31/5$

۶۴- شکل زیر، نماد کدام قطعه در مدارهای الکتریکی است؟



(۲) دیود

(۱) مقاومت نوری

(۴) ترمیستور

(۳) پتانسیومتر

۶۵- جریان عبوری از سیملوله‌ای که دارای ۵۰۰ حلقه نزدیک به هم است، برابر 400 mA و بزرگی میدان مغناطیسی در

نقطه‌ای درون سیملوله و دور از لبه‌های آن برابر $4/8 \text{ G}$ است. طول این سیملوله برابر چند سانتی‌متر است؟

$(\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}})$

(۴) 50

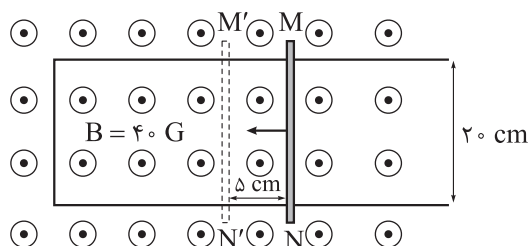
(۳) 25

(۲) 20

(۱) 200

۶۶- در شکل زیر، میله فلزی را روی رسانای U شکل در مدت 2 s از وضعیت MN به وضعیت M'N' درمی‌آوریم. در

این مدت، اندازه نیروی محرکه القاشده چند میلی‌ولت و جهت جریان القاشده در میله کدام است؟



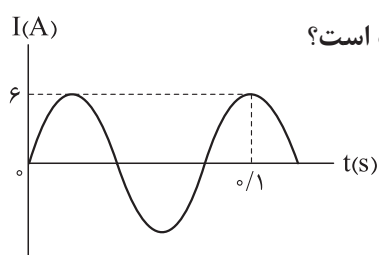
(۱) از N به طرف M

(۲) از M به طرف N

(۳) از N به طرف M

(۴) از M به طرف N

۶۷- از یک مقاومت الکتریکی ۵ اهمی، جریان متناوب سینوسی که نمودار تغییرات آن بر حسب زمان به صورت شکل



زیر است، عبور می‌کند. توان مصرفی این مقاومت در لحظه $t = \frac{1}{4} \text{ s}$ برابر چند وات است؟

(۱) 45

(۲) 90

(۳) 135

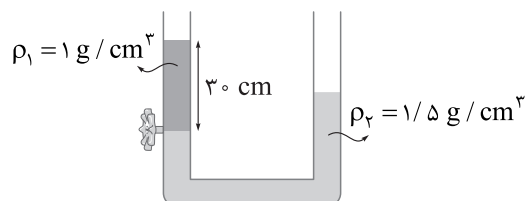
(۴) 180

محل انجام محاسبات

۶۸- درون یک ظرف استوانه‌ای به مساحت قاعده ۲۰ cm^2 ، ۸۰۰ g روغن ریخته شده است. فشار پیمانه‌ای در کف ظرف برابر چند کیلوپاسکال است؟ ($P_0 = ۱۰۰ \text{ kPa}$ و $g = ۱۰ \text{ N/kg}$)

- (۱) $۰/۴$ (۲) ۴ (۳) $۱۰۰/۴$ (۴) ۱۰۴

۶۹- در شکل زیر، دو مایع مخلوط‌نشده در لوله U شکل قرار دارند و شیر رابط، بسته است. با باز شدن شیر رابط، اختلاف ارتفاع سطح آزاد مایع‌ها در دو شاخه لوله به چند سانتی‌متر می‌رسد؟

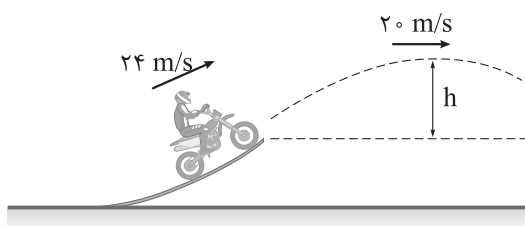


- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰

۷۰- تندی خودرویی به جرم ۱۲۰۰ kg از ۵۴ km/h به ۹۰ km/h می‌رسد. در این مدت، کار کل انجام‌شده روی خودرو برابر چند کیلوژول است؟

- (۱) $۲/۴ \times ۱۰^۲$ (۲) $۲/۴ \times ۱۰^۳$ (۳) $۲/۴ \times ۱۰^۴$ (۴) $۲/۴ \times ۱۰^۵$

۷۱- موتورسواری از انتهای سکویی مطابق شکل زیر، پرشی را با تندی ۲۴ m/s انجام می‌دهد. اگر تندی موتورسوار در بالاترین نقطه مسیرش به ۲۰ m/s برسد، ارتفاع h بر حسب متر کدام است؟ ($g = ۱۰ \text{ N/kg}$ و مقاومت هوا را در طول مسیر حرکت موتورسوار نادیده بگیرید.)



- (۱) $۷/۸$ (۲) $۸/۸$ (۳) $۱۷/۶$ (۴) $۱۸/۶$

۷۲- ضریب انبساط طولی مس $\frac{1}{K} \times ۱۰^{-۵}$ است. اگر دمای یک میله مسی ۵۰°F افزایش یابد، طول آن چند درصد تغییر می‌کند؟

- (۱) $۰/۰۵$ (۲) $۰/۵$ (۳) $۰/۰۹$ (۴) $۰/۹$

۷۳- درون ظرفی ۲۰۰ g یخ با دمای -۱۰°C قرار دارد. حداقل چند گرم آب با دمای ۴۰°C به آن اضافه کنیم تا تمام یخ ذوب شود؟ (تبادل گرما فقط بین آب و یخ انجام می‌شود، $\frac{J}{g.K} = ۴/۲ = c_{\text{یخ}} = c_{\text{آب}}$ و $L_F = ۳۳۶ \text{ J/g}$ است.)

- (۱) ۳۷۵ (۲) ۴۰۰ (۳) ۴۲۵ (۴) ۴۵۰

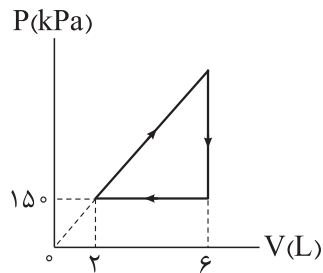
محل انجام محاسبات



۷۴- اگر فشار مقدار معینی گاز کامل، ۲۵ درصد افزایش و حجم آن، ۳۶ درصد کاهش یابد، انرژی درونی آن چند درصد و چگونه تغییر می کند؟

- (۱) ۲۰، کاهش می یابد. (۲) ۲۵، کاهش می یابد.
(۳) ۲۰، افزایش می یابد. (۴) ۲۵، افزایش می یابد.

۷۵- نمودار فشار مقدار معینی گاز کامل بر حسب حجم آن در طی چرخه ای به شکل زیر است. در این چرخه بین گاز و محیط چند کیلوژول گرما و چگونه مبادله شده است؟



- (۱) ۶/۰، از گاز به محیط منتقل شده است.
(۲) ۹/۰، از گاز به محیط منتقل شده است.
(۳) ۶/۰، از محیط به گاز منتقل شده است.
(۴) ۹/۰، از محیط به گاز منتقل شده است.

۷۶- در فرمول مولکولی کدام ترکیب، شمار اتم‌های کربن با شمار اتم‌های هیدروژن برابر نیست؟

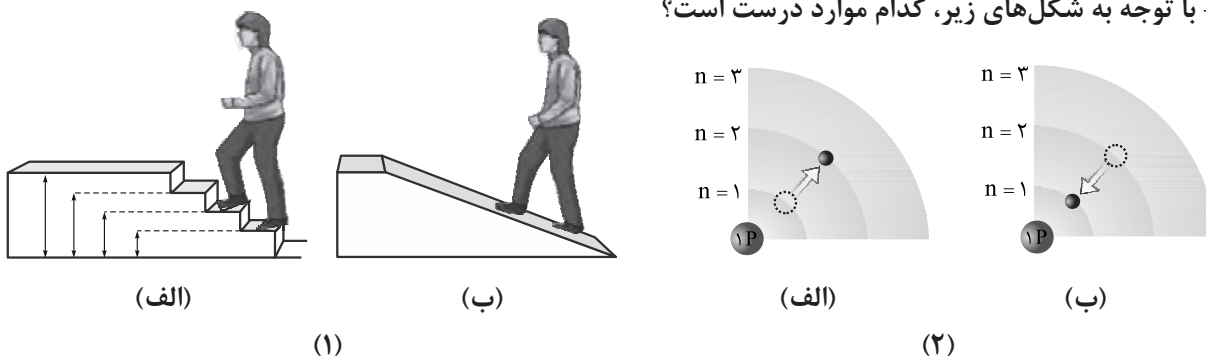
- (۱) استیلن (۲) استیرن (۳) سیانو اتن (۴) استون

۷۷- یک نمونه آب به روش‌های تقطیر، صافی کربنی و اسمز معکوس تصفیه می‌شود. کدام مورد در آب تصفیه‌شده به

هر سه روش، همچنان وجود دارد؟ آزمون وی ای پی

- (۱) ترکیب‌های آلی فرار (۲) نافلزها
(۳) میکروب‌ها (۴) حشره‌کش‌ها

۷۸- با توجه به شکل‌های زیر، کدام موارد درست است؟



(الف) مبادله انرژی در انتقال الکترون بین لایه‌ها در مدل کوانتومی اتم، مشابه شکل (۱ - الف) است.

(ب) مقدار انرژی مبادله‌شده در انتقال‌های انجام‌شده در شکل (۲) با هم برابر است.

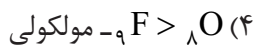
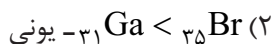
(پ) طبق مدل بور، مبادله انرژی الکترون بین لایه‌ها در اتم هیدروژن مشابه شکل (۱ - ب) است.

(ت) انرژی پرتو حاصل در شکل (۲ - ب) کم‌تر از انرژی پرتو بنفش‌رنگ است.

- (۱) الف و ب (۲) پ و ت (۳) الف و پ (۴) ب و ت

۷۹- در کدام گزینه، مقایسه شمار لایه‌های الکترونی پرشده در دو اتم به درستی انجام شده و ترکیب حاصل از دو

عنصر، از کدام نوع (مولکولی یا یونی) است؟



۸۰- با توجه به جدول دوره‌ای عناصرها، کدام موارد درست است؟

(الف) شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم عناصر در دوره سوم برخلاف اتم عناصر دوره چهارم، با افزایش عدد اتمی به طور منظم افزایش می‌یابد.

(ب) تفاوت عدد اتمی نخستین نافلز دوره دوم و قوی‌ترین نافلز جامد دوره سوم، برابر عدد اتمی عنصر سازنده دومین گاز فراوان هواکره است.

(پ) مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های ظرفیت در اتم سبک‌ترین شبه‌فلز گروه ۱۴، با عدد اتمی آن برابر است.

(ت) نخستین عنصری که لایه سوم اتم آن کاملاً پر می‌شود، دارای ۸ الکترون با $I = 0$ است.

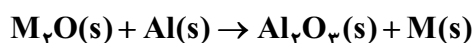
- (۱) الف و ت (۲) ب و ت (۳) ب و پ (۴) الف و پ



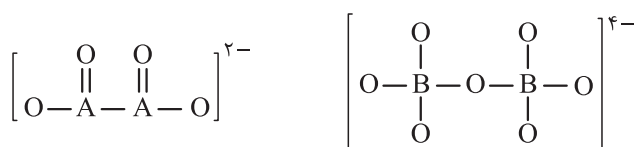
۸۱- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) گازی که در میان اجزای هوای پاک و خشک رتبه سوم را از لحاظ درصد حجمی دارد، دومین گازی است که در تقطیر جزء به جزء هوای مایع از ستون تقطیر خارج می‌شود.
- (۲) در فرایند جداسازی اجزای هوا، اولین گاز خارج شده بعد از رطوبت هوا، گاز کربن دی‌اکسید است که در دمای ۱۸۵ K به حالت جامد از هوا خارج می‌شود.
- (۳) آرایش الکترون - نقطه‌ای X ، منحصر به فرد و متعلق به عنصری است که در حدود ۷ درصد حجمی از مخلوط گاز طبیعی را تشکیل می‌دهد.
- (۴) در دما و فشار اتاق، مخلوطی از گازهای N_2 و H_2 برخلاف مخلوط گازهای O_2 و H_2 ، در حضور جرقه منفجر نمی‌شود.

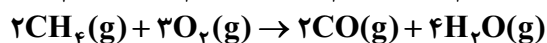
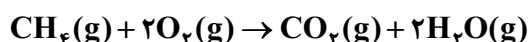
۸۲- با توجه به معادله داده شده، کدام مورد نادرست است؟



- (۱) پس از موازنه، تفاوت ضرایب استوکیومتری فراورده‌ها برابر ۵ است.
- (۲) ترکیب موجود در فراورده‌ها، یکی از واکنش‌دهنده‌های فرایند هال است.
- (۳) عنصر M می‌تواند فلز مس یا کروم باشد.
- (۴) یک واکنش اکسایش - کاهش است و در آن، آلومینیم نقش کاهنده را دارد.
- ۸۳- اگر در ساختارهای زیر، A عنصری از دوره دوم و B عنصری از دوره سوم جدول تناوبی باشد، کدام مطلب در مورد این دو عنصر درست است؟ (در ساختار یون‌های داده شده، همه اتم‌ها از قاعده هشت تایی پیروی می‌کنند.)



- (۱) B عنصری نیمه‌رسانا است که با هیچ عنصر گازی در جدول تناوبی هم‌گروه نیست.
- (۲) A نافلزی است که در آخرین زیرلایه الکترونی آن چهار الکترون وجود دارد و حداقل دو نوع اکسید تشکیل می‌دهد.
- (۳) یکی از رادیوایزوتوپ‌های عنصر B در ایران تولید می‌شود و اختلاف عدد اتمی A و B برابر عدد اتمی نخستین هالوژن جدول است.
- (۴) اتم A تمایل دارد با گرفتن یا اشتراک الکترون، خود را به آرایش هشت تایی برساند و ایزوتوبی از آن که شمار پروتون و نوترون برابری دارد، در طبیعت فراوان تر است.
- ۸۴- در دو فرایند جداگانه، $۱۲/۸$ گرم گاز متان مطابق معادله‌های زیر می‌سوزد. اختلاف حجم گاز اکسیژن مصرف شده در این دو فرایند در شرایط STP چند لیتر است و در این دو واکنش، در مجموع چند گرم بخار آب تولید می‌شود؟



$$۵۷/۶ - ۸/۹۶ \quad (۲)$$

$$۵۷/۶ - ۱۷/۹۲ \quad (۴)$$

$$۲۸/۸ - ۸/۹۶ \quad (۱)$$

$$۲۸/۸ - ۱۷/۹۲ \quad (۳)$$

محل انجام محاسبات

۸۵- جدول زیر، انحلال پذیری گاز نیتروژن مونوکسید را در دمای 20°C و در فشارهای مختلف نشان می دهد. کدام مورد درست است؟ ($N = 14, O = 16 : \text{g.mol}^{-1}$)

P(atm)	۲ / ۵	۶	۸
$S(\frac{\text{mg}}{100 \text{ g H}_2\text{O}})$	۱۶ / ۵	۳۹ / ۶	۵۲ / ۸

(۱) معادله انحلال پذیری نیتروژن مونوکسید (بر حسب گرم در 100 گرم آب) بر حسب فشار را می توان به صورت $S = 6/6 P$ نشان داد.

(۲) برای انحلال کامل $10^9 \times 22/66$ مولکول NO در 100 گرم آب با دمای 20°C ، فشار گاز حداقل باید ۵ اتمسفر باشد.

(۳) در دمای 10°C و فشار ۳ atm نیز انحلال پذیری گاز نیتروژن مونوکسید برابر ۳۹/۶ میلی گرم است.

(۴) در فشار ۹ atm و دمای 20°C ، انحلال پذیری گاز اکسیژن می تواند برابر ۶۲/۴ میلی گرم در 100 گرم آب باشد.

۸۶- کدام مورد درست است؟

(۱) نقطه جوش آب (بر حسب کلوین)، بیش از دو برابر نقطه جوش هیدروژن سولفید در فشار ۱ اتمسفر است.

(۲) هر چه جرم مولی یک ماده بیشتر باشد، جهت گیری مولکول های آن در میدان الکتریکی، محسوس تر است.

(۳) در انحلال یونی مانند حل شدن اتانول در آب، مولکول های حلال و حل شونده با یکدیگر جاذبه یون - دوقطبی برقرار می کنند.

(۴) ممکن است یک ماده ساختار مولکولی داشته باشد، اما با اضافه شدن به آب، به صورت یونی در آن حل شود.

۸۷- کدام مورد درباره جدول تناوبی عناصرها درست است؟

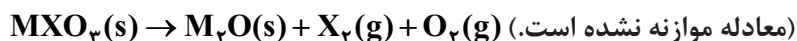
(۱) در هر گروه، شمار عنصرهای شبه فلزی کمتر از شمار عنصرهای نافلزی است.

(۲) اگر فعالیت شیمیایی فلز X بیشتر از فلز قلیایی M باشد، X و M در یک دوره قرار ندارند.

(۳) اگر A تنها نافلز مایع جدول باشد، نزدیک ترین فلز هم دوره به آن با تشکیل کاتیون به آرایش گاز نجیب می رسد.

(۴) اگر شعاع اتمی B از عنصر هم گروه آن (R) بیشتر باشد، واکنش پذیری B از R بیشتر است.

۸۸- $252/5$ گرم از نمک MXO_3 با خلوص ۸۰ درصد مطابق واکنش زیر تجزیه می شود:



اگر طی این فرایند، 94 گرم M_2O تولید شود و نیمی از گاز اکسیژن تولید شده بتواند 13 گرم بنزن را به طور کامل بسوزاند، تفاوت جرم مولی دو عنصر M و X چند گرم است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : \text{g.mol}^{-1}$)

(۱) ۹ (۲) ۲۵ (۳) ۳۵ (۴) ۴۱

۸۹- اگر شمار مولکول های موجود در 33 گرم C_nH_n با مجموع شمار اتم ها در یک گرم پروپان برابر باشد و این ترکیب فاقد پیوند سه گانه و دارای یک حلقه باشد، چند پیوند دو گانه در ساختار آن وجود دارد؟ ($H = 1, C = 12 : \text{g.mol}^{-1}$)

(۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۹۰- کدام مورد درست است؟

(۱) انجام واکنش تولید متان از عناصر سازنده اش، به دلیل گرماگیر بودن دشوار است.

(۲) با افزایش درصد جرمی هیدروژن در آلکان ها، گرمای سوختن مولی آن ها نیز افزایش می یابد.

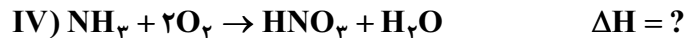
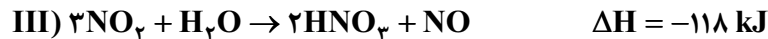
(۳) برای پیوندهای $\text{C} \equiv \text{O}$ و $\text{H}-\text{C}$ برخلاف پیوندهای $\text{N} \equiv \text{N}$ و $\text{H}-\text{Cl}$ ، از میانگین آنتالپی پیوند استفاده می شود.

(۴) اگر واکنش $\text{A}(l) \rightarrow \text{B}(g)$ گرماده باشد، واکنش $\text{A}(g) \rightarrow \text{B}(l)$ نیز به یقین گرماده است.

محل انجام محاسبات



۹۱- با توجه به ΔH واکنش‌های (I) تا (III)، اگر سرعت تولید انرژی در واکنش (IV)، $2/3$ کیلوژول بر ثانیه باشد، سرعت مصرف گاز اکسیژن در این واکنش چند گرم بر دقیقه است؟ ($O = 16 \text{ g.mol}^{-1}$)



۴۰ (۴)

۳۲ (۳)

۲۴ (۲)

۱۶ (۱)

۹۲- کدام مورد نادرست است؟

- (۱) لیکوپن و بنزوئیک اسید نمونه‌هایی از نگهدارنده‌ها هستند که فعالیت رادیکال‌های آزاد در بدن را کاهش می‌دهند.
- (۲) اگر هیدروژن متصل به کربن را در فورمیک اسید، با سرگروه خانواده آروماتیک‌ها جایگزین کنیم، ترکیب موجود در توت‌فرنگی با فرمول $\text{C}_7\text{H}_6\text{O}_2$ حاصل می‌شود.
- (۳) گروه عاملی که طعم و بوی گشنیز به طور عمده به آن وابسته است، در کلسترول نیز وجود دارد.
- (۴) در الگوی کاهش ردپای غذا، طراحی مواد و فراورده‌های شیمیایی سالم‌تر، موجب کاهش مصرف غذاهای فراوری‌شده می‌شود.

۹۳- کدام ویژگی زیر در مولکول استر حلال چسب با اسید آلی سازنده آن، یکسان است؟

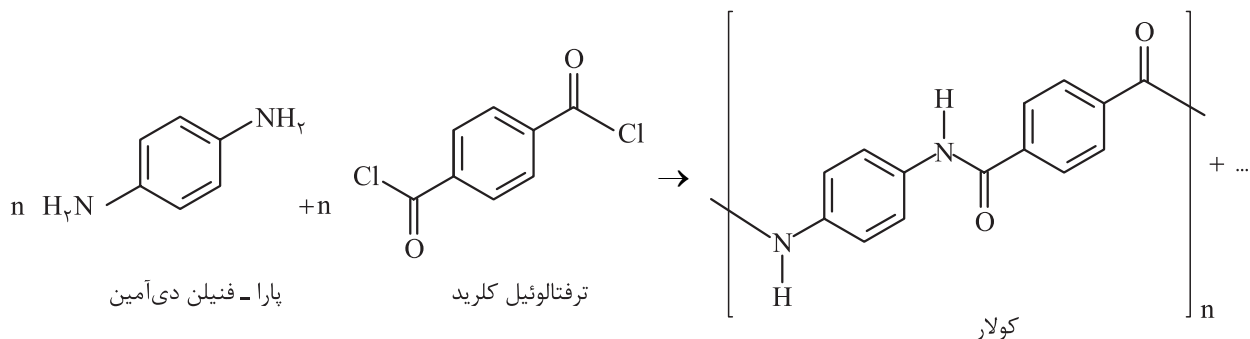
(۱) نسبت شمار پیوندهای $\text{C}-\text{H}$ به $\text{C}-\text{C}$

(۲) شمار اتم‌های کربن با عدد اکسایش مثبت

(۳) شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی

(۴) شمار مول گاز اکسیژن مورد نیاز برای سوختن کامل ۱ مول از آن

۹۴- کولار را در صنعت از واکنش پارا-فنیلن دی‌آمین و ترفتالوئیل کلرید، مطابق معادله زیر تهیه می‌کنند:



کدام مورد نادرست است؟

- (۱) کولار، یک پلی‌آمید آروماتیک است و توانایی برقراری پیوند هیدروژنی را دارد.
- (۲) فراورده جانبی این واکنش، در واکنش تهیه PET از اتیلن گلیکول و ترفتالیک اسید نیز تولید می‌شود.
- (۳) نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در ساختار ترفتالوئیل کلرید برابر ۲/۱ است.
- (۴) فرمول کولار را می‌توان به صورت $-(\text{C}_6\text{H}_4\text{N}_2\text{O}_2)_n-$ نشان داد.



۹۵- مواد زیست تخریب پذیر، موادی هستند که در طبیعت توسط جانداران ذره بینی به مولکول های ساده و کوچک مانند A, D, E و ... تبدیل می شوند. کدام مورد نادرست است؟

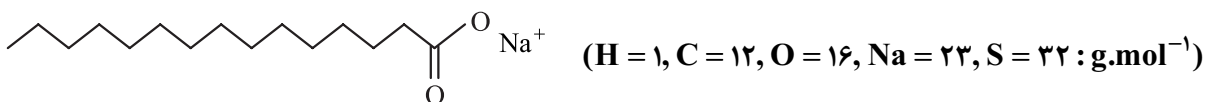
(۱) هیچ یک از ترکیب های A, D و E، گاز گلخانه ای محسوب نمی شوند.

(۲) یکی از این سه ترکیب، ساده ترین هیدروکربن بوده و به آن گاز مرداب نیز می گویند.

(۳) اگر E یک هیدروکربن باشد، A و D فراورده های سوختن کامل آن هستند.

(۴) شمار پیوندها در مولکول دو مورد از این ترکیب ها با هم یکسان است.

۹۶- درستی یا نادرستی مطالب زیر درباره ترکیب داده شده، به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟



(الف) تفاوت جرم مولی آن با پاک کننده غیرصابونی با زنجیر سیر شده و هم کربن با آن برابر ۴۲ گرم است.

(ب) این ماده با ذرات چربی، واکنش شیمیایی داده و مخلوطی ناهمگن تشکیل می دهد.

(پ) با تغییر یون فلزی به NH_4^+ ، نسبت مولی یون های سازنده ماده ثابت می ماند، ولی حالت فیزیکی آن تغییر می کند.

(ت) می توان آن را از واکنش استر سنگین با سود سوز آور به دست آورد.

(۱) درست - نادرست - درست - درست (۲) درست - نادرست - درست - نادرست

(۳) نادرست - نادرست - نادرست - درست (۴) نادرست - درست - درست - نادرست

۹۷- رسانایی الکتریکی محلول ۰/۴ مولار اسید HA با رسانایی الکتریکی محلول ۰/۰۰۵ مولار آهن (III) کلرید برابر است.

ثابت یونش این اسید به تقریب کدام است و اگر pH محلول این اسید با pH محلولی از نیتریک اسید با چگالی ۱/۲۶ g.mL⁻¹

برابر باشد، غلظت محلول نیتریک اسید چند ppm است؟ ($\text{H} = 1, \text{N} = 14, \text{O} = 16 : \text{g.mol}^{-1}$)

$$(1) 500 - 2/5 \times 10^{-3} \quad (2) 500 - 2/5 \times 10^{-3} \quad (3) 1000 - 2/5 \times 10^{-4} \quad (4) 1000 - 2/5 \times 10^{-3}$$

۹۸- ید ماده ای سمی و واکنش پذیر است. در آزمایشگاه شیمی بعد از استفاده از ید جامد، بلافاصله باید باقی مانده آن

را از محیط پاک کنند. بهترین روش برای این کار، تبدیل کردن ید به آنیون یدید می باشد که بتوان آن را به راحتی با

آب شست و شو داد. با توجه به پتانسیل های کاهش یافته در جدول زیر، کدام ماده برای این منظور مناسب است؟

نیم واکنش	$E^\circ (\text{V})$
$\text{S}_4\text{O}_6^{2-}(\text{aq}) + 2\text{e}^- \rightarrow 2\text{S}_2\text{O}_3^{2-}(\text{aq})$	۰/۰۸
$\text{I}_2(\text{s}) + 2\text{e}^- \rightarrow 2\text{I}^-(\text{aq})$	۰/۵۴
$\text{O}_2(\text{g}) + 2\text{H}^+(\text{aq}) + 2\text{e}^- \rightarrow \text{H}_2\text{O}_2(\text{aq})$	۰/۶۸

H_2O_2 (۲)

O_2 (۱)

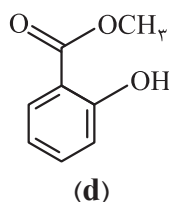
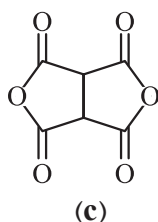
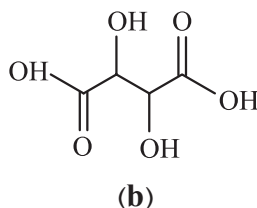
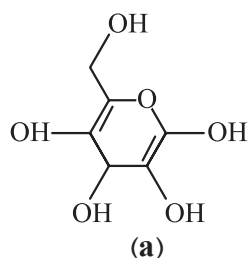
$\text{Na}_2\text{S}_4\text{O}_6$ (۴)

$\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$ (۳)

محل انجام محاسبات



۹۹- اختلاف مجموع اعداد اکسایش اتم‌های کربن در کدام دو ترکیب بیشتر است؟



(۱) a و b

(۲) a و d

(۳) b و c

(۴) c و d

۱۰۰- درستی یا نادرستی کدام گزینه با سایر گزینه‌ها متفاوت است؟

- (۱) برای تأمین انرژی یک سلول الکترولیتی با یک سلول گالوانی، قطب منفی و مثبت سلول گالوانی را به ترتیب به کاتد و آنود سلول الکترولیتی وصل می‌کنند.
- (۲) الکتروود آند در سلول‌های گالوانی، به دلیل پتانسیل کاهش کم‌تر، با محلول ۱ مولار HCl واکنش می‌دهد.
- (۳) اگر جرم الکتروود آند یا کاتد در یک سلول گالوانی تغییری نکند، عملاً واکنشی رخ نداده است.
- (۴) یک جامد یونی را می‌توان به عنوان الکترولیت در یک سلول الکتروشیمیایی استفاده کرد.

۱۰۱- کدام گزینه مقایسه نقطه جوش مواد را درست نشان می‌دهد؟

Cu, NaCl, HF, HCl, CCl₄
(A) (B) (C) (D) (E)

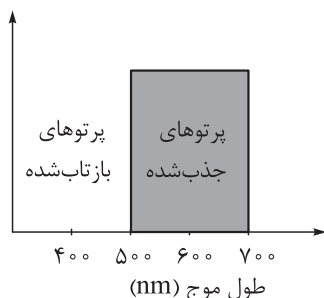
(۱) A > B > E > C > D

(۲) A > B > C > D > E

(۳) B > A > C > D > E

(۴) C > B > A > E > D

۱۰۲- با توجه به نمودار زیر که میزان جذب طول موج‌های نور مرئی توسط یک جسم را نشان می‌دهد، کدام گزینه در ارتباط با این جسم نادرست است؟

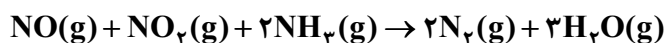


- (۱) همه پرتوهای مرئی که توسط این جسم بازتاب می‌شوند، توسط یک نمونه دوده جذب می‌شوند.
- (۲) به طور کلی میزان انرژی پرتوهای مرئی بازتاب‌شده توسط این جسم، بیشتر از میزان انرژی پرتوهای مرئی جذب‌شده توسط آن است.
- (۳) در صورت تاباندن نور سفید به آن، جسم مورد نظر به رنگ قرمز دیده می‌شود.
- (۴) جسم مورد نظر تنها یکی از پرتوهای موجود در طیف نشری خطی عنصر هیدروژن در محدوده مرئی را جذب می‌کند.

محل انجام محاسبات



۱۰۳- کدام موارد داده شده درباره واکنش زیر، درست است؟ ($H = 1, N = 14 : g.mol^{-1}$)



(الف) به ازای مصرف ۵/۱ گرم آمونیاک، $5/418 \times 10^{23}$ الکترون در واکنش مبادله می شود.

(ب) این واکنش در مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی برای کاهش مقدار اکسیدهای نیتروژن استفاده می شود.

(پ) مولکول های سازنده همه واکنش دهنده ها، در میدان الکتریکی جهت گیری می کنند.

(ت) یکی از اکسیدهای نیتروژن، نقش کاهنده و یکی از اکسیدهای نیتروژن، نقش اکسنده را ایفا می کند.

(۱) الف و ب (۲) ب و ت (۳) الف و پ (۴) ب و پ

۱۰۴- درستی یا نادرستی کدام گزینه درباره واکنش $A(g) + B(g) \rightleftharpoons 2X(g)$ ، با دیگر گزینه ها متفاوت است؟

(۱) با افزایش فشار، غلظت تعادلی مواد شرکت کننده در واکنش تغییری نمی کند.

(۲) با افزودن مقداری گاز A به سامانه، تعادل در جهت رفت جابه جا شده و مقدار ثابت تعادل واکنش افزایش می یابد.

(۳) با انتقال سامانه تعادلی به ظرف کوچک تر، سرعت واکنش های رفت و برگشت تغییر نمی کند.

(۴) اگر با کاهش دما، مقدار ثابت تعادل واکنش کاهش یابد، علامت ΔH واکنش، مانند علامت ΔH

واکنش $N_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2NO(g)$ است.

۱۰۵- در دما و فشار معین، ۵۰۰ لیتر گاز متان با چگالی $1/6 g.L^{-1}$ با مقدار کافی بخار آب واکنش می دهد. اگر فراورده های

این واکنش برای تولید متانول استفاده شوند، چند گرم متانول به دست می آید و چند مول از گاز هیدروژن تولید شده در

واکنش اول، به صورت اضافی باقی می ماند؟ (بازده واکنش اول را ۵۰ درصد و بازده واکنش دوم را ۱۰۰ درصد فرض کنید؛

($H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1}$)

(۴) ۲۵ - ۸۰۰

(۳) ۵۰ - ۲۴۰۰

(۲) ۲۵ - ۲۴۰۰

(۱) ۵۰ - ۸۰۰

پاسخنامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه
شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می توانید

از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام رسان ها با ما به اشتراک بگذارید.

محل انجام محاسبات

پاسخ نامه آزمون آزمایشی خلی سبز



پایه دوازدهم

آزمون جامع (مرحله بیست و یکم)

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

۲۳/مرداد/۱۴۰۵

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	کاظم اجلالی - کوروش اسلامی - فرشاد حسن زاده - عادل حسینی - بابک سادات - علی شهبازی مصطفی کرمی - محمد گودرزی - میلاد منصوری - سروش موئینی - حسین نادری - محمدسجاد نقیه
هندسه	امیرحسین ابومحبوب - سید محمدرضا حسینی فرد - کیوان صارمی - محمدطاهر شعاعی - حمید گلزاری حسین هاشمی طاهری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری
فیزیک	علیرضا جباری - یاشار انگوتی - رضا سبزمیدانی - هادی حمزه پور - نوید شاهی
شیمی	فرشید ابراهیمی - عین الله ابوالفتحی - مهدی براتی - پیمان خواجهی مجد - سروش عبادی - یاسر عبداللہی محمد عظیمیان زواره - وحید فارسیان - محمد قهرمانی نژاد - محسن مجنونی - محمد مرادی امیرحسین مسلمی - مرتضی نصیرزاده

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	علی افضل زاده احمد عابدزاده سروش موئینی مازیار احمدی ناو	محبوبه اصفهانی سید محمد مهدی حسینی سهند محمد کریم نژاد
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	حمید گلزاری	امیرحسین ابومحبوب سید عباس حسینی	ابوالفضل ناصری مریم نظری ماهان فنی فر
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	سعید قندچی عباس حسینی	مریم نظری محمد خندان ماهان فنی فر
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جباری علیرضا جعفری آثار مریم گلی حسنلو	علیرضا جباری سعید محبی هادی نجفی	آیدین طهماسقلی زاده امیر محمودی انزلی فاطمه نجفی محمدرضا یاری
شیمی	یاسر عبداللہی	یاسر عبداللہی	عین الله ابوالفتحی یاسر عبداللہی	یاشار ذریه محمد مهدی کریمیان مرتضی نصیرزاده	امیر بیات هادی عبادی مهدیس محبت پناه

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاچانپور

ویژه کنکوری های ۱۴۰۵



Azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمایشی خلی سبز

بیتا ابراهیمی - علیرضا جعفری - عادل حسینی - مینا کریمزاده

تیم اجرایی و تألیف آزمون

سرپرست تولید	الناز علی یاری زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان - زهرا صفری الهه صفری - فاطمه علی اکبری - محیا غنی فرد نادره نازآوری - ساعده نمازی
رسام	ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه آرایی	مریم حسین زاده - سپیده سخائی - الهام سهرابی طاہرہ صادق نژاد - مائده صبری - نیلوفر فرخجسته فاطمه قیاسوند - مهدیه گل پور - دریا لطفی



تابع f با دامنه $\mathbb{R}$ دارای مشخصات زیر است:الف) $f(2) = 3$ و $f(-5) = -2$ است.ب) روی بازه $[0, 2]$ ثابت است.

روی این بازه مقدار تابع ۳ است.

پ) برای هر عدد بزرگ‌تر از ۲، مربع آن را نسبت می‌دهد.

$$f(x) = x^2$$

ت) برای x های منفی خطی است که محور طول‌ها را در $x = -2$ قطع می‌کند.تعداد جواب‌های معادله $f(x) + |x| = 3$ کدام است؟

۳ (۴

۲ (۳

۱ (۲

صفر (۱

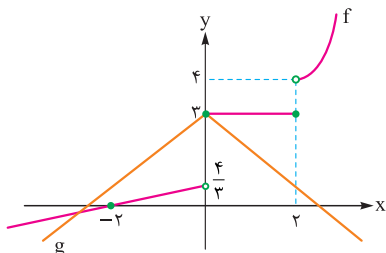
پاسخ: گزینه ۳

اول ضابطه تابع f رو بساز، بعد نمودارش رو رسم کن و معادله رو به روش هندسی حل کن.گام اول: از عبارت‌های «الف» و «ب» نتیجه می‌گیریم که تابع روی بازه $[0, 2]$ با تابع ثابت $y = 3$ برابر است.از عبارت «پ» نتیجه می‌گیریم که برای $x > 2$ ، $f(x) = x^2$ است.هم‌چنین از عبارت‌های «الف» و «ت» نتیجه می‌گیریم که نمودار تابع f برای $x < 0$ ، خطی است که از دو نقطه $(-5, -2)$ و $(-2, 0)$ می‌گذرد:

$$\begin{cases} m = \frac{-2 - 0}{-5 + 2} = \frac{2}{3} \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases} \Rightarrow y - 0 = \frac{2}{3}(x + 2)$$

در نهایت داریم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+2) & ; x < 0 \\ 3 & ; 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & ; x > 2 \end{cases}$$

گام دوم: اگر $g(x) = 3 - |x|$ باشد، جواب‌های معادله مورد نظر سؤال، تعداد نقاط برخورد نمودارهای توابع f و g هستند.حالا سعی می‌کنیم، با رسم نمودار تابع g در کنار نمودار تابع f ، معادله را به روش هندسی حل کنیم:

همان‌طور که مشخص است، معادله دو جواب دارد.

پس از پیدا کردن ضابطه تابع f ؛ می‌توانیم هر ضابطه آن را مساوی $3 - |x|$ قرار دهیم:

$$x < 0: \frac{2}{3}(x+2) = 3 - |x| \xrightarrow{|x|=-x} \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} = 3 - x \Rightarrow x = -5 \quad \checkmark$$

$$0 \leq x \leq 2: 3 = 3 - |x| \Rightarrow x = 0 \quad \checkmark$$

$$x > 2: x^2 = 3 - |x| \xrightarrow{|x|=x} x^2 = 3 - x \Rightarrow x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} < 2 \quad \times$$

ریاضیات

۲ اگر $f(x) = 2x - 3$ و $(g \circ f)(x) = 8x^2 - 22x + 15$ باشد، برد تابع fog کدام است؟

(۲) $[-3, +\infty)$

(۱) $[-\frac{13}{4}, +\infty)$

(۴) $[-4, +\infty)$

(۳) $[-\frac{7}{2}, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۱

۳-۲x رو t بگیر و ضابطه g(t) رو به دست بیار.

Hint

عرض رأس نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ برابر $y_s = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ است.

اگر $a < 0$ باشد، برد تابع بازه $(-\infty, y_s]$ و اگر $a > 0$ باشد، برد آن $[y_s, +\infty)$ است.

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: لازم است که در ابتدا ضابطه تابع g را به دست آوریم:

$$g(2x - 3) = 8x^2 - 22x + 15$$

اگر $t = 2x - 3$ باشد، آن گاه $x = \frac{3+t}{2}$ است:

$$\Rightarrow g(t) = 8\left(\frac{3+t}{2}\right)^2 - 22\left(\frac{3+t}{2}\right) + 15 = 2(t^2 + 6t + 9) - 11(3+t) + 15 = 2t^2 + t$$

$$\Rightarrow g(x) = 2x^2 + x$$

گام دوم: حالا باید ضابطه تابع fog را به دست آوریم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = 2g(x) - 3 = 4x^2 + 2x - 3$$

گام سوم: مطابق درس باکس، برد تابع fog را به دست می آوریم:

$$y_s = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4 + 48}{16} = -\frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow R_{fog} = \left[-\frac{13}{4}, +\infty\right)$$

ریاضیات

۳

تابع f با ضابطه $f(x) = 2x^3 - 24x^2 + 96x + a$ مفروض است. اگر $f^{-1}(3a) = 1$ باشد، مقدار a کدام است؟

۳۸ (۴)

۳۷ (۳)

۳۶ (۲)

۳۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

ضابطه تابع رو به فرم مکعب دوجمله‌ای بنویس.

Hint

اگر $f^{-1}(\alpha) = \beta$ باشد، آن‌گاه $f(\beta) = \alpha$ است.

نکته

طبق نکته، تساوی $f(1) = 3a$ را داریم، پس در ضابطه تابع $x = 1$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$f(1) = 74 + a = 3a \Rightarrow 2a = 74 \Rightarrow a = 37$$

ریاضیات

۴

حاصل عبارت $\cot 4^\circ + \cot 2^\circ + \tan 2^\circ + \tan 1^\circ$ کدام است؟

۲ (۴

 $\cot 8^\circ$ (۳ $\cot 2^\circ - \cot 4^\circ$ (۲ $\cot 1^\circ - \cot 4^\circ$ (۱

پاسخ: گزینه ۱

یه $\cot 4^\circ$ اضافه و کم کن.

Hint

$$\cot \theta - \tan \theta = 2 \cot 2\theta \Rightarrow \tan \theta + 2 \cot 2\theta = \cot \theta$$

نکته

به عبارت خواسته سؤال، $\cot 4^\circ$ را اضافه می‌کنیم و سپس از آن کم می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$A = \underbrace{2 \cot 4^\circ + \tan 2^\circ}_{\cot 2^\circ} + \cot 2^\circ + \tan 1^\circ - \cot 4^\circ$$

طبق نکته بالا داریم:

$$\xrightarrow{2 \cot 4^\circ + \tan 2^\circ = \cot 2^\circ} A = \underbrace{2 \cot 2^\circ + \tan 1^\circ}_{\cot 1^\circ} - \cot 4^\circ$$

مجدداً از نکته استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow A = \cot 1^\circ - \cot 4^\circ$$

تعداد جواب‌های معادله $\tan 5x - \tan 3x = \cot\left(\frac{17\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + 2^{\log_2 \sqrt{3}}$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

۵

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\tan \text{☁} = \tan \theta_0 \Rightarrow \text{☁} = k\pi + \theta_0 ; k \in \mathbb{Z}$$

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا $\cot\left(\frac{17\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$ و $2^{\log_2 \sqrt{3}}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\cot\left(\underbrace{\frac{17\pi}{3} + \frac{\pi}{3}}_{\text{ربع دوم}}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$2^{\log_2 \sqrt{3}} = \sqrt{3}^{\log_2 2} = \sqrt{3}$$

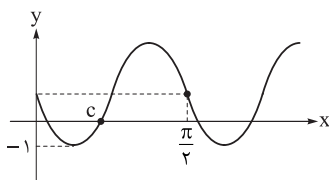
بنابراین معادله ساده $\tan 5x = \tan 3x$ را داریم.

گام دوم: این معادله را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$5x = k\pi + 3x \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}$$

باید حواسمان باشد که $3x$ و $5x$ مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ نشوند؛ بنابراین در بازه $(0, 2\pi)$ فقط $x = \pi$ جواب است.

قسمتی از نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = 1 + a \sin bx$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار c کدام است؟



$$\frac{\pi}{12} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{24} \quad (2)$$

$$\frac{5\pi}{12} \quad (3)$$

$$\frac{5\pi}{24} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

تابع f با ضابطه $f(x) = a \sin bx + c$ یا $f(x) = a \cos bx + c$ مفروض اند.

بیشترین مقدار تابع $y_{\max} = c + |a|$ و کمترین مقدار تابع $y_{\min} = c - |a|$ است.

فاصله هر دو نقطه هم‌فاز متوالی برابر دوره تناوب یعنی $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

تابع f با ضابطه $f(x) = a \sin(bx + c)$ مفروض است.

اگر $-\frac{\pi}{2} < c < \frac{\pi}{2}$ باشد، در صورتی که نمودار تابع در $x = 0$ صعودی باشد، $ab > 0$ و اگر نزولی باشد، $ab < 0$ است.

اگر $\frac{\pi}{2} < c < \frac{3\pi}{2}$ باشد، در صورتی که نمودار تابع در $x = 0$ صعودی باشد، $ab < 0$ و اگر نزولی باشد، $ab > 0$ است.

گام اول: کمترین مقدار تابع -1 است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\Rightarrow 1 - |a| = -1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

دوره تناوب هم برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |b| = 4 \Rightarrow b = \pm 4$$

گام دوم: اما طبق نکته بالا، چون تابع در $x = 0$ نزولی است، a و b باید غیرهم‌علامت باشند؛ بنابراین $f(x) = 1 - 2 \sin 4x$ است.

گام سوم: c طول دومین نقطه برخورد نمودار تابع f با محور x در x های مثبت است:

$$\xrightarrow{f(x)=0} 2 \sin 4x = 1 \Rightarrow \sin 4x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{(12k+1)\pi}{24} \\ 4x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{(12k+5)\pi}{24} \end{cases}$$

گام چهارم: جواب‌های مثبت را به ترتیب می‌نویسیم:

$$x: \frac{\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}, \frac{17\pi}{24}, \dots$$

در نتیجه $c = \frac{5\pi}{24}$ است.

✓ حاصل $\lim_{x \rightarrow 16^+} \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x^2 - 256} - 2}{\sqrt[4]{x} - 16}$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \sqrt[4]{2} \quad (1) & \sqrt{2} \quad (2) \\ 2\sqrt[4]{2} \quad (3) & 2\sqrt{2} \quad (4) \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۳

حد رو به مجموع دوتا حد بشکن.

Hint

در حد $\frac{0}{0}$ ، اگر مرتبه ریشه صورت (همان عامل صفرکننده) از مرتبه ریشه مخرج بیشتر باشد، حاصل حد قطعاً صفر است.

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: حد داده شده را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$L = \lim_{x \rightarrow 16^+} \frac{\sqrt[4]{x} - 2 + \sqrt[4]{x^2 - 256}}{\sqrt[4]{x} - 16} = \lim_{x \rightarrow 16^+} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt[4]{x} - 16} + \lim_{x \rightarrow 16^+} \frac{\sqrt[4]{x^2 - 256}}{\sqrt[4]{x} - 16}$$

حاصل $\lim_{x \rightarrow 16^+} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt[4]{x} - 16}$ برابر صفر است، زیرا $x_0 = 16$ ریشه ساده صورت، اما در مخرج از مرتبه $\frac{1}{4}$ است:

$$\lim_{x \rightarrow 16^+} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt[4]{x} - 16} = \lim_{x \rightarrow 16^+} \left(\frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt[4]{x} - 16} \times \frac{(\sqrt[4]{x} + 2)(\sqrt{x} + 4)}{(\sqrt[4]{x} + 2)(\sqrt{x} + 4)} \right)$$

$$= \frac{1}{32} \lim_{x \rightarrow 16^+} \frac{x - 16}{\sqrt[4]{x} - 16} = \frac{1}{32} \lim_{x \rightarrow 16^+} \sqrt[4]{(x - 16)^3} = 0$$

گام دوم: پس داریم:

$$L = \lim_{x \rightarrow 16^+} \frac{\sqrt[4]{x^2 - 256}}{\sqrt[4]{x} - 16} = \lim_{x \rightarrow 16^+} \frac{\sqrt[4]{x - 16} \sqrt[4]{x + 16}}{\sqrt[4]{x} - 16} = \sqrt[4]{32} = 2\sqrt[4]{2}$$

در محاسبه حاصل $\lim_{x \rightarrow 16^+} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt[4]{x} - 16}$ ، $x - 16$ را متغیر t می گیریم:

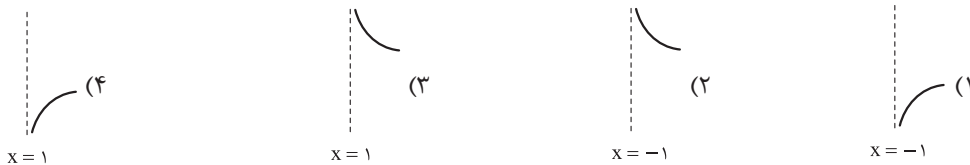
یه جور دیگه

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 16^+} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt[4]{x} - 16} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{16+t} - 2}{\sqrt[4]{t}} = 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{1+\frac{t}{16}} - 1}{\sqrt[4]{t}}$$

حالا از هم ارزی $\sqrt[n]{1+u} \sim 1 + \frac{1}{n}u$ وقتی $u \rightarrow 0$ ، استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 16^+} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt[4]{x} - 16} = 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 + \frac{t}{64} - 1}{\sqrt[4]{t}} = 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{t^3}}{64} = 0$$

نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \log\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\right)$ در همسایگی مجانب قائم آن کدام است؟

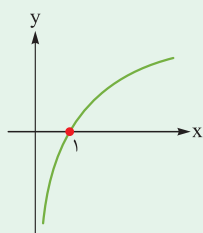


پاسخ: گزینه ۳

دامنه تابع رو به دست بیار.

Hint

نمودار تابع $y = \log x$ را ببینید:



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x) = +\infty$$

خط $x = 0$ مجانب قائم نمودار این تابع است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log x) = -\infty$$

گام اول: ابتدا دامنه تابع f را به دست می آوریم؛ باید $\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$ مثبت باشد، از آن جا که $\sqrt{x}$ به ازای $x > 0$ ، مثبت است، باید $x^2 - 1 > 0$ را مثبت کنیم:

$$x^2 - 1 > 0 \xrightarrow{x > 0} \text{خارج ریشه ها} \rightarrow x > 1$$

پس دامنه تابع f بازه $(1, +\infty)$ است و یکی از گزینه های (۳) و (۴) پاسخ صحیح سؤال است.

گام دوم: در یک همسایگی راست $x = 1$ ، حد عبارت $\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$ برابر $+\infty$ است، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \log t = +\infty$$

پس نمودار گزینه (۳) درست است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 4 & ; x < 1 \\ x^2 + 3x & ; x \geq 1 \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-h^2)}{h^2}$ کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$-h^2$ رو متغیر جدید H بگیر.

Hint

درس Box

تعریف مشتق‌های یک طرفه: فرض کنید تابع f در $x = a$ پیوسته باشد، آن‌گاه مشتق‌های چپ و راست آن در این نقطه به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{مشتق چپ}$$

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{مشتق راست}$$

گام اول: ابتدا حاصل حد خواسته شده را به دست می‌آوریم. در این محاسبه $-h^2$ را متغیر H می‌گیریم: در این صورت $H \rightarrow 0^-$.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-h^2)}{h^2} = \lim_{H \rightarrow 0^-} \frac{f(1) - f(1+H)}{-H} = \lim_{H \rightarrow 0^-} \frac{f(1+H) - f(1)}{H} = f'_-(1)$$

گام دوم: یعنی کافی است، مشتق چپ تابع f را در $x = 1$ حساب کنیم:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & ; x < 1 \\ 2x + 3 & ; x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'_-(1) = 2$$

دقت کنید که تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

از قضیه هوییتال استفاده می‌کنیم:

یه جور دیگه

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-h^2)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hf'(1-h^2)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} f'(1-h^2) = f'_-(1) = 2$$

۱۰ تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ مفروض است. اگر $f'(1) = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{3}{4\sqrt{2}}\right)$ باشد، مقدار a کدام است؟

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

باید طبق مشتق مرکب، مرحله به مرحله مشتق بگیریم.

Hint

مشتق تابع مرکب:

درس Box

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

گام اول: تابع g را با ضابطه $g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ مفروض می‌گیریم؛ بنابراین $f(x) = \sqrt{x + g(x)}$ است. مشتق تابع g را در $x = 1$ حساب می‌کنیم:

$$g'(x) = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2g(x)} \Rightarrow g'(1) = \frac{\frac{3}{2}}{2\sqrt{2}}$$

گام دوم: حالا $f'(1)$ را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{1 + g'(x)}{2f(x)} \Rightarrow f'(1) = \frac{1 + \frac{3}{4\sqrt{2}}}{2\sqrt{1 + \sqrt{2}}}$$

که این مقدار را باید مساوی عبارت $\frac{a}{2} \left(1 + \frac{3}{4\sqrt{2}}\right)$ قرار دهیم:

$$\frac{1 + \frac{3}{4\sqrt{2}}}{\frac{2}{a}} = \frac{1 + \frac{3}{4\sqrt{2}}}{2\sqrt{1 + \sqrt{2}}} \Rightarrow \frac{1}{a} = \sqrt{1 + \sqrt{2}} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

تابع f با ضابطه $f(x) = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{4-x}$ مفروض است. عرض نقطه عطف نمودار تابع f^{-1} کدام است؟

طول نقطه عطف نمودار تابع f

تابع f اکیداً صعودی است.

۲ (۴)

۱ (۳)

 $\frac{1}{2}$ (۲)

۱ (۰) صفر

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

نقطه $(c, f(c))$ برای نمودار تابع f عطف محسوب می‌شود، وقتی که دو شرط زیر برقرار باشد:

• تابع f در $x = c$ خط مماس داشته باشد.

• در $x = c$ جهت تقعر نمودار (همان $f''(x)$) تغییر کند.

نکته

اگر نقطه (α, β) عطف نمودار تابع وارون‌پذیر f باشد، نقطه (β, α) عطف نمودار تابع f^{-1} است.

گام اول: تابع f با دامنه $[0, 4]$ اکیداً صعودی و بنابراین وارون‌پذیر است. طبق نکته بالا، هدف سؤال محاسبه طول نقطه عطف نمودار آن است.

گام دوم: ضابطه‌های دو تابع f' و f'' را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{4-x}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}^3} + \frac{1}{2\sqrt{(4-x)^3}}$$

گام سوم: در نقطه عطف در توابع مشتق‌پذیر، مشتق دوم صفر است، پس باید $f''(x)$ را برابر صفر قرار دهیم:

$$\xrightarrow{f''(x_0)=0} x_0 = 4 - x_0 \Rightarrow x_0 = 2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{x} |x-1|$ مفروض است. اگر m ، n و p به ترتیب تعداد نقاط ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی

و عطف نمودار تابع $|f|$ باشد، حاصل $\frac{p+n}{m}$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: تابع g را با ضابطه $g(x) = |f(x)|$ مفروض می‌گیریم:

$$g(x) = |\sqrt[3]{x} |x-1|| = \sqrt[3]{x} |x-1| = \sqrt[3]{x} (x-1)$$

گام دوم: حالا ضابطه g' را به دست می‌آوریم:

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{4x-1}{3\sqrt[3]{x^2}} & ; 0 < x < 1 \\ \frac{4x-1}{3\sqrt[3]{x^2}} & ; x < 0 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$$

ریشه‌های ساده $g'(x)$ ، طول نقاط اکسترمم نسبی نمودار تابع g هستند:

$$\xrightarrow{g'(x)=0} 4x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

هم‌چنین تابع g در $x=0$ و $x=1$ مشتق‌ناپذیر است.

گام سوم: حالا به کمک جدول تغییرات رفتار، نوع اکسترمم‌های نمودار تابع g را مشخص می‌کنیم:

x		۰		$\frac{1}{4}$		۱	
$g'(x)$		-		+		-	
$g(x)$		↘		↗		↘	
		نسبی min		نسبی Max		نسبی min	

یعنی نمودار تابع $|f|$ ، دو نقطه مینیمم نسبی و یک نقطه ماکزیمم نسبی دارد، پس $m=1$ و $n=2$ است.

گام چهارم: ضابطه تابع g'' را به دست می‌آوریم:

$$g''(x) = \begin{cases} -\frac{4x+2}{9x\sqrt[3]{x^2}} & ; 0 < x < 1 \\ \frac{4x+2}{9x\sqrt[3]{x^2}} & ; x < 0 \text{ یا } x > 1 \end{cases} \quad \xrightarrow{g''(x)=0} x = -\frac{1}{2}$$

علامت $g''(x)$ مطابق جدول زیر است:

x		$-\frac{1}{2}$		۰		۱	
$g''(x)$		+		-		+	
		تَن		تَن		تَن	

اما چون نمودار تابع $|f|$ در $x=0$ و $x=1$ خط مماس ندارد، طول تنها نقطه عطف نمودار تابع $|f|$ برابر $-\frac{1}{2}$ است، این یعنی $p=1$.

در نهایت داریم:

$$\frac{p+n}{m} = \frac{1+2}{1} = 3$$

ریاضیات

۱۳

دنباله هندسی ... , $2 + \sqrt{3}$, 1 , $2 - \sqrt{3}$ شامل ۲۰ جمله است. در این دنباله مجموع جملات ردیف زوج چند برابر مجموع جملات ردیف فرد است؟

$$\sqrt{3} - 2 \quad (4)$$

$$2 + \sqrt{3} \quad (3)$$

$$2 - \sqrt{3} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

قدرنسبت رو حساب کن.

Hint

نکته

در یک دنباله هندسی با $2N$ جمله، نسبت مجموع جملات ردیف زوج به مجموع جملات ردیف فرد، برابر قدرنسبت دنباله است.

طبق نکته بالا کافی است، قدرنسبت دنباله را پیدا کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$r = \frac{2 + \sqrt{3}}{1} = 2 + \sqrt{3}$$



۱۴ اگر $\alpha + 1 = \frac{3}{\alpha}$ باشد، مقدار عبارت $\frac{(x-1)(x^2-64)(x+3)}{(x^2+2)^2+12}$ به ازای مقدار $x = \alpha$ کدام است؟

-۱ (۴)

-۲ (۳)

-۳ (۲)

-۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

اول عبارت برحسب x رو ساده کن، بعدش α رو جای گذاری کن.

Hint

اتحاد چاق و لاغر:

درس Box

$$(\square \pm \Delta)(\square \mp \square \Delta + \Delta^2) = \square^3 \pm \Delta^3$$

گام اول: ابتدا عبارت خواسته شده را ساده می کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$P(x) = \frac{(x-1)(x+3)(x^2-4)(x^2+4x+16)}{x^4+4x+16}$$

$$\Rightarrow P(x) = (x-1)(x+3)(x^2-4)$$

گام دوم: عبارت $P(x)$ را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$P(x) = (x-1)(x+3)(x+2)(x-2) = ((x-1)(x+2))((x+3)(x-2)) = ((x^2+x)-2)((x^2+x)-6)$$

گام سوم: چون طبق فرض $\alpha^2 + \alpha = 3$ است، داریم:

$$P(\alpha) = (3-2)(3-6) = -3$$



ریاضیات

۱۵

نقطه A روی نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ و نقطه B روی نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = x^3 - x - 4$

قرار دارد. اگر پاره خط AB موازی محور عرض‌ها باشد، کم‌ترین مقدار طول آن کدام است؟

طول نقاط A و B یکسان است.

$$\frac{39}{8} \quad (4)$$

$$\frac{31}{4} \quad (3)$$

$$\frac{29}{4} \quad (2)$$

$$\frac{19}{8} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: طبق فرض نقاط A و B هم‌طول هستند، پس اگر طول آن‌ها را α بگیریم، طول پاره خط AB برابر است با:

$$AB = f(\alpha) - g(\alpha) = 2\alpha^3 + \alpha + 5$$

گام دوم: حالا مطابق درس باکس سؤال ۲، کم‌ترین مقدار طول پاره خط AB برابر است با $-\frac{\Delta}{4a}$:

$$\Rightarrow AB_{\min} = -\frac{1-40}{8} = \frac{39}{8}$$

مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{ax^3 + bx^2 + cx - 4}{x - 2} < 0$ ، بازه $(-\infty, -1)$ است. حاصل $\left[\frac{b}{c}\right]$ کدام است؟ ([] نماد جزء

صحیح است.)

۱ (۴

-۱ (۳

-۲ (۲

۰ (۱

پاسخ: گزینه ۳

a باید صفر باشد.

Hint

درس Box

برای تعیین علامت عبارت $P(x)$ (یا چندجمله‌ای است یا عبارت گویا)، ابتدا همه ریشه‌ها (هم صورت و هم مخرج) را به دست می‌آوریم. اگر $(x - x_0)^n$ را در عبارت $P(x)$ دیدیم، می‌گوییم x_0 ریشه مرتبه n ام است: بدیهی است که اگر $n = 1$ باشد، ریشه ساده است. حال نکته مهم در تعیین علامت $P(x)$ این‌جاست که اگر n فرد باشد، علامت $P(x)$ در x_0 تغییر می‌کند و اگر n زوج باشد، علامت تغییر نمی‌کند.

مثال عبارت $P(x) = \frac{x^2(x-1)^3(x+2)}{x(x+1)^2}$ را تعیین علامت کنید.

پس از ساده‌سازی داریم:

$$P(x) = \frac{x(x-1)^3(x+2)}{(x+1)^2}$$

ریشه‌های صورت صفر، ۱ و -۲ و ریشه‌های مخرج صفر و -۱ هستند. عبارت $P(x)$ به ازای $x > 1$ مثبت است؛ بنابراین داریم:

x	-۲	-۱	۰	۱
P(x)	-	+	+	-
	تغییر می‌کند	تغییر نمی‌کند	تغییر می‌کند	تغییر می‌کند

گام اول: در تجزیه عبارت صورت، عامل $x+1$ را باید داشته باشیم و از آن‌جا که مجموعه جواب‌ها همسایگی $x_0 = 2$ نیست، یعنی صورت عامل $x-2$ را نیز داشته است که در نهایت $(x-2)$ ها ساده شده‌اند.

اما چون مجموعه جواب‌ها فقط یک بازه است (یعنی اجتماع دو بازه جدا از هم نیست)، صورت دیگر ریشه سوم یا حتی ریشه مضاعف ۲ یا -۱ را ندارد. این زمانی رخ می‌دهد که عبارت صورت چندجمله‌ای درجه دوم باشد، پس $a = 0$ است.

گام دوم: پس داریم:

$$\frac{ax^3 + bx^2 + cx - 4}{x - 2} = \frac{b(x+1)(x-2)}{x-2} = \frac{bx^2 - bx - 2b}{x-2}$$

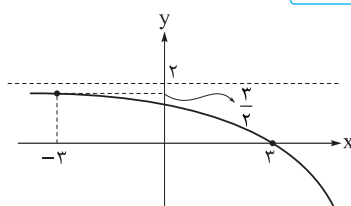
در نتیجه $c = -b$ و $\left[\frac{b}{c}\right] = -1$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

ریاضیات

۱۷

نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = a + b \times c^x$ در شکل زیر رسم شده است. عرض از مبدأ نمودار تابع f کدام است؟



$$f(0) = a + b$$

$$\sqrt{2} - 1 \quad (1)$$

$$\sqrt{3} - 1 \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$1 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۴

در نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = a + b \times c^x$ ، معادله خط چین افقی (مجاانب افقی) برابر $y = a$ است.

گام اول: طبق نکته ساده بالا، $a = 2$ است:

$$f(x) = 2 + b \times c^x$$

گام دوم: حالا تساوی‌های $f(3) = 0$ و $f(-3) = \frac{1}{4}$ را اعمال می‌کنیم:

$$f(3) = 2 + b \times c^3 = 0 \Rightarrow b \times c^3 = -2$$

$$f(-3) = 2 + b \times c^{-3} = \frac{1}{4} \Rightarrow b \times c^{-3} = -\frac{1}{4}$$

با تقسیم رابطه بالا بر رابطه پایین داریم:

$$c^6 = 4 \Rightarrow c = \sqrt[6]{4} = \sqrt[3]{2}$$

گام سوم: از یکی از معادلات استفاده می‌کنیم تا مقدار b به دست آید:

$$b \times (\sqrt[3]{2})^3 = -2 \Rightarrow b = -1$$

خواسته سؤال $1 = a + b = 2 - 1 = 1$ است.

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓

تعداد جواب‌های معادله $\frac{1}{\log_r x^3} + \frac{1}{\log_f x^3} - \frac{1}{\log_r x^3} = \log_{x^r} \left(\frac{x^r}{3} - x \right)$ کدام است؟ ۱۸

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

(۱) صفر

پاسخ: گزینه ۲

لگاریتم‌های سمت چپ تساوی رو معکوس کن.

Hint

درس‌Box

ویژگی‌های لگاریتم:

۱) $\log_c x + \log_c y = \log_c xy$

۲) $\log_c x - \log_c y = \log_c \frac{x}{y}$

۳) $\log_{c^n} x^m = \frac{m}{n} \log_c x$

۴) $\log_y x = \frac{\log_c x}{\log_c y}$

نتیجه $\log_y x = \frac{1}{\log_x y}$

۵) $x^{\log_c y} = y^{\log_c x}$

نتیجه $a^{\log_a x} = x$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

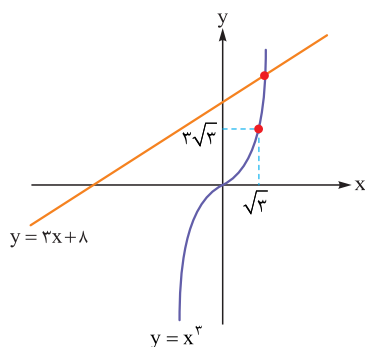
$$\frac{1}{\log_r x^3} = \log_{x^r} 2, \quad \frac{1}{\log_f x^3} = \log_{x^r} 4, \quad \frac{1}{\log_r x^3} = \log_{x^r} 3$$

$$\Rightarrow \log_{x^r} 2 + \log_{x^r} 4 - \log_{x^r} 3 = \log_{x^r} \left(\frac{x^r}{3} - x \right)$$

$$\Rightarrow \log_{x^r} \frac{8}{3} = \log_{x^r} \left(\frac{x^r}{3} - x \right) \Rightarrow \frac{8}{3} = \frac{x^r}{3} - x$$

گام دوم: بنابراین داریم:

$$8 = x^r - 3x \Rightarrow x^r = 3x + 8$$

با رسم نمودارهای $y = 3x + 8$ و $y = x^3$ ، تعداد جواب‌های معادله را پیدا می‌کنیم:

همان‌طور که واضح است، معادله بالا یک جواب دارد. چون محدوده قابل قبول برای x در معادله صورت سؤال $x > \sqrt{3}$ است، این جواب قابل قبول است.

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. اگر I و J به ترتیب نقاط هم‌رسی نیم‌سازهای ABH و ACH باشند، آن‌گاه نقطه هم‌رسی نیم‌سازهای زوایای مثلث ABC برای مثلث AIJ چگونه نقطه‌ای است؟

(۲) نقطه هم‌رسی ارتفاع‌ها

(۱) نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها

(۴) نقطه هم‌رسی میانه‌ها

(۳) نقطه هم‌رسی نیم‌سازها

پاسخ: گزینه ۲

کدس Box

(۱) مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث، 180° است.

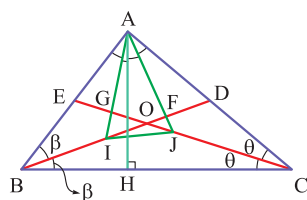
(۲) نیم‌سازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث هم‌رس‌اند.

(۳) ارتفاع‌های هر مثلث، هم‌رس‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: شکل مناسب را رسم می‌کنیم. مطابق شکل، مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه و ارتفاع AH وارد بر وتر است و I و J به ترتیب نقطه هم‌رسی نیم‌سازهای زوایای مثلث‌های ABH و ACH هستند.

گام دوم: با توجه به شکل داریم:

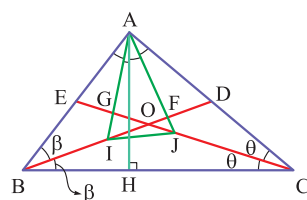


$$\begin{cases} \hat{B}\hat{A}H + \hat{C}\hat{A}H = 90^\circ \\ \hat{B}\hat{A}H + \hat{A}\hat{B}H = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{C}\hat{A}H = \hat{A}\hat{B}H$$

پس با فرض $\hat{B} = 2\beta$ نتیجه می‌شود $\hat{C}\hat{A}H = 2\beta$ و از آن‌جا که AJ نیم‌ساز زاویه $\hat{C}\hat{A}H$ است، نتیجه می‌گیریم $\hat{H}\hat{A}J = \hat{C}\hat{A}J = \beta$. با استدلال مشابه داریم:

$$\hat{B}\hat{A}I = \hat{H}\hat{A}I = \theta \text{ و } \hat{B}\hat{A}H = \hat{C} = 2\theta$$

گام سوم: در ادامه می‌نویسیم:



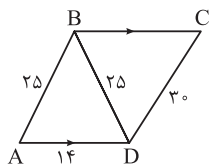
$$\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow 2\theta + 2\beta = 90^\circ \Rightarrow \theta + \beta = 45^\circ$$

$$\triangle ABF: \hat{A}\hat{F}B = 180^\circ - \beta - (2\theta + \beta) = 180^\circ - 2(\beta + \theta) = 180^\circ - 2 \times 45^\circ = 90^\circ$$

$$\triangle ACG: \hat{A}\hat{G}C = 180^\circ - \theta - (2\beta + \theta) = 180^\circ - 2(\theta + \beta) = 180^\circ - 2 \times 45^\circ = 90^\circ$$

بنابراین AI بر JG و AJ بر IF عمود است و این یعنی O نقطه هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث AIJ است. ضمناً O نقطه هم‌رسی نیم‌سازهای مثلث ABC نیز هست، زیرا نیم‌سازهای دو زاویه $\hat{A}\hat{B}C$ و $\hat{A}\hat{C}B$ در O متقاطع‌اند.

۲۰ در دوزنقه زیر، فاصله رأس A از خط شامل ساق CD کدام است؟



۱۱/۲ (۱)

۱۲ (۲)

۱۰/۸ (۳)

۱۴/۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

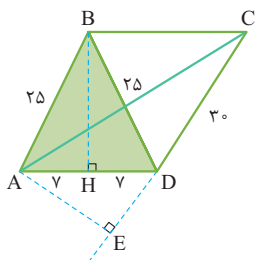
پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: در دوزنقه داده شده، قطر AC را رسم می کنیم.

دو مثلث ABD و ACD مساحت های برابر دارند:

$$S_{ABD} = S_{ACD} = \frac{1}{2} BH \times AD$$

گام دوم: در مثلث متساوی الساقین ABD، ارتفاع BH، میانه وارد بر AD نیز هست، داریم:



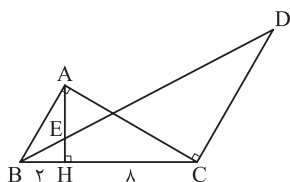
$$\Delta ABH : AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow 25^2 = 7^2 + BH^2 \Rightarrow BH = 24$$

گام سوم: حالا مساحت مثلث ACD را به دو روش نوشته و با هم برابر قرار می دهیم:

$$S_{ACD} = S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \times BH = \frac{1}{2} \times 14 \times 24 = 168 \Rightarrow \frac{1}{2} AE \times CD = 168 \Rightarrow \frac{1}{2} AE \times 30 = 168$$

$$\Rightarrow AE = \frac{168 \times 2}{15} = 11/2$$

۲۱ در شکل زیر، مثلث ABC قائم‌الزاویه و $AC = CD$ است. اگر $BH = ۲$ و $CH = ۸$ باشد، طول پاره خط AE کدام است؟



$$\frac{۲۰}{۷} \quad (۱)$$

$$۳ \quad (۲)$$

$$\frac{۲۵}{۷} \quad (۳)$$

$$۴ \quad (۴)$$

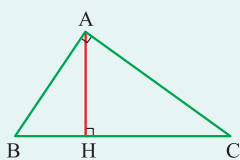
پاسخ: گزینه ۱

اگر از نقطه D ، عمود DH' را بر امتداد BC وارد کنیم، آن گاه $\triangle ACH \cong \triangle CDH'$.

Hint

درس Box

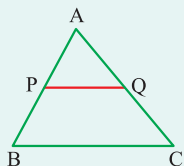
(۱) در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، اگر ارتفاع وارد بر وتر باشد، آن گاه:



$$AH^2 = BH \times CH$$

(۲) اگر در دو مثلث قائم‌الزاویه، طول وترها و اندازه یکی از زاویه‌های حاده، با هم برابر باشد، دو مثلث هم‌نهشت هستند.

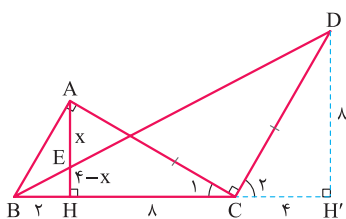
(۳) مطابق شکل، در مثلث ABC ، نقاط P و Q را به ترتیب روی AB و AC طوری در نظر گرفته‌ایم که $PQ \parallel BC$ ، بنا به تعمیم قضیه تالس، داریم:



$$\frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$$

گام اول: در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، AH ارتفاع وارد بر وتر است، پس داریم $AH^2 = BH \times CH$ ؛ بنابراین:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$AH^2 = 2 \times 8 \Rightarrow AH = 4$$

گام دوم: از نقطه D ، عمود DH' را بر امتداد BC وارد می‌کنیم، دو مثلث قائم‌الزاویه ACH و CDH' بنا به حالت تساوی وتر و یک زاویه حاده، هم‌نهشت هستند؛ زیرا:

$$\begin{cases} \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 90^\circ \\ \hat{C}_1 + \hat{CAH} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{C}_2 = \hat{CAH} \Rightarrow CH' = AH = 4$$

گام سوم: اگر فرض کنیم $AE = x$ ، آن گاه $EH = 4 - x$ و بنا به تعمیم قضیه تالس در مثلث BDH' ، داریم:

$$\frac{EH}{DH'} = \frac{BH}{BH'} \Rightarrow \frac{4-x}{10} = \frac{2}{10} \Rightarrow \frac{4-x}{10} = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{20}{10} = 2$$

ریاضیات

۲۲

تفاضل حداقل و حداکثر تعداد مکعب‌های کوچکی که باید از یک مکعب به ابعاد $3 \times 3 \times 3$ حذف کنیم تا نمای بالای

آن به صورت زیر باشد، چه قدر است؟



۱۸ (۲)

۹ (۱)

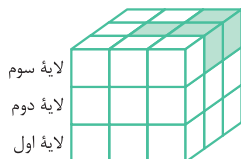
۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

مشاوره این سؤال، مشابه سؤال ۲۵،
کنکور ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۴
طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۳

گام اول: حداقل تعداد مکعب‌های کوچک حذفی، زمانی است که سه مکعب رنگی و تمام مکعب‌های زیر آن حذف شوند، پس کم‌ترین مقدار برابر است با:



لایه سوم

لایه دوم

لایه اول

$$3 \times 3 = 9$$

گام دوم: حداکثر تعداد مکعب‌های کوچک حذفی، زمانی است که سه مکعب رنگی و تمام مکعب‌های زیر آن و همچنین تمام مکعب‌های کوچک باقی‌مانده در لایه‌های دوم و سوم حذف شوند، پس بیشترین مقدار برابر است با $9 + 6 \times 2 = 21$.

گام سوم: بنابراین، خواسته سؤال، برابر است با:

$$21 - 9 = 12$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



ریاضیات

۲۳

در شکل زیر، نقطه O ، وسط قطر $BC = 8$ و فاصله F از وسط پاره خط AC برابر با ۷ است. اگر $\widehat{EBF} = \widehat{CF}$ ، آن گاه

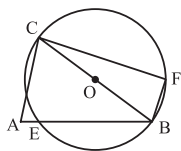
طول پاره خط AB کدام است؟

(۱) ۷

(۲) ۶

(۳) ۵

(۴) ۸

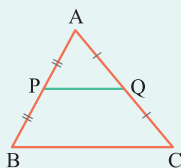


مشاوره این سؤال، مشابه سؤال ۲۶، کنکور ریاضی تیر ۱۴۰۴ طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۲

درس: Box

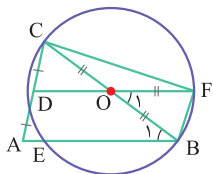
(۱) از قضیه تالس در مثلث و عکس آن می توان نتیجه گرفت که در مثلث ABC ، اگر P وسط AB و Q وسط AC باشد، آن گاه $PQ = \frac{1}{2}BC$ و $PQ \parallel BC$.



(۲) در هر دایره، اندازه هر زاویه مرکزی، برابر با اندازه کمان روبه روی آن و اندازه هر زاویه محاطی، نصف اندازه کمان روبه روی آن است.

گام اول: وسط AC را نقطه D می نامیم. نقاط F و D را به O وصل می کنیم. از آن جا که در مثلث ABC ، نقاط O و D به ترتیب وسط های BC و AC هستند، پس $OD \parallel AB$ و $OD = \frac{AB}{2}$ می باشد.

گام دوم: با توجه به شکل، داریم:



$$\hat{B}_1 = \frac{\widehat{CE}}{2} = \frac{36^\circ - \widehat{CF} - \widehat{EBF}}{2} \xrightarrow{\widehat{CF} = \widehat{EBF}} \hat{B}_1 = \frac{36^\circ - 2\widehat{CF}}{2} = 18^\circ - \widehat{CF} = \widehat{BF}$$

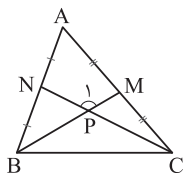
$$\xrightarrow{\hat{O}_1 \text{ زاویه مرکزی}} \hat{B}_1 = \hat{O}_1 \Rightarrow OF \parallel AB$$

گام سوم: از این که $OF \parallel AB$ و $OD \parallel AB$ نتیجه می گیریم که F ، O و D روی یک امتدادند و DF از O می گذرد و می توان نوشت:

$$OD = DF - OF = 7 - \frac{1}{2} = 7 - 4 = 3 \Rightarrow \frac{AB}{2} = 3 \Rightarrow AB = 6$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

مطابق شکل، M و N وسطهای AC و AB هستند و نقطه تقاطع BM و CN را P نامیده‌ایم. اگر زاویه‌های $\hat{A}$ و $\hat{P}_1$ مکمل باشند، آنگاه حاصل $\frac{BM}{CN}$ برابر با کدام است؟



$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{AB}{AC} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{AB}{AC}} \quad (3)$$

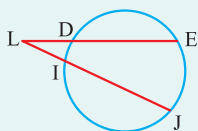
پاسخ: گزینه ۱

چهارضلعی AMPN محاطی است.

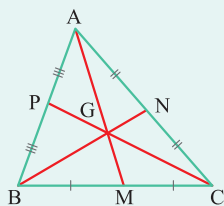
Hint

کنس Box

- (۱) اگر دو زاویه مقابل در یک چهارضلعی مکمل باشند، آن چهارضلعی محاطی است، یعنی از چهار رأس آن یک دایره می‌گذرد.
(۲) مطابق شکل، اگر امتداد وترهای DE و IJ در نقطه L بیرون دایره متقاطع باشند، آنگاه $LD \times LE = LI \times LJ$.

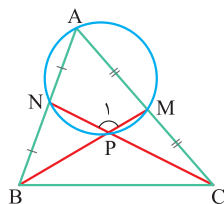


- (۳) میانه‌های هر مثلث هم‌رسانند و نقطه هم‌رسی میانه‌ها، مطابق شکل، هر میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند، یعنی در شکل زیر داریم:



$$AG = \frac{2}{3}AM, \quad BG = \frac{2}{3}BN, \quad CG = \frac{2}{3}CP$$

گام اول: از این که $\hat{A} + \hat{P}_1 = 180^\circ$ ، نتیجه می‌گیریم چهارضلعی AMPN محاطی است و دایره محیطی آن را رسم می‌کنیم. ✓ پاسخ خیلی تشریحی



گام دوم: با توجه به شکل، بنا به رابطه طولی در دایره داریم:

$$\begin{cases} BN \times AB = PB \times BM & (1) \\ CM \times AC = PC \times CN & (2) \end{cases}$$

گام سوم: از آنجا که BM و CN میانه‌های مثلث ABC هستند، P نقطه هم‌رسی میانه‌های مثلث ABC است و داریم

$$PB = \frac{2}{3}BM \quad \text{و} \quad PC = \frac{2}{3}CN$$

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow \frac{AB}{2} \times AB = \frac{2}{3}BM \times BM \\ (2) &\Rightarrow \frac{AC}{2} \times AC = \frac{2}{3}CN \times CN \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} AB^2 = \frac{4}{3}BM^2 \\ AC^2 = \frac{4}{3}CN^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{BM^2}{CN^2} = \frac{AB^2}{AC^2} \Rightarrow \frac{BM}{CN} = \frac{AB}{AC}$$

می‌خواهیم از نقطه $A(-1, 5)$ به نقطه B واقع بر محور y رفته و پس از طی مسیری به طول ۲ روی این محور به نقطه C رسیده و از C به نقطه $D(4, -2)$ برویم. عرض نقطه B کدام باشد تا طول مسیر شکسته $ABCD$ کوتاه‌ترین مقدار ممکن شود؟

$$\frac{7}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{9}{2} \quad (۳)$$

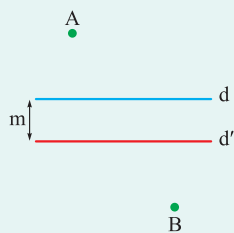
$$۳ \quad (۲)$$

$$۴ \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

درس: Box

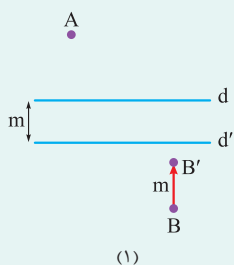
فرض کنید دو خط d و d' با هم موازی‌اند و فاصله بین آن‌ها m است. نقطه A را بالای d و نقطه B را پایین خط d' در نظر گرفته‌ایم. می‌خواهیم نقطه M را روی d و نقطه N را روی d' طوری مشخص کنیم که MN بر d و d' عمود بوده و مسیر شکسته $AMNB$ کم‌ترین طول ممکن را داشته باشد. روش انجام این کار، به صورت زیر است:



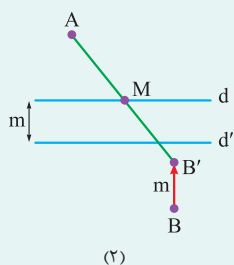
(۱) نقطه B را در راستای عمود بر d و d' ، به اندازه m واحد به سمت A منتقل می‌کنیم تا به B' برسیم.

(۲) از B' به A وصل می‌کنیم، نقطه برخورد AB' با d ، نقطه M است.

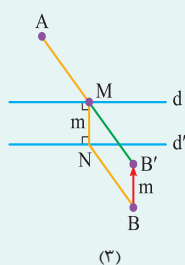
(۳) از M خطی عمود بر d رسم می‌کنیم، نقطه برخورد این خط با d' ، نقطه N است.



(۱)

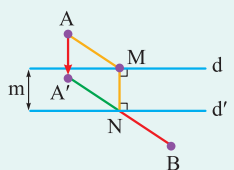


(۲)



(۳)

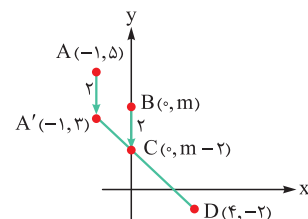
تذکر: می‌توانستیم در ابتدا A را به اندازه m واحد به سمت پایین منتقل کنیم که در این صورت نقطه برخورد $A'B$ با d' ، نقطه N را برایمان مشخص می‌کرد و از برخورد خط عمود بر d' در N با خط d ، نقطه M به دست می‌آمد.



گام اول: اگر $A(-1, 5)$ را با انتقالی که بردار آن به طول ۲، موازی و هم‌جهت با $\overline{BC}$ به $A'(-1, 3)$ تبدیل کنیم، آن‌گاه C ، محل برخورد خط $A'D$ با محور y ‌ها است.

گام دوم: معادله خط گذرنده از $A'(-1, 3)$ و $D(4, -2)$ به صورت $x + y = 2$ است.

گام سوم: مطابق شکل اگر مختصات B را به صورت $B(0, m)$ در نظر بگیریم، آن‌گاه مختصات C به صورت $C(0, m-2)$ خواهد بود و مختصات C باید در معادله $A'D$ صدق کند:

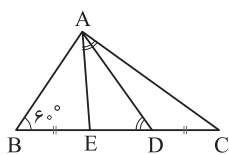


$$A'D: x + y = 2 \xrightarrow{C(0, m-2)} 0 + (m-2) = 2 \Rightarrow m = 4$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ریاضیات

۲۶ در شکل زیر، $BE = CD$ ، $\hat{A}DB = \hat{E}AC$ و $\hat{B} = 60^\circ$. اگر $AB = 5$ و $DE = 3$ ، آن گاه طول پاره خط BC کدام است؟



(۱) ۸

(۲) ۷

(۳) ۱۰

(۴) ۱۱

مشاوره این سؤال، مشابه سؤال ۲۷ کنکور ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳ طراحی شده است، سؤال کنکور از موضوع تشابه مطرح شده است، ولی این سؤال به صورت ترکیبی از تشابه و قضیه کسینوسها مطرح شده و دشوارتر از آن است.

پاسخ: گزینه ۴

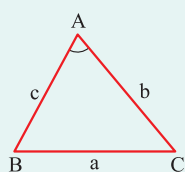
$$\triangle AED \sim \triangle AEC$$

Hint

درس: Box

(۱) اگر دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشد، آن دو مثلث متشابه‌اند.

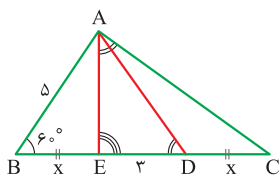
(۲) قضیه کسینوسها: مطابق شکل، در مثلث ABC ، داریم:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \hat{A}$$

گام اول: با توجه به شکل داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\begin{cases} \hat{E}AC = \hat{A}DB \\ \hat{A}EC = \hat{A}EC \end{cases} \Rightarrow \triangle AED \sim \triangle AEC \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{ED}{AE} \Rightarrow AE^2 = ED \times EC$$

فرض می‌کنیم $BE = CD = x$ ، داریم:

$$AE^2 = 3(3 + x) = 9 + 3x \quad (1)$$

گام دوم: در مثلث ABE بنا بر رابطه کسینوسها داریم:

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2AB \times BE \times \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow AE^2 = 25 + x^2 - 5x \quad (2)$$

گام سوم: از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$25 + x^2 - 5x = 9 + 3x \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow BC = 2x + 3 = 11$$

۲۷ اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $(A+B) \times (A-B)$ یک ماتریس قطری باشد، آن گاه نسبت درایه‌های

غیرصفر در این ماتریس قطری کدام است؟

۸ (۴

۶ (۳

-۴ (۲

-۵ (۱

پاسخ: گزینه ۱

(۱) درایه سطر اُم و ستون اُم ماتریس AB از ضرب سطر اُم ماتریس A در ستون اُم ماتریس B به دست می‌آید.

(۲) ماتریس قطری: ماتریس مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن، صفر باشند.

گام اول: ماتریس $(A+B) \times (A-B)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A+B = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & a-2 \\ b+3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & a+2 \\ b-3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(A+B) \times (A-B) = \begin{bmatrix} 5 & a-2 \\ b+3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & a+2 \\ b-3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 + (a-2)(b-3) & 2a+16 \\ 4b+6 & (a+2)(b+3)-3 \end{bmatrix}$$

گام دوم: برای این که $(A+B) \times (A-B)$ یک ماتریس قطری باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 2a+16=0 \\ 4b+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-8 \\ b=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

گام سوم: حالا می‌توانیم خواسته سؤال را محاسبه کنیم:

$$(A+B) \times (A-B) \text{ نسبت درایه‌های غیرصفر} = \frac{15 + (a-2)(b-3)}{(a+2)(b+3)-3}$$

$$\Rightarrow \frac{15 + (-8-2)(-\frac{3}{2}-3)}{(-8+2)(-\frac{3}{2}+3)-3} = \frac{15+45}{-9-3} = \frac{60}{-12} = -5$$

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ و $|A^2 + 2A| = 27$ باشد، آن گاه اختلاف بین حداکثر و حداقل مقدار دترمینان $I_3(a+1)$ کدام است؟ ۲۸

کدام است؟

۶۴ (۴)

۳۲ (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

برای محاسبه دترمینان ماتریس $A^2 + 2A$ ، از ماتریس A فاکتور بگیرید.

Hint

درس Box

(۱) اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند، آن گاه: $|AB| = |A| |B|$

(۲) اگر k عددی حقیقی و A یک ماتریس مربعی از مرتبه n باشد، آن گاه: $|kA| = k^n |A|$

گام اول: می دانیم دترمینان حاصل ضرب دو ماتریس مربعی هم مرتبه برابر حاصل ضرب دترمینان های آن دو ماتریس است، پس:

$$|A^2 + 2A| = |A(A + 2I)| = |A| |A + 2I|$$

گام دوم: دترمینان دو ماتریس A و $A + 2I$ را محاسبه می کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a - 4a = -3a$$

$$A + 2I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & a+2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A + 2I| = (a+2) - 4(a+2) = -3(a+2)$$

گام سوم: با جای گذاری مقادیر دترمینان ها در رابطه صورت سؤال، مقدار a را پیدا می کنیم:

$$|A| |A + 2I| = 27 \Rightarrow (-3a)(-3(a+2)) = 27 \Rightarrow 9a(a+2) = 27 \Rightarrow a^2 + 2a - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (a+3)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ a = 1 \end{cases}$$

گام چهارم: مقدار دترمینان $I_3(a+1)$ را به ازای مقادیر به دست آمده برای a محاسبه می کنیم:

$$a = -3 \Rightarrow |-2I_3| = (-2)^3 |I_3| = -8 \times 1 = -8$$

$$a = 1 \Rightarrow |2I_3| = 2^3 |I_3| = 8 \times 1 = 8$$

$$\text{اختلاف مقادیر دترمینان} = 8 - (-8) = 16$$

طول مماس مشترک خارجی دو دایره با معادله‌های $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$ و $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ کدام است؟

۱ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

۲ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

(۱) اگر معادله گسترده یک دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ باشد، آن گاه مرکز این دایره، نقطه $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ و شعاع آن $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ است.

(۲) اگر دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ دارای مماس مشترک خارجی باشند، طول آن برابر است با $\sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$.

گام اول: مرکز دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ ، نقطه $O(2, -1)$ و شعاع آن $R = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + 2^2 - 4(-4)} = 3$ و مرکز دایره $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ ، نقطه $O'(0, -2)$ و شعاع آن $R' = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 4^2 - 4 \times 3} = 1$ است.

گام دوم: طول خط‌المركزین دو دایره $d = OO' = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-(-2))^2} = \sqrt{5}$ است.

گام سوم: از فرمول محاسبه طول مماس مشترک خارجی استفاده می‌کنیم:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - (3 - 1)^2} = 1$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۳۰. توسط بردارهای $\vec{a} = (1, 1, 0)$ ، $\vec{b} = (0, m, 1)$ و $\vec{a} \times \vec{b}$ ، یک مکعب مستطیل تولید می‌شود. حجم این مکعب مستطیل،

کدام است؟

$$\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

$$۳\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$۲\sqrt{2} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۱

باید دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند.

Hint

درس Box

(۱) برای هر دو بردار مانند $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ داریم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

(۲) برای هر بردار دلخواه مانند $\vec{a}$ داریم $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

(۳) دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند، اگر و فقط اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

(۴) حجم متوازی‌السطوح تولیدشده توسط سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با $V = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|$.

(۵) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیرصفر و ناموازی باشند، بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ ، بر صفحه شامل دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و در نتیجه بر هر دوی آن‌ها عمود است.

گام اول: می‌دانیم اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیرصفر و ناموازی باشند، آن‌گاه همواره بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ بر هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است، پس متوازی‌السطوح تولیدشده روی سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{a} \times \vec{b}$ زمانی به مکعب مستطیل تبدیل می‌شود که دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند. می‌دانیم اگر دو بردار بر هم عمود باشند، ضرب داخلی آن دو بردار برابر با صفر است، پس باید داشته باشیم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow (1, 1, 0) \cdot (0, m, 1) = 0 \Rightarrow 1 \times 0 + 1 \times m + 0 \times 1 = 0 \Rightarrow m = 0$$

گام دوم: حاصل ضرب خارجی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 0)$$

گام سوم: حجم متوازی‌السطوح تولیدشده توسط سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با $V = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|$ ، پس اگر $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ، آن‌گاه:

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})| = \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2})^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

پاسخ خیلی تشریحی

ریاضیات

۳۱ اگر گزاره $r \Rightarrow (p \vee q)$ درست باشد، احتمال این که گزاره q نادرست باشد، چه قدر است؟

با احتمال شرطی طرفی

$$\frac{2}{5} \quad (1)$$

$$\frac{3}{5} \quad (2)$$

$$\frac{4}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{5} \quad (4)$$

مشاوره منطق ریاضی در سال های اخیر پای ثابت همه کنکور ها بوده است. سؤال با این موضوع در بین چند سؤال اول کنکور است. این سؤال مشابه سؤال کنکور ۱۴۰۰ است که ترکیبی از احتمال و منطق طرح شده است که باز هم می تواند از آن سؤال بیاید.

پاسخ: گزینه ۲

ببین در چند حالت گزاره داده شده درست می شه (مخرج) و بعد تعداد ردیف هایی که q نادرست هست، می شه صورت.

Hint

درس Box

ارزش گزاره های ترکیبی:

ارزش	فارسی	ریاضی	ترکیب گزاره ها
وقتی درست است که حداقل یکی از گزاره های p یا q درست باشد.	p یا q	$p \vee q$	ترکیب فصلی
وقتی درست است که p و q هر دو درست باشند.	q و p	$p \wedge q$	ترکیب عطفی
فقط در حالت «ن $\Rightarrow$ د» نادرست است و در بقیه حالت ها درست است.	اگر p آن گاه q	$p \Rightarrow q$	ترکیب شرطی
وقتی درست است که p و q هم ارزش باشند.	p اگر و فقط اگر q	$p \Leftrightarrow q$	ترکیب دوشروطی

کل حالت هایی که گزاره $r \Rightarrow (p \vee q)$ درست است را شمارش می کنیم (فضای نمونه کاهش یافته). دو حالت برای r در نظر می گیریم:

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: r درست باشد:

p	q	r
د	د	د
د	ن	د ✓
ن	د	د
ن	ن	د ✓

در این حالت ارزش $p \vee q$ هر چه باشد، گزاره شرطی درست است.

گام دوم: r نادرست باشد:

p	q	r
ن	ن	ن ✓

در حالتی که $p \vee q$ درست باشد، گزاره شرطی نادرست می شود؛ اما اگر $p \vee q$ نادرست باشد (یعنی p و q هر دو نادرست)، به انتهای مقدم کل گزاره درست است.

گام سوم: $4 + 1 = 5$ حالت داریم. حالت های ✓ مطلوب (حالت های q نادرست) هستند، پس احتمال مورد نظر برابر $\frac{3}{5}$ است.

درست است که ۳ گزاره در جدول ارزش $2 \times 2 \times 2 = 8$ حالت دارند، ولی چون گفته گزاره $r \Rightarrow (p \vee q)$ درست است، فقط باید حالت هایی را از جدول در نظر بگیریم که این گزاره درست باشد.

گول نخوری

ارزش گزاره $p \Rightarrow (q \vee r)$ درست است. احتمال این که ارزش گزاره r نادرست باشد، کدام است؟

(سؤال ۱۲۵ کنکور ریاضی ۱۴۰۰)

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{4}{7} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{3}{7} \quad (1)$$

ریاضیات

۳۲

دو مجموعه $\{4, xz, y-1\}$ و $A = \{1, x+3, -6\}$ و $B = \{6, -3, x+1\}$ داده شده است. اگر $A \times B = B \times A$ باشد، بیشترین

مقدار $x - y + z$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۵

(۳) ۷

(۴) -۵

مشاوره از مبحث مجموعه‌ها (جبر مجموعه، زیرمجموعه‌ها و ضرب دکارتی) معمولاً یک سؤال در کنکور می‌آید که بیشتر از جبر مجموعه‌ها بوده است. از ضرب دکارتی مشابه این سؤال تا حالا چند بار در کنکور آمده است که بعید نیست امسال از این موضوع سؤال داشته باشیم.

پاسخ: گزینه ۲

باید $A = B$ باشد.

Hint

درس‌Box

تعریف ضرب دکارتی و ویژگی‌های آن:

$A \times B$ شامل تمام زوج‌های مرتبی است که مؤلفه‌های اول آن‌ها عضو A و مؤلفه دوم آن‌ها عضو B باشد. اگر A دارای m و B دارای n عضو باشد، $A \times B$ دارای $m \times n$ عضو است.

خواص ضرب دکارتی:

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset \quad (۱)$$

$$A \times A = A^2 \quad (۲)$$

(۳) ضرب دکارتی روی $\cup$ و $\cap$ - خاصیت پخشی دارد، یعنی:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

(۴) ضرب دکارتی برای مجموعه‌های ناتهی و متمایز خاصیت جابه‌جایی ندارد؛ یعنی در حالت کلی $A \times B \neq B \times A$ ؛ اما اگر A و B ناتهی باشند، از تساوی $A \times B = B \times A$ نتیجه می‌شود $A = B$.

گام اول: از فرض $A \times B = B \times A$ و این که A و B ناتهی هستند، نتیجه می‌شود: $A = B$.

گام دوم: عضوهای دو مجموعه باید یکسان باشد، چون $4 \in A$ است، پس $x = 3 \Rightarrow x + 1 = 4$.

گام سوم: دو حالت داریم:

$$\text{الف) } \begin{cases} y-1=6 \Rightarrow y=7 \\ xz=-3 \xrightarrow{x=3} z=-1 \end{cases}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} y-1=-3 \Rightarrow y=-2 \\ xz=6 \xrightarrow{x=3} z=2 \end{cases}$$

گام چهارم: حاصل $x - y + z$ را در هر دو حالت به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 - 7 - 1 = -5 \\ x - y + z = 3 - (-2) + 2 = 7 \end{cases}$$

در مجموعه‌های چهارعضوی $A = \{x+2, 1, 4, y\}$ و $B = \{5, 7, z, t-1\}$ ، فرض کنید $A \times B = B \times A$ باشد. تعداد مجموعه‌ها به صورت $\{(x, y), (z, t)\}$ کدام است؟

(سؤال ۱۰۳ کنکور ریاضی ۱۳۹۹)

(۴) ۶

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

ریاضیات

۳۳

دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال حداقل یکی مضرب ۳ و حداکثر یکی عدد اول ظاهر شده است؟

$$\frac{5}{12} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$\frac{4}{9} \quad (3)$$

مشاوره مشابه این سؤال در سال‌های اخیر در کنکور ریاضی و تجربی زیاد مطرح شده است. سؤال ساده‌ای است، فقط حواستان به شمارش درست حالت‌های مطلوب باشد.

پاسخ: گزینه ۲

ببین از ۳۶ حالت زوج‌های مرتب در کدام حالت‌ها حداقل ۳ یا ۶ داریم و حداکثر یک عدد اول داریم.

گام اول: برای شمارش زوج مرتب‌های مطلوب دقت می‌کنیم حداقل یکی از مؤلفه‌ها ۳ یا ۶ است. اگر یکی از مؤلفه‌ها ۳ باشد، مؤلفه دیگر نباید عدد اول باشد؛ اما اگر یکی از مؤلفه‌ها ۶ باشد، مؤلفه دیگر ممکن است اول باشد یا نباشد.

گام دوم: اگر یکی از مؤلفه‌ها ۳ باشد:

$$(3, \square), (\square, 3) \Rightarrow \text{حالت ۶}$$

$$(6, \square), (\square, 6) \Rightarrow \text{حالت ۹}$$

گام سوم: اگر یکی از مؤلفه‌ها ۶ باشد

(۳, ۶) و (۶, ۳) را در گام دوم شمردیم و این‌که (۶, ۶) را دو بار نشمرید.

گام چهارم:

$$P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال عدد ظاهرشده یکی از تاس‌ها اول بوده و مجموع آن‌ها حداقل ۶ است؟

(سؤال ۲۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت اول)

$$\frac{13}{18} \quad (4)$$

$$\frac{11}{18} \quad (3)$$

$$\frac{5}{9} \quad (2)$$

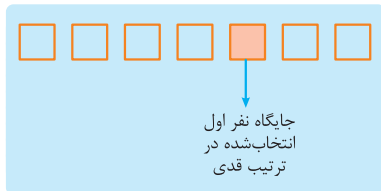
$$\frac{2}{9} \quad (1)$$

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

گول نخوری

یک تیم والیبال ۷ بازیکن دارد که قد هیچ دو نفری یکسان نیست. یک والیبالیست به تصادف انتخاب می‌کنیم، اگر دو نفر دیگر انتخاب کنیم و ببینیم هر دو از والیبالیست اولی کوتاه‌ترند، با کدام احتمال والیبالیست اول، سومین والیبالیست قدبلند است؟



$$\frac{2}{7} \quad (2)$$

$$\frac{4}{7} \quad (4)$$

$$\frac{1}{7} \quad (1)$$

$$\frac{6}{35} \quad (3)$$

مشاوره: از موضوع احتمال معمولاً دو سؤال در کنکور می‌آید که یکی از آن‌ها معمولاً از قانون احتمال کل یا بیز است. تمرین‌های کتاب درسی در موضوع احتمال را خیلی خوب بخوانید، چون خیلی خیلی مهم هستند. این سؤال نیز مشابه یکی از تمرین‌های کتاب درسی است.

پاسخ: گزینه ۳

از رابطه $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ استفاده کن. A می‌شه: نفر اول بلندتر از اون دوتا باشه و B می‌شه: نفر اول، سومین نفر قدی باشه.

گام اول: پیشامدهای A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A: نفر اول از ۲ نفر بعدی بلندتر است.

B: نفر اول انتخاب‌شده نفر سوم قدی است.

گام دوم: کافی است $P(B|A)$ را به دست آوریم، طبق قانون بیز داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$$

نفرات دوم و سوم از اولی کوتاه‌تر هستند. نفر اول انتخاب‌شده در جایگاه سوم قدی است.

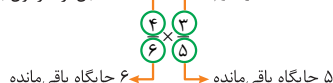
$$= \frac{\frac{1}{7} \times \left(\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \right)}{\frac{1}{3}} = \frac{6}{35}$$

از بین ۳ نفر، نفر اول بلندترین است.

گام چهارم: دقت کنید وقتی نفر اول، سومین نفر قدی باشد، برای محاسبه $P(A|B)$ (یعنی دو نفر بعدی قبل از نفر اول باشند و نفر اول در جایگاه سوم است) داریم:



نفر سوم ۴ تا قبل از نفر اول برای نفر دوم



گام اول: از روش کاهش فضای نمونه در احتمال شرطی استفاده می‌کنیم. فضای نمونه کاهش یافته این است که نفر اول انتخاب‌شده

از دو نفر بعدی بلندتر باشد، پس به $\binom{7}{3}$ روش ۳ جایگاه انتخاب کرده، نفر اول را در جایگاه اول و به ۲! روش نیز دو نفر.

گام دوم: نفرات بعدی را در جایگاه‌های بعدی قرار می‌دهیم.

برای شمارش حالت‌های مطلوب نفر اول انتخاب‌شده را در جایگاه سوم قرار می‌دهیم. از بین ۴ جایگاه قبل از نفر اول به $\binom{4}{2}$ روش دو جایگاه انتخاب کرده و به ۲! روش، ۲ نفر بعدی را در آن قرار می‌دهیم.

گام سوم:

$$P(B|A) = \frac{\binom{4}{2} \times 2! \times 4!}{\binom{7}{3} \times 2! \times 4!} = \frac{6}{35}$$

جایگشت نفرات بعدی

په‌چور دیگه

ریاضیات

۳۵

داده‌های زیر را از کوچک به بزرگ با شماره‌های ۱ تا n شماره‌گذاری می‌کنیم. برای انتخاب نمونه ۵ عضوی به روش سیستماتیک شماره اولین داده نمونه برابر ۳ است. واریانس داده‌های انتخاب شده کدام است؟

داده	۳	۴	۵	۶	۸
فراوانی	۵	۴	۶	۳	۲

۳, ۳, ۳, ۳, ۳, ۴, ...
۳ تا ۵ داریم.

۳ (۴)

۲ / ۸ (۳)

۲ / ۶ (۲)

۲ / ۴ (۱)

مشاوره: از آمار توصیفی و استنباطی یک سؤال در کنکور می‌آید که معمولاً از شاخص‌های پراکندگی بوده است. این سؤال ترکیبی از هر دو موضوع است. (ترکیب روش‌های نمونه‌گیری و شاخص‌های پراکندگی)

پاسخ: گزینه ۳

کل ۲۰ عدد رو بنویس بعد بین با روش سیستماتیک چه اعدادی باید انتخاب بشن.

Hint

درس: Box

شاخص‌های پراکندگی:

توضیح فارسی	فرمول	شاخص
هر داده را منهای میانگین کرده و به توان ۲ می‌رسانیم. سپس با هم جمع کرده و تقسیم بر تعداد می‌کنیم. به زبان دیگر، واریانس برابر میانگین مربع انحراف از میانگین‌هاست.	$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ یا $\sigma^2 = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$	واریانس
جذر واریانس است.	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$	انحراف معیار
$\frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}}$	$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$	ضریب تغییرات
اگر اعداد تشکیل دنباله حسابی بدهند، این فرمول راحت‌تر از تعریف واریانس است.	$\sigma^2 = \left(\frac{n^2 - 1}{12}\right)d^2$	واریانس n عدد حسابی با قدرنسبت d

انواع روش‌های نمونه‌گیری (اندازه نمونه برابر n و اندازه جامعه برابر N است):

روش	تعریف
تصادفی ساده	نوعی روش نمونه‌گیری که در آن همه واحدهای آماری برای انتخاب شدن در نمونه، احتمال یکسان دارند.
خوشه‌ای	نمونه‌گیری که در آن واحدهای نمونه‌گیری اولیه در جامعه، گروه‌ها یا خوشه‌ها باشند؛ سپس همه واحدهای آماری خوشه‌های انتخاب شده را به عنوان نمونه در نظر می‌گیریم.
طبقه‌ای	روش نمونه‌گیری که در آن با طبقه‌بندی جامعه به زیرجامعه‌های مجزا یک نمونه تصادفی ساده از هر طبقه انتخاب می‌شود.
سامانمند (سیستماتیک)	نوعی نمونه‌گیری طبقه‌ای است که در آن اندازه طبقات با هم برابر است. فقط از طبقه اول، واحد آماری به تصادف انتخاب می‌شود و با همان رویه از طبقات دیگر، این کار انجام می‌گیرد.

گام اول: داده‌ها به صورت زیر هستند:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۳, ۳, ۳, ۳, ۳, ۴, ۴, ۴, ۴, ۵, ۵, ۵, ۵, ۵, ۵, ۶, ۶, ۶, ۶, ۸, ۸

گام دوم: برای انتخاب نمونه‌ای به اندازه ۵ کافی است داده‌ها را به ۴ گروه تقسیم کنیم و از هر کدام عدد سوم را انتخاب کنیم.

۳, ۴, ۵, ۵, ۸

گام سوم: واریانس داده‌های مقابل را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{3+4+5+5+8}{5} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{(3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (5-5)^2 + (8-5)^2}{5} = \frac{14}{5} = 2.8$$

پایه دوازدهم ریاضی

بیست و سوم مردادماه ۱۴۰۵

مرحله بیست و یکم

۳۶ اگر m بزرگ‌ترین عدد طبیعی باشد که $42 \equiv (13 - m)^{21}$ ، بزرگ‌ترین عدد طبیعی دورقمی y که در معادله $11x + my = 29$

صدق می‌کند، کدام است؟

۹۴ (۱)

۹۳ (۲)

۹۲ (۳)

۹۱ (۴)

مشاوره از معادله هم‌نهستی و سیاله معمولاً یک سؤال در کنکور می‌آید. البته این سؤال ترکیبی از دو موضوع و مشابه سؤال کنکور سال ۱۴۰۰ است. سؤال مهمی است حتماً آن را تحلیل کنید.

پاسخ: گزینه ۴

$42 \equiv 0$ و همچنین $42 \equiv (13 - m)^{21}$ باید توش ۷ داشته باشد.

Hint

درس Box

حل معادله سیاله خطی:

تعریف: به معادله $ax + by = c$ که همه ضرایب و مجهولات عدد صحیح هستند، معادله سیاله خطی درجه اول می‌گوییم.

شرط جواب: شرط این که معادله $ax + by = c$ جواب داشته باشد، این است که $(a, b) | c$ (و برعکس).

روش حل معادله سیاله: معادله سیاله را به معادله هم‌نهستی تبدیل می‌کنیم. برای این کار دو طرف معادله را به پیمانه a می‌بریم.

ax که مضرب a است، هم‌نهشت صفر می‌شود، پس داریم:

$$ax + by \equiv c \Rightarrow by \equiv c$$

دقت کنید که می‌توانستیم به پیمانه b هم ببریم که در این صورت، معادله به صورت $ax \equiv c$ درمی‌آید.

این که به کدام یک از پیمانه‌های b یا a ببریم فرقی نمی‌کند، اما معمولاً به پیمانه‌ای که کوچک‌تر (از نظر قدرمطلق) است ببریم، بهتر است.

بعد از این که معادله هم‌نهستی را حل و آن متغیر را پیدا کردید، باید آن در معادله سیاله قرار دهید تا مجهول دیگر هم به دست آید.

معادله هم‌نهستی و روش حل آن:

برای حل معادله هم‌نهستی $ax \equiv b$ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

(۱) اگر a و b اعداد بزرگی هستند، به جایشان یک عدد هم‌نهشت با آن‌ها به پیمانه m را قرار می‌دهیم.

(۲) با اضافه کردن مضارب پیمانه به b ، کاری می‌کنیم تا دو طرف بر a بخش‌پذیر باشند.

(۳) با استفاده از ویژگی تقسیم، دو طرف را به a ساده می‌کنیم تا x به دست آید. (البته می‌توانیم با ضرب دو طرف هم‌نهستی در عددی که نسبت به پیمانه، اول باشد نیز ضرایب را ساده‌تر کنیم.)

ویژگی تقسیم دو طرف هم‌نهستی:

ویژگی تقسیم	ریاضی	توضیح
۱	$ca \equiv cb, (c, m) = 1 \Rightarrow a \equiv b$	اگر عدد c که قرار است از دو طرف ساده شود با پیمانه، عامل مشترک نداشته باشند، آن را ساده می‌کنیم.
۲	$ca \equiv cb, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b$	اگر عدد c با پیمانه، ب.م.م d داشته باشد، c را از دو طرف ساده می‌کنیم، ولی پیمانه به d تقسیم می‌شود.

گام اول: ۴۲ بر ۲۱ بخش‌پذیر است، پس $42 \equiv 0$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام دوم: $(13 - m)^{21}$ بر 3×7 بخش‌پذیر است، پس در تجزیه $(13 - m)^{21}$ باید اعداد اول ۳ و ۷ وجود داشته باشند. اگر

$m = 7$ (یا بیشتر باشد) $13 - m < 7$ ، پس در $(13 - m)^{21}$ عامل ۷ نداریم، پس بزرگ‌ترین مقدار m برابر ۶ است که $6 \equiv 0$.

گام سوم:

$$11x + 6y = 29 \xrightarrow[\text{به پیمانه 11}]{\text{دو طرف را}} 11x + 6y \equiv 29$$

$$\xrightarrow{29 \equiv 7} 6y \equiv 7 + 11 = 18 \xrightarrow[(6, 11)=1]{\div 6} y \equiv 3 \Rightarrow y = 11k + 3$$

گام چهارم: بزرگ‌ترین عدد دورقمی ممکن برای y به ازای $k = 8$ ، یعنی $y = 91$ به دست می‌آید.



ریاضیات

۳۷ عدد $x^2 - 12^{36}$ بر ۱۹ بخش پذیر است. رقم یکان بزرگ ترین عدد دورقمی x کدام است؟

(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۸

(۴) ۹

مشاوره از نظریه اعداد، معمولاً دو سؤال در کنکور می آید که معمولاً هر دو از هم نهشتی است یا لااقل یک ربطی به هم نهشتی دارد. پیدا کردن باقی مانده توسط هم نهشتی خیلی مهم است.

پاسخ: گزینه ۱

عبارت رو با اتحاد مزدوج تجزیه کن؛ بعد هر کدام از پرانتزها باید به ۱۹ بخورن!

Hint

درس Box

پیدا کردن باقی مانده با استفاده از هم نهشتی: مهم ترین کاربرد هم نهشتی، پیدا کردن باقی مانده اعداد بزرگ در تقسیم بر m است. مراحل کار به صورت زیر است:

(۱) یک هم نهشتی اولیه می نویسیم. اگر این هم نهشتی جوری باشد که سمت راست، ۱ یا -۱ باشد بهتر است.

(۲) با توان رسانی، ضرب و جمع، مقسوم را می سازیم.

(۳) اگر سمت راست منفی باشد یا بزرگ تر از پیمانه باشد، آن قدر از پیمانه به آن اضافه یا کم می کنیم تا در محدوده باقی مانده $(0 \leq r < m)$ قرار گیرد.

گام اول: $x^2 - 12^{36}$ بر ۱۹ بخش پذیر است، پس در تقسیم بر ۱۹ باقی مانده صفر دارد:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$12^{36} - x^2 \equiv 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (12^{18} - x)(12^{18} + x) \equiv 0$$

گام دوم:

$$12^{18} \equiv (-7)^{18} = 7^{18}$$

$$7^2 \equiv 11 \xrightarrow{\times 7} 7^3 \equiv 77 \equiv 1 \Rightarrow 7^{18} \equiv 1$$

گام سوم:

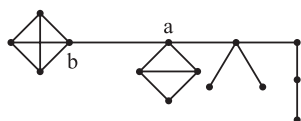
$$\begin{cases} 12^{18} - x \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 1 \Rightarrow x = 19k + 1 \xrightarrow{k=5} x = 96 \quad \checkmark \\ 12^{18} + x \equiv 0 \Rightarrow x \equiv -1 \Rightarrow x = 19k - 1 \xrightarrow{k=5} x = 94 \quad \times \end{cases}$$

از قضیه فرما داریم:

یه جور دیگه

$$12^{18} \equiv 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 12^{36} \equiv 1$$

$$\rightarrow 1 - x^2 \equiv 0 \xrightarrow{\times (-1)} x^2 - 1 \equiv 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) \equiv 0 \begin{cases} x-1 \equiv 0 \Rightarrow x = 19k + 1 \\ x+1 \equiv 0 \Rightarrow x = 19k - 1 \end{cases}$$



در گراف G با نمودار زیر، تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم برابر با کدام است؟

$$۴\gamma(G) \quad (۲)$$

$$|N_G(a) \cup N_G[b]| \quad (۱)$$

$$\Delta(G) + \gamma(G) \quad (۴)$$

$$\frac{q(\bar{G}) - 1}{3} \quad (۳)$$

مشاوره از گراف، یک سؤال در کنکور می‌آید. در سال‌های ۱۴۰۲ و ۱۴۰۳ این سؤال از درس اول و در سال ۱۴۰۴ ترکیبی از دو درس آمده است. به نظر می‌رسد امسال هم یک سؤال ترکیبی از احاطه‌گری و سایر موضوعات درس اول در گراف بیاید.

پاسخ: گزینه ۳

اول عدد احاطه‌گری رو به دست بیار بعد ببین اون تعداد رأس رو چه‌جوری می‌تونی برداری.

Hint

درس‌Box

تعریف مجموعه احاطه‌گر:

زیرمجموعه D از رأس‌های گراف را مجموعه احاطه‌گر می‌نامیم؛ هرگاه هر رأس از گراف که در D نباشد، حداقل به یکی از عضوهای D وصل باشد.

تعریف مجموعه احاطه‌گر مینیمم:

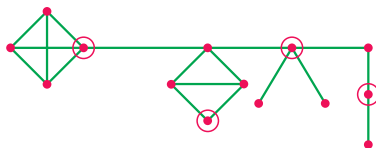
در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه (یا مجموعه‌هایی) که کم‌ترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه‌گر مینیمم می‌گوییم. تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم. به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم، یک γ -مجموعه هم می‌گوییم.

گراف مکمل:

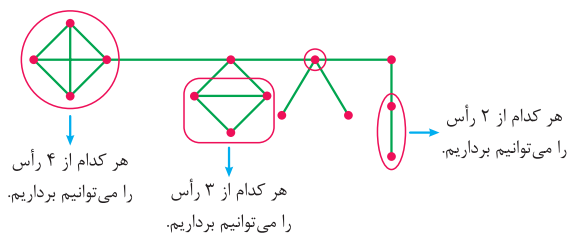
اسم	نماد	تعریف	ویژگی‌ها
گراف مکمل G	$\bar{G}$	رأس‌های $\bar{G}$ همان رأس‌های G است. یال‌های $\bar{G}$ ، یال‌هایی هستند که در G وجود ندارد.	۱) $q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2}$ ۲) $\deg_G(a) + \deg_{\bar{G}}(a) = p - 1$

نماد	اسم	توضیح	نکته
$V(G)$	مجموعه رأس‌های گراف	—	رأس‌ها را معمولاً با v_1 و v_2 ... نمایش می‌دهیم.
$E(G)$	مجموعه یال‌های گراف	—	یال‌ها را معمولاً به صورت ab نمایش می‌دهیم.
p	مرتبه گراف	تعداد رأس‌های گراف ($p > 0$)	$ V(G) = p$
q	اندازه گراف	تعداد یال‌های گراف ($q \geq 0$)	$ E(G) = q$
$\deg_G(v)$	درجه رأس v	تعداد یال‌هایی که به رأس v متصل است (در گراف G).	درجه رأس v را با نماد $d(v)$ هم نمایش می‌دهیم و $0 \leq d(v) \leq p - 1$
Δ	ماکزیمم درجه	بزرگ‌ترین درجه در بین کل درجه رأس‌ها	$\Delta \leq p - 1$
δ	مینیمم درجه	کوچک‌ترین درجه در بین کل درجه رأس‌ها	$0 \leq \delta \leq \Delta$
$N_G(a)$	همسایگی باز رأس a	مجموعه رأس‌هایی که به a متصل هستند (در گراف G).	$N_G(a)$ به تعداد $d(a)$ عضو دارد.
$N_G[a]$	همسایگی بسته رأس a	مجموعه رأس‌هایی که به a متصل هستند، به‌علاوه خود a (در گراف G).	$N_G[a]$ به تعداد $d(a) + 1$ عضو دارد.
$\bar{K}_p$	گراف تهی	گرافی که یال ندارد (همه رأس‌ها ایزوله هستند).	تعدادی نقطه (رأس)

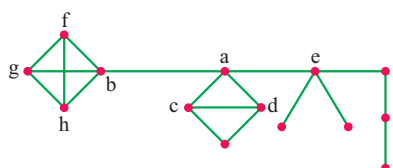
گام اول: با برداشتن کمترین تعداد رأس (مثلاً به صورت زیر) کل رأس‌ها احاطه می‌شود، پس $\gamma(G) = 4$.



گام دوم: از طرفی این ۴ رأس را به صورت‌های زیر می‌توانیم انتخاب کنیم، پس تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم برابر است با: $2 \times 3 \times 4 = 24$.



گام سوم: حاصل گزینه‌ها را به دست می‌آوریم:



بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱):

$$N_G(a) \cup N_G[b] = \{c, d, e, b\} \cup \{b, a, f, g, h\} = \{c, d, e, b, a, f, g, h\}$$

این مجموعه ۸ عضو دارد، پس برابر با این گزینه نیست.

گزینه (۲):

$$4\gamma(G) = 4 \times 4 = 16 \quad \times$$

گزینه (۳):

$$\begin{cases} p(G) = 14 \\ q(G) = 18 \end{cases} \Rightarrow \frac{18}{q(G)} + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2} = \frac{14 \times 13}{2}$$

$$\Rightarrow q(\bar{G}) = 73 \Rightarrow \frac{q(\bar{G}) - 1}{3} = 24 \quad \checkmark$$

گزینه (۴):

$$\Delta(G) + \gamma(G) = 4 + 4 = 8$$

ریاضیات

۳۹

معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 19$ چند جواب صحیح نامنفی با این شرط که حداقل سه تا از متغیرها زوج و حداقل یکی از آن‌ها فرد باشد، دارد؟

(۲) ۳۵۷۵

(۱) ۳۴۲۵

(۴) ۳۹۲۵

(۳) ۳۹۷۵

مشاوره معادله سیاله خطی، هم در نهایی و هم در کنکور خیلی مهم است و معمولاً از آن سؤال می‌آید. حتماً روی تیپ‌های مختلف آن مسلط باشید.

پاسخ: گزینه ۲

باید ۴ متغیر زوج و ۱ متغیر فرد داشته باشیم. به جای متغیر فرد $2a_i + 1$ و به جای متغیرهای زوج $2a_i$ بگذاریم.

Hint

درس‌Box

تعداد جواب‌های معادله سیاله خطی در حالت‌های مختلف:

تغییر یا روش حل	تعداد جواب‌های صحیح نامنفی	معادله
توزیع n شیء یکسان بین k نفر انتخاب n شاخه گل از بین k نوع گل	$\binom{n+k-1}{k-1}$	$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ کتاب متغیر
اگر متغیری شرط بزرگ‌تر یا مساوی (حداقلی) داشته باشد، آن را از n کم می‌کنیم.	$\binom{n+k-1-a}{k-1}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \\ x_i \geq a \end{cases}$
جواب‌های طبیعی معادله	$\binom{n-1}{k-1}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \\ x_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$
کل جواب‌ها را از جواب‌های با شرط $x_1 \geq a+1$ کم می‌کنیم.	$\binom{n+k-1}{k-1} - \binom{n-(a+1)+k-1}{k-1}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \\ x_1 \leq a \end{cases}$
متغیر نامنفی x_{k+1} را اضافه کرده تا نامعادله تبدیل به معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = n$ گردد.	$\binom{n+k}{k}$	$x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$
متغیر دارای ضریب، توان، رادیکال و... را حالت بندی می‌کنیم.	—	$ax_1 + \dots + x_k = n$ $x_1^n + \dots + x_k = n$ $\sqrt{x_1} + \dots + x_k = n$

گام اول: اگر قرار باشد سه تا از متغیرها زوج و دوتا فرد باشد، مجموع متغیرها فرد نمی‌شود، پس تنها حالت ممکن این است که دقیقاً ۴ تا از متغیرها زوج و یکی فرد باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: به $\binom{5}{1} = 5$ روش می‌توانیم یکی از متغیرها را انتخاب کنیم تا فرد باشد. فرض کنیم x_1 چنین متغیری است. قرار می‌دهیم $x_1 = 2a_1 + 1$ که $a_1 \geq 0$.

گام سوم: متغیرهای دیگر زوج هستند، پس قرار می‌دهیم:

$$x_i = 2a_i, \quad (a_i \geq 0, i = 2, \dots, 5)$$

گام چهارم: معادله سیاله به صورت زیر می‌شود:

$$(2a_1 + 1) + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 = 19 \Rightarrow 2(a_1 + a_2 + \dots + a_5) = 18$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_5 = 9, \quad (a_i \geq 0, i = 1, \dots, 5)$$



گام پنجم: تعداد جواب‌های صحیح نامنفی این معادله برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{9+5-1}{5-1} = \binom{13}{4} = 715$$

گام ششم: در نهایت، تعداد کل جواب‌های این معادله برابر است با:

$$5 \times 715 = 3575$$



ریاضیات

۴۰. از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 24\}$ ، حداقل چند عدد انتخاب کنیم تا مطمئن شویم که دست کم دو عدد هست که ضربشان برابر ۲۴ است؟

۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)

مشاوره: از اصل لانه کبوتری معمولاً یک سؤال در کنکور می‌آید. با توجه به این که این موضوع محاسبات خاصی ندارد در صورتی که مقداری روی تیپ‌های مهم کار کنید، تست آن در کم‌تر از ۳۰ ثانیه قابل حل است.

پاسخ: گزینه ۳

اعداد را تا حد امکان دوتا دوتا طوری دسته‌بندی کن که ضرب اون‌ها ۲۴ بشه.

روش جفت‌سازی در حل مسئله‌های اصل لانه کبوتری: برای به دست آوردن حداقل انتخاب برای این که دو عدد با ویژگی مورد نظر (مثلاً جمع خاص) حتماً در بین اعداد وجود داشته باشد، اعداد را دوتا دوتا طوری دسته‌بندی می‌کنیم که همان ویژگی را داشته باشند؛ البته ممکن است برخی اعداد جفتی نداشته باشند و تک‌عضوی باقی بمانند که هر کدام از آن‌ها را یک دسته در نظر می‌گیریم. اگر یکی بیشتر از تعداد دسته‌ها (لانه‌ها) برداریم، مطمئن هستیم که دو عدد با همان ویژگی در بین اعداد انتخابی وجود دارد.

گام اول: اعداد را دوتا دوتا طوری دسته‌بندی می‌کنیم که حاصل ضرب اعداد هر دسته برابر ۲۴ شود. البته ممکن است برخی از اعداد جفتی نداشته باشند:

۱، ۲۴ ، ۳، ۸ ، ۴، ۶ ، ۲، ۱۱

گام دوم: ۵ لانه داریم، اگر یکی بیشتر از تعداد لانه‌ها (یعنی ۶ تا) برداریم مطمئن هستیم که از یکی از لانه‌ها دو عدد برداشته شده است که حاصل ضرب همین دو عدد برابر ۲۴ است.

با انتخاب ۴ عدد ۱، ۲، ۳ و ۴ ضرب هیچ دو عددی برابر ۲۴ نمی‌شود، پس گزینه (۱) غلط است.

با انتخاب ۵ عدد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۱۱ هم همین‌طور، پس از همان اول گزینه (۲) یا (۴) درست است.

درست است که ۲ و ۱۱ تک باقی می‌مانند، ولی در محاسبه تعداد لانه‌ها حتماً باید آن‌ها را نیز شمارش کنیم.

Hint

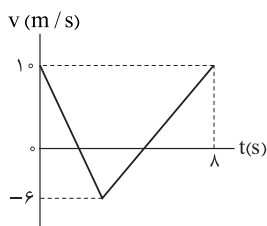
درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی

تیزبازی

گول نخوری

نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. در بازه ای که متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می کند، اندازه جابه جایی آن چند متر است؟



(۱) ۶

(۲) ۹

(۳) ۱۲

(۴) ۱۸

مشاوره: در تست های حرکت شناسی که با نمودار مطرح می شوند، باید تسلط لازم بر یک سری مفاهیم ریاضی مانند رابطه تالس، معادلات خط و سهمی، شیب خط مماس و ... را داشته باشید. اگر می خواهید در این نوع تست ها با مشکلی روبرو نشوید، باید پایه ریاضی خود را در این گونه موارد تقویت کنید.

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا نسبت تشابه بین مثلث ها را تعیین کنید. سپس بازه زمانی ای را پیدا کنید که در آن، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می کند. در پایان، مساحت قسمتی از نمودار را که زیر محور t قرار دارد، پیدا کنید.

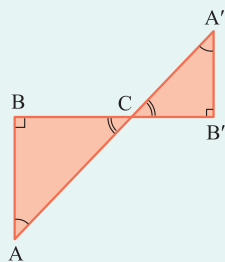
(۱) مساحت سطح محدود بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان در هر بازه زمانی، برابر جابه جایی (تغییر مکان) در آن بازه است ($S = \Delta x$). مساحت سطحی را که بالای محور t است با علامت مثبت و مساحت سطحی را که پایین محور t است با علامت منفی در نظر می گیریم.

(۲) وقتی $v > 0$ است، یعنی متحرک در جهت محور x حرکت می کند، اما هنگامی که $v < 0$ است، یعنی متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می کند.

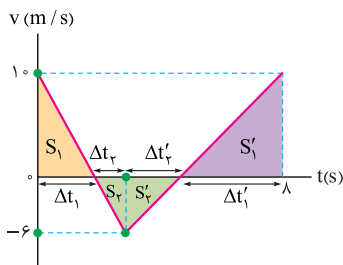
(۳) یادآوری رابطه تالس در مثلث ها!

برای دو مثلث متشابه $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ می توان نوشت:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C}{BC}$$



گام اول: در نمودار زیر، مثلث های S_1 و S_2 با هم متشابه اند، مثلث های S'_1 و S'_2 نیز با هم متشابه اند:



$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{5}{3} \Delta t_2$$

$$\frac{\Delta t'_1}{\Delta t'_2} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \Rightarrow \Delta t'_1 = \frac{5}{3} \Delta t'_2$$

گام دوم: در بازه زمانی $(\Delta t_2 + \Delta t'_2)$ که نمودار سرعت - زمان، در زیر محور t قرار دارد، سرعت متحرک منفی است و در خلاف جهت محور x حرکت می کند. این بازه زمانی را به دست می آوریم:

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t'_1 + \Delta t'_2 = 8 \xrightarrow{\frac{\Delta t_1 = \frac{5}{3} \Delta t_2}{\Delta t'_1 = \frac{5}{3} \Delta t'_2}} \frac{5}{3} \Delta t_2 + \Delta t_2 + \frac{5}{3} \Delta t'_2 + \Delta t'_2 = 8 \Rightarrow \frac{8}{3} (\Delta t_2 + \Delta t'_2) = 8$$

$$\Rightarrow \Delta t_2 + \Delta t'_2 = 3 \text{ s}$$

گام سوم: مساحت قسمتی از نمودار که زیر محور t قرار دارد، همان جابه جایی متحرک در بازه ای است که در خلاف جهت محور x حرکت می کند. اندازه این جابه جایی را پیدا می کنیم:

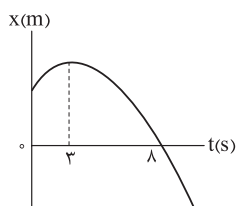
$$|S_2 + S'_2| = \left| \frac{(\Delta t_2 + \Delta t'_2)(-6)}{2} \right| = \left| \frac{3(-6)}{2} \right| = 9 \text{ m}$$

Hint

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی

نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر تندی متوسط متحرک در ۸ ثانیه اول برابر با $۵/۸ \text{ m/s}$ باشد، اندازه سرعت متوسط متحرک در ۳ ثانیه اول، برابر چند متر بر ثانیه است؟



(۱) ۳

(۲) ۶

(۳) ۹

(۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۲

Hint

ابتدا به کمک رابطه تندی متوسط، مسافت طی شده در مدت ۸ s را به دست آورید؛ سپس معادله حرکت با شتاب ثابت روی محور x را یک بار در ۳ ثانیه اول حرکت و بار دیگر در بازه زمانی ۳ s تا ۸ s بنویسید و با ترکیب روابط به دست آمده، جابه جایی و اندازه سرعت متوسط در ۳ ثانیه اول را پیدا کنید.

درس Box

(۱) رابطه تندی متوسط:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$$

 s_{av} : تندی متوسط (m/s) ℓ : مسافت (m) $\Delta t = t_p - t_i$: مدت زمان (s)(۲) رابطه سرعت متوسط در حرکت روی محور x :

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

 v_{av} : سرعت متوسط (m/s) $\Delta x = x_p - x_i$: جابه جایی (m) $\Delta t = t_p - t_i$: مدت زمان (s)

(۳) مقایسه مسافت و جابه جایی: مسافت، طول مسیر پیموده شده توسط متحرک است و یک کمیت نرده ای محسوب می شود، اما جابه جایی، برداری است که مکان شروع حرکت را به مکان پایانی آن وصل می کند.

توجه تنها در صورتی که حرکت بدون تغییر جهت باشد، اندازه جابه جایی با مسافت برابر می شود.

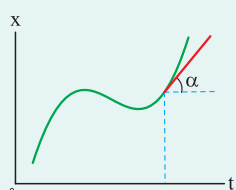
(۴) معادله جابه جایی - زمان در حرکت با شتاب ثابت:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

معادله جابه جایی - زمان بر حسب سرعت اولیه:

$$\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + vt$$

معادله جابه جایی - زمان بر حسب سرعت پایانی:

 $\Delta x = x - x_0$: جابه جایی (m) x : مکان متحرک در لحظه t (m) a : شتاب حرکت (m/s^2) t : زمان (s) v_0 : سرعت اولیه (m/s) x_0 : مکان اولیه (m) v : سرعت متحرک در لحظه t (m/s)(۵) سرعت در هر لحظه دلخواه t برابر با شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در آن لحظه است.شیب خط مماس = v

فیزیک

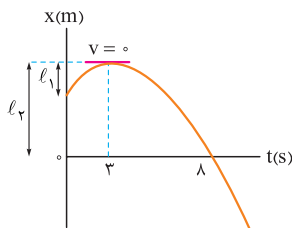
پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: به کمک رابطه تندی متوسط، جابه‌جایی متحرک در مدت ۸ s را به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \quad \frac{s_{av} = \lambda / \Delta t \text{ m/s}}{\Delta t = 8 - 0 = 8 \text{ s}} \rightarrow \lambda / 8 = \frac{\ell}{8} \Rightarrow \ell = 64 \text{ m}$$

گام دوم: مسافتی را که متحرک در ۳ ثانیه اول حرکت می‌پیماید، با ℓ_1 و مسافتی را که در بازه زمانی ۳ s تا ۸ s می‌پیماید، با ℓ_2 نشان می‌دهیم؛ بنابراین با استفاده از معادله جابه‌جایی در حرکت شتاب ثابت روی محور X می‌توان نوشت:

(الف) در بازه زمانی ۰ تا ۳ s:



$$\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + vt$$

$$\Rightarrow \ell_1 = -\frac{1}{2}a(3)^2 + 0 \quad (1)$$

(ب) در بازه زمانی ۳ s تا ۸ s:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

$$\Rightarrow -\ell_2 = \frac{1}{2}a(8-3)^2 + 0 \quad (2)$$

گام سوم: روابط (۱) و (۲) را که در گام دوم به دست آمده، بر هم تقسیم می‌کنیم تا رابطه بین ℓ_2 و ℓ_1 به دست آید:

$$\frac{\ell_1}{-\ell_2} = \frac{-\frac{1}{2}a(3)^2}{\frac{1}{2}a(5)^2} \Rightarrow \frac{\ell_1}{-\ell_2} = \frac{9}{25} \Rightarrow \ell_2 = \frac{25}{9}\ell_1$$

با توجه به این که $\ell = \ell_1 + \ell_2 = 64 \text{ m}$ است، می‌توانیم ℓ_1 را پیدا کنیم:

$$\ell_1 + \ell_2 = 64 \text{ m} \xrightarrow{\ell_2 = \frac{25}{9}\ell_1} \ell_1 + \frac{25}{9}\ell_1 = 64 \Rightarrow \frac{34}{9}\ell_1 = 64 \Rightarrow \ell_1 = 18 \text{ m}$$

گام چهارم: در ۳ ثانیه اول حرکت، جابه‌جایی و مسافت متحرک با هم برابرند. اندازه سرعت متوسط متحرک در این بازه زمانی را حساب می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \frac{\Delta x = \ell_1 = 18 \text{ m}}{\Delta t = 3 - 0 = 3 \text{ s}} \rightarrow v_{av} = \frac{18}{3} = 6 \text{ m/s}$$

خودرویی پشت چراغ قرمز ایستاده است. با سبز شدن چراغ، خودرو با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظه، کامیونی با سرعت ثابت از آن سبقت می‌گیرد و در فاصله ۴۰۰ متری چراغ راهنمایی، خودرو به کامیون می‌رسد. در لحظه‌ای که تندی خودرو با تندی کامیون برابر می‌شود، فاصله آن‌ها از هم چند متر است؟

(۲) ۱۰۰

(۱) ۵۰

(۴) ۳۰۰

(۳) ۲۰۰

مشاوره این تست، برگرفته از یکی از پرسش‌های دوره‌ای آخر فصل ۱ کتاب درسی فیزیک ۳ است. تمرین‌ها و پرسش‌های کتاب درسی را جدی بگیرید.

پاسخ: گزینه ۲

کوتاه Box

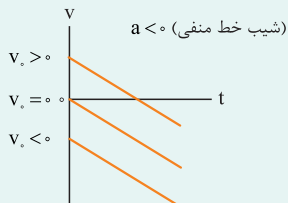
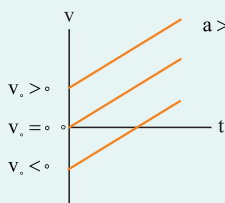
● نمودار سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت:

(۱) با توجه به این که معادله سرعت - زمان در این نوع حرکت، از درجه اول می‌باشد، نمودار آن به صورت یک خط شیب‌دار است و شیب آن شتاب متحرک را نشان می‌دهد.

(۲) نقطه شروع این نمودار روی محور v ، سرعت اولیه (v_0) را نشان می‌دهد.

(۳) مساحت سطح بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان، در هر بازه زمانی برابر جابه‌جایی متحرک در آن بازه است. (مساحت بخشی از سطح را که زیر محور زمان است، منفی در نظر می‌گیریم، زیرا سرعت و جابه‌جایی در این بخش، منفی هستند).

(۴) قدرمطلق مساحت سطح بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان، مسافت پیموده‌شده در بازه زمانی مورد نظر را نشان می‌دهد.



● نمودار سرعت - زمان در حرکت با سرعت ثابت:

(۱) این نمودار به صورت یک خط افقی موازی محور زمان است.

(۲) مساحت سطح محدود بین این نمودار و محور زمان در هر بازه زمانی، برابر با جابه‌جایی یا تغییر مکان در آن بازه است.

رسم نمودار سرعت - زمان در اغلب سؤالات حرکت‌شناسی، به ساده‌تر شدن تحلیل سؤال می‌انجامد؛ به ویژه در مسائلی که جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط هر یک از متحرک‌ها بررسی می‌شوند.

● معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت روی محور x :

$$x = vt + x_0$$

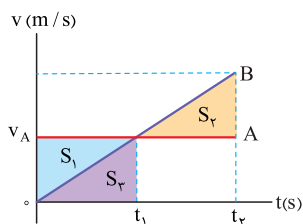
x : مکان متحرک (m)

x_0 : مکان اولیه متحرک (m)

v : سرعت (m/s)

t : زمان (s)

گام اول: نمودار سرعت - زمان دو متحرک را رسم می‌کنیم. توجه داشته باشید که حرکت کامیون A با سرعت ثابت و حرکت خودروی B با شتاب ثابت است.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

t_1 ، لحظه یکسان شدن سرعت‌های دو متحرک و t_2 ، لحظه یکسان شدن مکان‌های دو متحرک هستند.

با توجه به یکسان بودن مساحت زیر نمودارهای دو متحرک A و B در لحظه t_2 ، معلوم می‌شود که دو مثلث S_1 و S_2 هم‌نهشت هستند و داریم:

$$t_2 - t_1 = t_1 - 0 \Rightarrow t_2 = 2t_1$$

گام دوم: معادله مکان متحرک A را در لحظه t_2 می‌نویسیم:

$$x_A = v_A t_2 + x_{0A} \xrightarrow[t_2=2t_1]{x_A=400\text{ m}, x_{0A}=0} 400 = v_A (2t_1) \Rightarrow v_A t_1 = 200\text{ m}$$

گام سوم: مثلث S_2 نیز با مثلث‌های S_1 و S_2 هم‌نهشت است، یعنی مساحت‌های آن‌ها با هم برابرند. در لحظه t_1 که تندی دو متحرک A و B برابر می‌شود، فاصله آن‌ها از یکدیگر به اندازه اختلاف سطح زیر نمودار سرعت - زمان آن‌ها تا لحظه t_1 است.

$$x_A - x_B = (S_1 + S_2) - S_2 = S_1 \Rightarrow x_A - x_B = \frac{1}{2} v_A t_1 \xrightarrow[v_A t_1=200\text{ m}]{} x_A - x_B = 100\text{ m}$$

خودرویی پشت چراغ قرمز ایستاده است. با سبزشدن چراغ، خودرو با شتاب 2 m/s^2 شروع به حرکت می‌کند. در همین

لحظه، کامیونی با سرعت ثابت 36 km/h از آن سبقت می‌گیرد.

الف) در چه لحظه و در چه مکانی خودرو به کامیون می‌رسد؟

ب) نمودار مکان - زمان را برای خودرو و کامیون در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

پ) نمودار سرعت - زمان را برای خودرو و کامیون در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

(فیزیک (۳) - پرسش ۲۱ صفحه ۲۸ کتاب درسی)

گلوله‌ای در شرایط خلأ از ارتفاع ۸۰ متری سطح زمین رها می‌شود. این گلوله بعد از رسیدن به سطح زمین، 4 s طول می‌کشد تا سرعتش به صفر برسد. بزرگی شتاب متوسط گلوله در این 4 s چند متر بر مربع ثانیه است؟
($g = 10 \text{ m/s}^2$)

(۲) ۱۰

(۱) ۵

(۴) ۱۰۰

(۳) ۵۰

پاسخ: گزینه ۴

Hint

رابطه مستقل از زمان (معادله سرعت - جابه‌جایی) را برای این گلوله بنویسید و سرعت آن را در لحظه رسیدن به سطح زمین به دست آورید؛ سپس به کمک رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ، خواسته سؤال را پیدا کنید.

درس Box

(۱) اگر جهت مثبت محور y را رو به پایین در نظر بگیریم، معادله سرعت - جابه‌جایی (رابطه مستقل از زمان) در حرکت سقوط آزاد، به صورت زیر است:

$$v^2 - v_0^2 = 2gh$$

v : سرعت متحرک پس از پیمودن مسافت h (m/s)

v_0 : سرعت اولیه متحرک (m/s)

g : شتاب گرانش در سطح زمین (m/s^2)

h : ارتفاع سقوط (m)

(۲) شتاب متوسط: در هر بازه زمانی دلخواه، نسبت تغییر سرعت به بازه زمانی را شتاب متوسط می‌گوییم.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

a_{av} : شتاب متوسط (m/s^2)

v_1 : سرعت متحرک در لحظه t_1 (m/s)

v_2 : سرعت متحرک در لحظه t_2 (m/s)

اگر شتاب متوسط مثبت باشد، یعنی در جهت محور است و اگر منفی باشد، یعنی در خلاف جهت محور است.

گام اول: سرعت گلوله، هنگام رسیدن به سطح زمین را به دست می‌آوریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2gh \xrightarrow[v_0=0, g=10 \text{ m/s}^2]{h=80 \text{ m}} v^2 = 2 \times 10 \times 80 = 1600 \Rightarrow v = 40 \text{ m/s}$$

گام دوم: به کمک رابطه شتاب متوسط، بزرگی شتاب متوسط گلوله را حساب می‌کنیم:

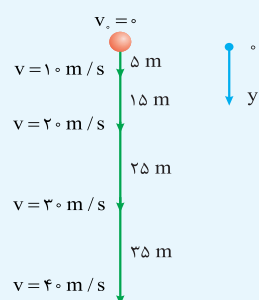
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=4 \text{ s}]{\Delta v=0-40=-40 \text{ m/s}} a_{av} = \frac{-40}{4} = -10 \text{ m/s}^2 \Rightarrow |a_{av}| = 10 \text{ m/s}^2$$

توجه کنید که این شتاب به‌دست‌آمده، مربوط به لحظه برخورد گلوله به زمین تا لحظه توقف کامل آن است و با شتاب سقوط آزاد فرق دارد.

په‌چور دیگه

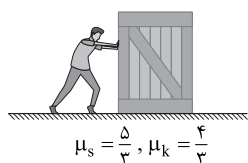
می‌دانیم وقتی جسمی سقوط آزاد انجام می‌دهد، جابه‌جایی آن در ثانیه‌های متوالی، یک دنباله عددی تشکیل می‌دهند که قدرنسبت آن $g = 10 \text{ m/s}^2$ است.

سرعت آن نیز در هر ثانیه، 10 m/s افزایش می‌یابد؛ بنابراین زمان سقوط 4 s بوده و سرعت گلوله هنگام رسیدن به سطح زمین، 40 m/s است. بقیه حل سؤال، مشابه گام دوم در پاسخ خیلی تشریحی است.



در شکل زیر، شخصی به یک جعبه ساکن به جرم 30 kg ، در حالت اول نیروی افقی 225 نیوتونی و در حالت دوم نیروی افقی 525 نیوتونی وارد می‌کند. نیرویی که سطح افقی به جعبه وارد می‌کند، در حالت دوم چند برابر حالت اول است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

مشاوره نیروی سطح بر جسم (R) را با نیروی عمودی سطح (F_N) اشتباه نگیرید. در کنکورهای سال‌های اخیر، محاسبه نیروی R، بارها مطرح شده است.



$$\frac{4}{3} \quad (2)$$

$$\frac{5}{\sqrt{34}} \quad (4)$$

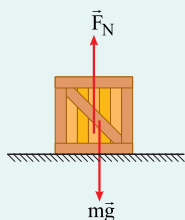
$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{34}}{5} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

درس‌Box

نیروی عمودی سطح (F_N): نیرویی است که از طرف سطح تکیه‌گاه و عمود بر آن، بر جسمی که با سطح در تماس است، وارد می‌شود. اگر جسم در راستای عمود بر سطح، شتابی نداشته باشد در این راستا $\vec{F}_{\text{net}} = 0$ بوده و از این رابطه $\vec{F}_N$ به دست می‌آید. مثلاً در شکل مقابل داریم:



$$F_N - mg = 0 \Rightarrow F_N = mg$$

نیروی اصطکاک ایستایی یا در حال سکون (f_s):

وقتی نیرویی بخواهد جسمی را روی سطحی به حرکت درآورد، ولی قادر به تکان دادن آن نباشد، معلوم می‌شود نیروی دیگری هم اندازه آن و در جهت مخالف، بر جسم اثر می‌کند که مانع حرکت می‌شود. این نیروی مخالف، همان $\vec{f}_s$ است و مقدارهای متفاوتی بین صفر تا یک مقدار بیشینه دارد.

نیروی $\vec{f}_s$ را می‌توان با توجه به توازن نیروها و قانون دوم نیوتون تعیین کرد. مثلاً در شکل‌های زیر که جسم ساکن است، داریم:



$$f_s = 0$$



$$f_s = F_l$$



$$f_s = F_r$$

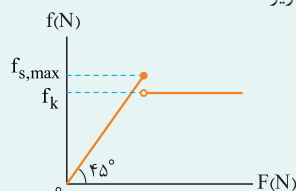
بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی که جسم برای شروع حرکت با آن روبه‌رو می‌شود، نیروی اصطکاک در آستانه حرکت ($f_{s,\text{max}}$) نامیده می‌شود و در واقع به اندازه کم‌ترین نیروی محرکی است که می‌تواند حرکت جسم را آغاز کند:

$$f_{s,\text{max}} = \mu_s F_N$$

μ_s : ضریب اصطکاک ایستایی

F_N : اندازه نیروی عمودی سطح (N)

نمودار اندازه نیروی اصطکاک وارد بر یک جسم برحسب اندازه نیروی محرک (F) به صورت زیر است:



نیروی اصطکاک جنبشی (لغزشی) (f_k):

نیروی اصطکاکی است که هنگام لغزش جسم، موازی با سطح و در خلاف جهت لغزش بر جسم اثر می‌کند.

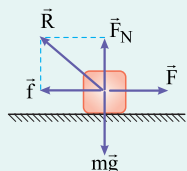
$$f_k = \mu_k F_N$$

μ_k : ضریب اصطکاک جنبشی

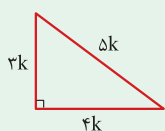
F_N : اندازه نیروی عمودی سطح (N)

نیروی سطح:

از طرف سطح تماس، دو نیروی $\vec{F}_N$ (نیروی عمودی سطح) و $\vec{f}$ (نیروی اصطکاک) بر جسم اثر می‌کنند. این دو نیرو بر هم عمود بوده و برابند آن‌ها، نیروی سطح بر جسم نام دارد که آن را با $\vec{R}$ نشان می‌دهیم:



$$R = \sqrt{F_N^2 + f^2}$$



$$(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$$

در مثلث قائم‌الزاویه شکل مقابل داریم:

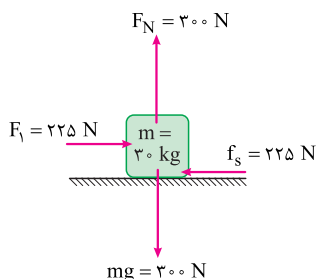


گام اول: نیروی اصطکاک ایستایی در آستانه حرکت را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$f_{s,max} = \mu_s \times F_N \xrightarrow{F_N=mg} f_{s,max} = \mu_s \times mg = \frac{4}{3} \times 30 \times 10 = 400 \text{ N}$$

از آن‌جا که $F_1 = 225 \text{ N}$ است، بنابراین در حالت اول جسم حرکت نمی‌کند، زیرا $F_1 < f_{s,max}$ است. در این حالت، داریم:

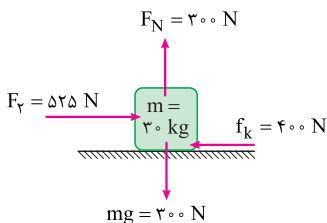


$$f_s = F_1 = 225 \text{ N}$$

گام دوم: نیرویی را که سطح افقی بر جعبه وارد می‌کند، در حالت اول پیدا می‌کنیم:

$$R_1 = \sqrt{F_N^2 + f_s^2} = \sqrt{300^2 + 225^2} = \sqrt{(4 \times 75)^2 + (3 \times 75)^2} = 5 \times 75 = 375 \text{ N}$$

گام سوم: نیروی محرک وارد بر جسم در حالت دوم از $f_{s,max}$ بیشتر است و جسم شروع به حرکت می‌کند. در این حالت نیروی اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح را به دست می‌آوریم:



$$f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg = \frac{4}{3} \times 30 \times 10 = 400 \text{ N}$$

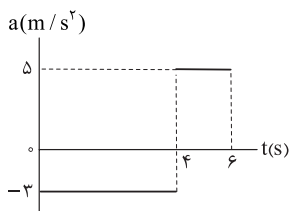
گام چهارم: نیرویی را که سطح افقی بر جعبه وارد می‌کند، در حالت دوم پیدا می‌کنیم:

$$R_2 = \sqrt{F_N^2 + f_k^2} = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500 \text{ N}$$

گام پنجم: نسبت $\frac{R_2}{R_1}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{500}{375} = \frac{4}{3}$$

۴۶ نمودار شتاب - زمان جسمی به جرم 3 kg که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در بازه زمانی $t_1 = 1 \text{ s}$ تا $t_2 = 6 \text{ s}$ بر حسب نیوتون کدام است؟



- (۱) $\vec{i}$
 (۲) $-\vec{i}$
 (۳) $0/6 \vec{i}$
 (۴) $-0/6 \vec{i}$

پاسخ: گزینه ۳

به کمک مساحت سطح محدود بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان، تغییرات سرعت متحرک را در بازه زمانی t_1 تا t_2 به دست آورید؛ سپس با استفاده از قانون دوم نیوتون، نیروی خواسته شده را محاسبه کنید.

Hint

درس Box

نمودار شتاب - زمان در حرکت با شتاب ثابت:

- (۱) این نمودار به صورت یک خط افقی موازی محور زمان است.
- (۲) مساحت سطح محدود بین این نمودار و محور زمان، در هر بازه زمانی برابر با تغییر سرعت (Δv) در آن بازه است $(S = \Delta v)$ ، مساحت سطحی را که زیر محور زمان است، منفی در نظر می‌گیریم.
- (۳) اگر نمودار شتاب - زمان، شامل دو یا چند قسمت باشد که هر کدام شتاب ثابت خود را دارند، می‌توان نوشت:
 $\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \dots$

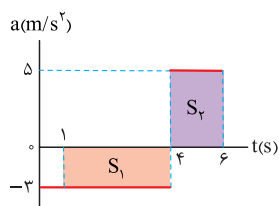
قانون دوم نیوتون:

اگر به جسمی نیروی خالص وارد شود، شتابی هم‌جهت با نیروی خالص می‌گیرد. اندازه این شتاب با نیروی خالص وارد بر جسم، رابطه مستقیم و با جرم جسم نسبت وارون دارد. رابطه قانون دوم نیوتون به صورت زیر است:

$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

اگر نیرو ثابت نباشد، از نیروی خالص متوسط $(\vec{F}_{\text{av}})$ استفاده می‌کنیم.

گام اول: با استفاده از نمودار $a-t$ ، تغییرات سرعت متحرک را در بازه زمانی $t_1 = 1 \text{ s}$ تا $t_2 = 6 \text{ s}$ به دست می‌آوریم:



$$\Delta v_1 = S_1 = (4-1)(-3) = -9 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_2 = S_2 = (6-4)(5) = 10 \text{ m/s}$$

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = -9 + 10 = 1 \text{ m/s} \Rightarrow \Delta \vec{v} = (1 \text{ m/s}) \vec{i}$$

گام دوم: با استفاده از قانون دوم نیوتون، نیروی خالص متوسط وارد بر جسم را حساب می‌کنیم:

$$\vec{F}_{\text{av}} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = 3 \times \frac{1 \vec{i}}{6-1} = (0/6 \text{ N}) \vec{i}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۴۷ اندازه شتاب گرانش در فاصله ۲۶۰۰ کیلومتری سطح زمین، چند برابر اندازه شتاب گرانش در فاصله ۵۶۰۰ کیلومتری سطح زمین است؟ (شعاع کره زمین ۶۴۰۰ km است.)

$$\frac{16}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{9}{16} \quad (۳)$$

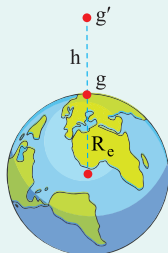
$$\frac{4}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

شتاب گرانش در اطراف کره زمین، با مربع فاصله از مرکز زمین، نسبت وارون دارد.



$$\frac{g'}{g} = \left(\frac{R_e}{R_e + h} \right)^2$$

g : شتاب گرانش در سطح زمین (m/s^2)

g' : شتاب گرانش در ارتفاع h از سطح زمین (m/s^2)

R_e : شعاع کره زمین (m)

h : ارتفاع از سطح زمین (m)

شتاب گرانش در فاصله ۲۶۰۰ کیلومتری از سطح زمین را با g_1 و در فاصله ۵۶۰۰ کیلومتری از سطح زمین را با g_2 نشان می‌دهیم. بر این اساس می‌توان نوشت:

$$\frac{g_1}{g_2} = \left(\frac{R_e + h_2}{R_e + h_1} \right)^2 \xrightarrow[h_1=2600 \text{ km}, h_2=5600 \text{ km}]{R_e=6400 \text{ km}} \frac{g_1}{g_2} = \left(\frac{6400+5600}{6400+2600} \right)^2 \Rightarrow \frac{g_1}{g_2} = \left(\frac{12000}{9000} \right)^2 = \left(\frac{4}{3} \right)^2 = \frac{16}{9}$$

چون در حالت اول به زمین نزدیک‌تر هستیم، شتاب گرانش نسبت به حالت دوم بیشتر است ($g_1 > g_2$)؛ بنابراین بدون محاسبه، از همان ابتدا می‌توان گزینه‌های (۱) و (۳) را حذف نمود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

تیزبازی

یک پروتون و یک ذره α با تندی یکسان به ناحیه‌ای از یک میدان مغناطیسی به طور عمود بر میدان یکنواخت وارد می‌شوند و در مسیر دایره‌ای که بر میدان مغناطیسی عمود است، حرکت می‌کنند. کدام موارد درباره حرکت این دو ذره درست است؟

- (الف) شتاب مرکزگرای پروتون، بزرگ‌تر از شتاب مرکزگرای ذره α است.
 (ب) شتاب مرکزگرای پروتون، کوچک‌تر از شتاب مرکزگرای ذره α است.
 (پ) شعاع مسیر پروتون، بزرگ‌تر از شعاع مسیر ذره α است.
 (ت) شعاع مسیر پروتون، کوچک‌تر از شعاع مسیر ذره α است.

(۲) الف - ت

(۱) الف - پ

(۴) ب - ت

(۳) ب - پ

پاسخ: گزینه ۲

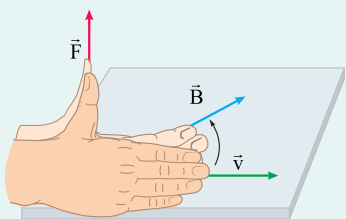
درس: Box

(۱) نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار متحرک در میدان مغناطیسی:

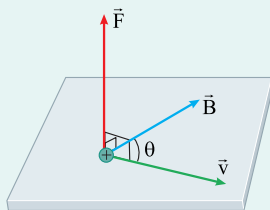
اگر ذره باردار q با سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ حرکت کند (به شرط آن که جهت حرکت آن با میدان مغناطیسی موازی نباشد)، بر آن نیرویی وارد خواهد شد که بر راستای سرعت و میدان مغناطیسی عمود است.

(۲) قاعده دست راست برای تعیین جهت نیروی وارد بر ذره باردار متحرک در میدان مغناطیسی:

اگر دست راست خود را طوری نگه داریم که انگشتان باز شده ما در جهت $\vec{v}$ باشد - به گونه‌ای که وقتی آن‌ها روی زاویه کوچک‌تری که $\vec{B}$ با $\vec{v}$ می‌سازد، در جهت چرخش طبیعی انگشتان خم کنیم، در جهت $\vec{B}$ قرار گیرد - انگشت شست ما در جهت نیروی وارد بر ذره باردار مثبت خواهد بود. توجه کنید که نیروی وارد بر بار منفی، در خلاف جهت نیروی وارد بر بار مثبت است؛ به عبارت دیگر، طی همین مراحل، ولی با دست چپ تعیین می‌گردد.



جهت این نیرو به کمک قاعده دست راست تعیین می‌شود.



نیروی $\vec{F}$ بر هر دو بردار $\vec{v}$ و $\vec{B}$ عمود است.

(۳) $\odot$ نماد بردار عمود بر صفحه به طرف بیرون (برون سو) است.

$\otimes$ نماد بردار عمود بر صفحه به طرف درون (درون سو) است.

اندازه این نیرو از رابطه $F = |q| v B \sin \theta$ به دست می‌آید.

F : اندازه نیرو (N)

$|q|$: بزرگی بار الکتریکی (C)

v : تندی (اندازه سرعت) بار الکتریکی (m/s)

B : اندازه میدان مغناطیسی (T)

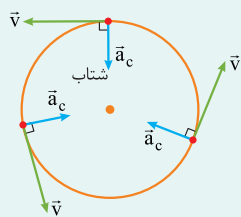
θ : زاویه بین بردارهای سرعت و میدان مغناطیسی

این نیرو بر راستای سرعت و راستای میدان عمود است $\vec{F} \perp \vec{B}$ و $\vec{F} \perp \vec{v}$.

اگر $\theta = 0^\circ$ یا $\theta = 180^\circ$ باشد، $F = 0$ خواهد بود، اما اگر $\theta = 90^\circ$ باشد، F بیشینه است.

شتاب مرکزگرا ($\vec{a}_c$):

در حرکت دایره‌ای یکنواخت، با آن که اندازه سرعت (تندی) ثابت است، اما جهت آن که همواره بر مسیر حرکت دایره‌ای مماس است، تغییر می‌کند و حرکتی شتاب‌دار محسوب می‌شود.



$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

a_c : اندازه شتاب مرکزگرا (m/s^2)

v : تندی ذره (m/s)

r : شعاع مسیر (m)

نیروی مرکزگرا:

در حرکت دایره‌ای یکنواخت، یک نیروی خالص رو به مرکز، سبب ایجاد شتاب مرکزگرا می‌شود. به این نیروی خالص که منجر به حرکت دایره‌ای می‌شود، نیروی مرکزگرا می‌گوییم.

نیروی مرکزگرا به شکل‌های مختلف می‌تواند تأمین شود، مانند نیروهای کشش نخ، گرانشی، الکتریکی و ...

با توجه به قانون دوم نیوتون، در حرکت دایره‌ای یکنواخت می‌توان نوشت:

$$F_{net} = m \frac{v^2}{r}$$

m : جرم جسم متحرک (kg)

F_{net} : بزرگی نیروی مرکزگرا (N)

v : تندی ذره (m/s)

r : شعاع مسیر (m)

ذره آلفا: ذره بارداری از جنس هسته اتم هلیوم است که از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده است؛ بنابراین ذره آلفا (α) دارای بار مثبت است.

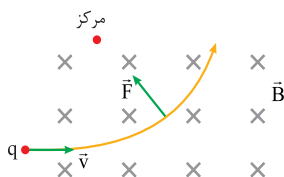
● جرم هر پروتون (m_p) با جرم هر نوترون (m_n)، تقریباً برابر است و می‌توان نوشت:

$$m_\alpha = 2m_p + 2m_n \xrightarrow{m_p=m_n} m_\alpha = 4m_p$$

گام اول: پروتون و ذره آلفا، هر دو دارای بار مثبت هستند. هر بار مثبت q ، مطابق شکل زیر، در یک میدان مغناطیسی یکنواخت درون سو، منحرف می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در این جا، نیروی مرکزگرای وارد بر ذره، همان نیروی مغناطیسی است که بر آن اثر می‌کند و می‌توان نوشت:



$$F_{net} = F_B \Rightarrow m \frac{v^2}{r} = |q| v B \sin \theta$$

توجه کنید که اگر میدان مغناطیسی یکنواخت را برون سو فرض می‌کردیم، در جواب نهایی این تست تغییری ایجاد نمی‌شد.

گام دوم: با توجه به رابطه به دست آمده در گام اول، می‌توان نوشت:

$$\frac{m_\alpha}{m_p} \times \left(\frac{v_\alpha}{v_p}\right)^2 \times \frac{r_p}{r_\alpha} = \frac{q_\alpha v_\alpha B \sin \theta_\alpha}{q_p v_p B \sin \theta_p} \xrightarrow{\substack{m_\alpha=4m_p, v_\alpha=v_p \\ q_\alpha=2q_p, \theta_\alpha=\theta_p=90^\circ}} 4 \times 1 \times \frac{r_p}{r_\alpha} = 2 \times 1 \Rightarrow \frac{r_p}{r_\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow r_p < r_\alpha$$

بنابراین مورد «ت» درست و مورد «پ» نادرست است.

گام سوم: شتاب مرکزگرای پروتون را با شتاب مرکزگرای ذره آلفا مقایسه می‌کنیم:

$$a = \frac{v^2}{r} \xrightarrow{v_\alpha=v_p} \frac{a_\alpha}{a_p} = \frac{r_p}{r_\alpha} \xrightarrow{r_p < r_\alpha} a_\alpha < a_p$$

یعنی مورد «الف» درست و مورد «ب» نادرست است.

۴۹ طول آونگ ساده‌ای ۱۴۴ cm است. طول این آونگ چند سانتی‌متر و چگونه تغییر کند تا دوره تناوب آن ۸ s / °

کاهش پیدا کند؟ ($g = \pi^2 \text{ m/s}^2$)

(۲) ۱۶، افزایش پیدا کند.

(۱) ۱۶، کاهش پیدا کند.

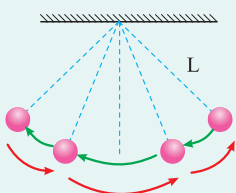
(۴) ۸۰، افزایش پیدا کند.

(۳) ۸۰، کاهش پیدا کند.

مشاوره این سؤال، مشابه یکی از تست‌های کنکور رشته ریاضی در نوبت دوم ۱۴۰۲ مطرح شده است.

پاسخ: گزینه ۳

رابطه دوره تناوب آونگ ساده:



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

T: دوره تناوب آونگ (s)

L: طول آونگ (m)

g: شتاب گرانش در محل آونگ (m/s^2)

• دوره تناوب آونگ ساده به جرم و دامنه آن بستگی ندارد.

• برای مقایسه دوره تناوب آونگ ساده در دو حالت مختلف می‌توان نوشت:

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1} \times \frac{g_1}{g_2}}$$

بنابراین دوره تناوب آونگ ساده با جذر طول آن نسبت مستقیم دارد، اما با جذر شتاب گرانش در محل، نسبت وارون دارد.

گام اول: دوره آونگ ساده را در حالت اول به دست می‌آوریم:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}} \xrightarrow{g=\pi^2 \text{ m/s}^2, L_1=144 \text{ cm}=1/44 \text{ m}} T_1 = 2\sqrt{1/44} = 2 \times 1/2 = 2/4 \text{ s}$$

با توجه به این که دوره تناوب آن ۸ s / ° کاهش پیدا می‌کند، در حالت دوم داریم:

$$T_2 = T_1 - 0/8 \xrightarrow{T_1=2/4 \text{ s}} T_2 = 2/4 - 0/8 = 1/6 \text{ s}$$

گام دوم: رابطه مقایسه‌ای دوره تناوب آونگ ساده را در دو حالت می‌نویسیم و از آن جا، طول آونگ در حالت دوم را به دست می‌آوریم:

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1} \times \frac{g_1}{g_2}} \xrightarrow{T_2=1/6 \text{ s}, g_1=g_2, T_1=2/4 \text{ s}, L_1=144 \text{ cm}} \frac{1/6}{2/4} = \sqrt{\frac{L_2}{144}} \Rightarrow \frac{2}{3} = \sqrt{\frac{L_2}{144}} \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{L_2}{144} \Rightarrow L_2 = 64 \text{ cm}$$

بنابراین تغییر طول آونگ به دست می‌آید:

$$L_2 - L_1 = 64 - 144 = -80 \text{ cm}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که طول آونگ، کاهش پیدا کرده است.

از آن جا که با کاهش طول آونگ ساده، دوره تناوب آن نیز کاهش می‌یابد، می‌توانستیم از همان ابتدا، گزینه‌های (۲) و (۴) را حذف کنیم.

تیزبازی

طول آونگ ساده‌ای را ۱۷ cm تغییر می‌دهیم، دوره آن ۵/۱۲ درصد افزایش می‌یابد. دوره آونگ (قبل از تغییر طول)

(سؤال ۵۵ کنکور ریاضی ۱۴۰۲ - نوبت دوم)

چند ثانیه است؟ ($g = \pi^2 \text{ m/s}^2$)

(۲) ۱/۴

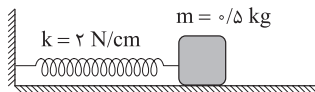
(۱) ۱/۲

(۴) ۱/۸

(۳) ۱/۶

فیزیک

۵۰ در شکل زیر، جسم متصل به فنر روی سطح افقی بدون اصطکاک در حال نوسان است. اگر مسافت طی شده توسط جسم در هر نوسان برابر ۳۰ cm باشد، بیشینه تندی جسم، چند متر بر ثانیه است؟



$$1/5 (1)$$

$$3 (2)$$

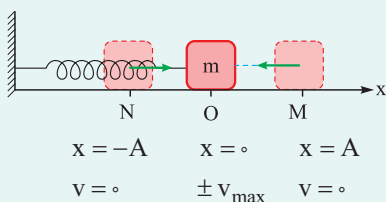
$$15 (3)$$

$$30 (4)$$

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا دامنه نوسان و بسامد زاویه‌ای آن را پیدا کنید؛ سپس به کمک رابطه $v_{\max} = A\omega$ ، بیشینه تندی نوسانگر را به دست آورید.

در یک حرکت هماهنگ ساده جرم متصل به فنر، دامنه A ، بیشترین فاصله نوسانگر از نقطه تعادل است و به دلیل صرف نظر کردن از نیروهای مقاوم مانند اصطکاک، مقداری ثابت فرض می‌شود.



x : مکان نوسانگر (m)

A : دامنه (m)

v : سرعت نوسانگر (m/s)

● در هر دوره، مسافت طی شده توسط نوسانگر، ۴ برابر دامنه است.

● نوسانگر، هنگام عبور از نقطه تعادل، بیشینه تندی خود را دارد که اندازه آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$v_{\max} = A\omega$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$v_{\max}$: بیشینه تندی نوسانگر (m/s)

A : دامنه (m)

ω : بسامد زاویه‌ای (rad/s)

k : ثابت فنر (N/m)

m : جرم وزنه (kg)

گام اول: با توجه به این که مسافت طی شده توسط جسم در هر نوسان معلوم است، دامنه نوسان را به دست می‌آوریم:

$$4A = 30 \text{ cm} \Rightarrow A = 7.5 \text{ cm}$$

گام دوم: به کمک اطلاعات داده شده در شکل سؤال، بسامد زاویه‌ای نوسان را پیدا می‌کنیم:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \xrightarrow[k=2 \text{ N/cm}=200 \text{ N/m}]{m=0.5 \text{ kg}} \omega = \sqrt{\frac{200}{0.5}} = \sqrt{400} = 20 \text{ rad/s}$$

گام سوم: بیشینه تندی جسم را محاسبه می‌کنیم:

$$v_{\max} = A\omega = 7.5 \times 20 = 150 \text{ cm/s} = 1.5 \text{ m/s}$$

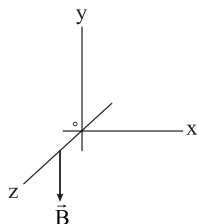
اگر مسافت طی شده در هر دوره را دو برابر دامنه در نظر بگیریم، در دام گزینه نادرست (۲) می‌افتیم.

گول نخوری

فیزیک

۵۱

شکل زیر، میدان مغناطیسی یک موج الکترومغناطیسی سینوسی را در نقطه‌ای معین و دور از چشمه، در یک لحظه نشان می‌دهد. اگر موج، انرژی را در خلاف جهت محور x انتقال دهد، جهت میدان الکتریکی موج در این لحظه و در این نقطه کدام است؟



(۱) $+x$

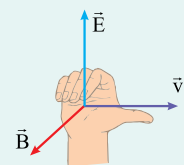
(۲) $-x$

(۳) $+z$

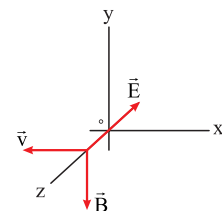
(۴) $-z$

پاسخ: گزینه ۴

برای تعیین جهت انتشار یک موج الکترومغناطیسی در هر لحظه، از قاعده دست راست استفاده می‌کنیم؛ به طوری که اگر چهار انگشت دست راست خود را در جهت $\vec{E}$ گرفته و آن‌ها را به طرف $\vec{B}$ ببندیم، انگشت شست، جهت انتشار موج را نشان می‌دهد. انرژی موج نیز در جهت انتشار آن انتقال می‌یابد.



با معلوم بودن جهت انتشار موج که در همان جهت انتقال انرژی موج است و همچنین معلوم بودن جهت میدان مغناطیسی $\vec{B}$ ، می‌توانیم با استفاده از قاعده دست راست، جهت میدان الکتریکی در لحظه مورد نظر را تعیین کنیم. با توجه به شکل زیر، جهت میدان الکتریکی این موج در این لحظه، در خلاف جهت محور z است.



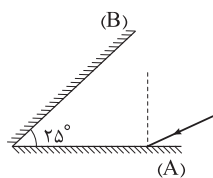
هیچ‌گاه بردارهای $\vec{E}$ ، $\vec{B}$ و $\vec{v}$ در یک راستا قرار نمی‌گیرند؛ بنابراین از همان ابتدا معلوم بود که گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند.

تیزبازی

در یک لحظه خاص، میدان الکتریکی مربوط به یک موج الکترومغناطیسی در نقطه‌ای از فضا در جهت $+z$ و میدان مغناطیسی مربوط به آن در جهت $+y$ است. جهت انتشار در کدام سو است؟

(فیزیک (۲) - پرسش ۳ - ۵ صفحه ۷۵ کتاب درسی)

در شکل زیر، پرتوی نوری با زاویه تابش 5° به آینه A می‌تابد. در دومین برخورد این پرتو به آینه B، زاویه بازتاب



۳۵ (۲)

۶۵ (۴)

چند درجه است؟

۲۵ (۱)

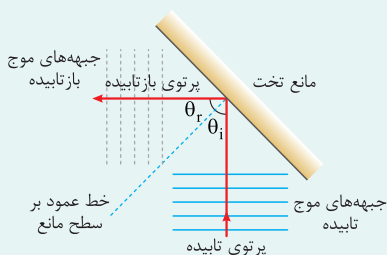
۵۵ (۳)

مشاوره مشابه این سؤال در کنکورهای سال‌های اخیر، چندین بار مطرح شده که یک نمونه آن در کنکور رشته تجربی نوبت دوم ۱۴۰۴ بوده است.

پاسخ: گزینه ۱

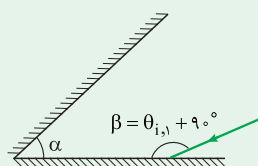
درس: Box

نمودار پرتویی در بازتاب: زاویه بین خط عمود بر سطح مانع و پرتوی تابیده (فرودی) را زاویه تابش می‌نامند و با θ_i نشان می‌دهند. زاویه بین خط عمود بر سطح مانع و پرتوی بازتابیده را زاویه بازتابش می‌نامند و با θ_r نشان می‌دهند.



قانون بازتاب عمومی: برای هر وضعیت مانع و همه انواع موج، همواره زاویه بازتابش برابر با زاویه تابش است. یعنی: $\theta_i = \theta_r$

اگر دو آینه تخت متقاطع با یکدیگر زاویه حاده α بسازند و پرتوی نوری با زاویه تابش $\theta_{i,1}$ بر سطح یکی از آنها بتابد:

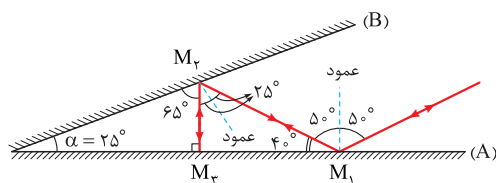


زاویه‌های تابش و بازتاب، در n امین برخورد پرتو به آینه‌ها، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\theta_{i,n} = \theta_{r,n} = |(n-1)\alpha - \theta_{i,1}|$$

n : تعداد برخوردها یا بازتاب‌ها از هر دو آینه

با استفاده از قانون بازتاب عمومی، زاویه‌های تابش و بازتاب را در هر بازتاب از سطح آینه‌ها روی شکل مشخص کرده و مسیر پرتوی نور را نشان می‌دهیم:

در نقطه M_1 :

$$\theta_{i,1} = \theta_{r,1} = 5^\circ$$

در نقطه M_2 :

$$2\theta_{i,2} = 18^\circ - (9^\circ + 4^\circ) = 5^\circ \Rightarrow \theta_{i,2} = \theta_{r,2} = 2.5^\circ$$

در نقطه M_3 :

$$\theta_{i,3} = 18^\circ - (9^\circ + 6^\circ + 25^\circ) = 0^\circ \Rightarrow \theta_{r,3} = 0^\circ$$

چون پرتوی نور در نقطه M_3 عمود بر سطح آینه A می‌تابد، بر روی خودش بازتاب می‌شود و پس از آن نیز، همان مسیر قبلی خود را برمی‌گردد؛ بنابراین در دومین برخورد به سطح آینه B، زاویه‌های تابش و بازتاب، هر کدام 25° هستند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فیزیک

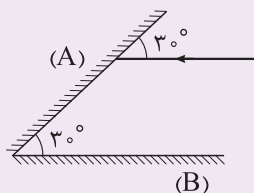
په‌چور دیگه

با توجه به نکته مطرح شده در درس یاکس، دومین برخورد پرتو به آینه B، در واقع چهارمین برخورد از کل برخوردهای پرتوی نور به سطح این دو آینه است.

$$\theta_{r,n} = |(n-1)\alpha - \theta_{i,1}| \xrightarrow[\theta_{i,1}=5^\circ]{n=4, \alpha=25^\circ} \theta_{r,4} = |(4-1)25 - 5| = 25^\circ$$

در شکل زیر، پرتوی نوری با زاویه 30° به آینه (A) می‌تابد و پس از بازتاب به آینه (B) می‌تابد، زاویه تابش در دومین برخورد به آینه (A) چند درجه است؟

(سؤال ۵۷ کنکور تهری ۱۴۰۴ - نوبت دوم)



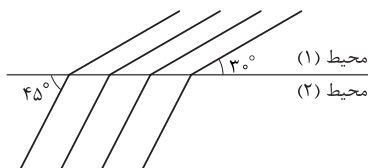
۹۰ (۱)

۶۰ (۲)

۳۰ (۳)

صفر (۴)

جبهه‌های موج تختی در مرز دو محیط (۱) و (۲) به شکل زیر هستند. تندی انتشار موج در محیط (۲) چند برابر تندی انتشار موج در محیط (۱) است؟



$$\frac{\sqrt{6}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

$$\sqrt{2} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۴

Hint

ابتدا زاویه‌های تابش و شکست را مشخص کنید؛ سپس به کمک قانون شکست عمومی، نسبت تندی انتشار موج در دو محیط را به دست آورید.

درس: Box

هنگام شکست موج، در یک نمودار پرتویی، زاویه پرتوی فرودی با خط عمود بر مرز جدایی دو محیط را با θ_1 یا θ_i نشان می‌دهیم و آن را زاویه تابش می‌نامیم.

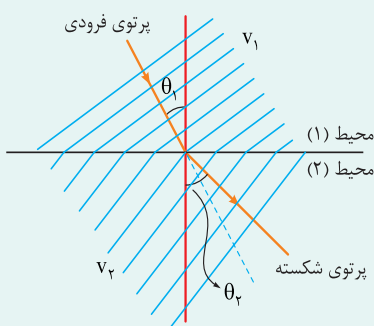
همچنین زاویه پرتوی شکسته با خط عمود بر مرز جدایی دو محیط را با θ_r یا θ_t نشان می‌دهیم و آن را زاویه شکست می‌نامیم. با توجه به قانون شکست عمومی، هنگامی که موج از یک محیط وارد محیط دیگری می‌شود، می‌توان نوشت:

$$\frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_1} = \frac{v_r}{v_1}$$

v_1 : تندی انتشار موج در محیط (۱) (m/s)

v_r : تندی انتشار موج در محیط (۲) (m/s)

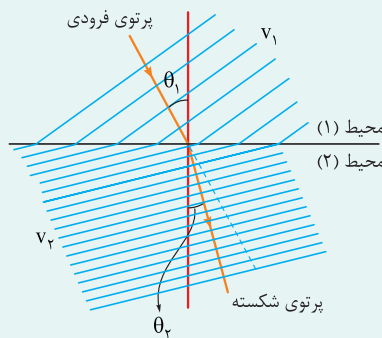
نمودار پرتویی در شکست:



شکل (۲)

$$v_r > v_1$$

$$\theta_r > \theta_1$$



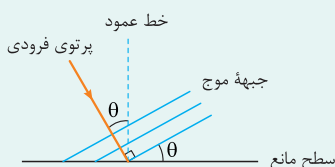
شکل (۱)

$$v_r < v_1$$

$$\theta_r < \theta_1$$

این قانون، هم در مورد موج‌های مکانیکی مانند صوت و هم در مورد موج‌های الکترومغناطیسی مانند نور مرئی، صادق است.

در هر محیط، زاویه بین جبهه موج و سطح جدایی دو محیط (مانع)، همان زاویه پرتو با خط عمود است.



فیزیک

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: زاویه بین جبهه‌های موج و سطح جدایی دو محیط در محیط‌های اول و دوم، به ترتیب، 3° و 45° است؛ بنابراین در مورد زاویه‌های تابش و شکست، می‌توان نوشت:

$$\theta_1 = 3^\circ, \theta_2 = 45^\circ$$

گام دوم: با استفاده از قانون شکست عمومی، نسبت تندی انتشار موج در محیط (۲) به تندی انتشار موج در محیط (۱) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 3^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

اگر مقادیر زاویه‌های θ_1 و θ_2 را جابه‌جا قرار می‌دادیم، به گزینه نادرست (۳) می‌رسیدیم.

گول نخوری ✗



۵۴ طول موج پرتوی نوری در خلأ برابر ۶۰۰ nm است. با ورود این پرتوی نور به یک محیط شفاف، طول موج آن ۲۰۰ nm تغییر می‌کند. ضریب شکست این محیط شفاف برابر کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۳

(۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

مشاوره در مسیر آماده‌شدن برای کنکور، همیشه دنبال سؤال‌های پیچیده و عجیب و غریب نباشید، بسیاری از تست‌هایی که در کنکور مطرح می‌شوند، ساده یا متوسط هستند. مثلاً مشابه همین سؤال، در کنکور ریاضی ۱۴۰۲ نوبت اول، مطرح شده بود.

پاسخ: گزینه ۴

طول موج نور در یک محیط شفاف با ضریب شکست آن محیط، نسبت وارون دارد.

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

λ_1 : طول موج نور در محیط اول (m)

λ_2 : طول موج نور در محیط دوم (m)

n_1 : ضریب شکست محیط اول

n_2 : ضریب شکست محیط دوم

در بین محیط‌های شفاف مختلف، کم‌ترین ضریب شکست، مربوط به خلأ است که برابر یک می‌باشد. بیشترین طول موج هر پرتو نیز در خلأ است.

گام اول: از آن‌جا که بیشترین طول موج هر پرتو در خلأ مشاهده می‌شود، پس وقتی هر پرتوی نور از خلأ وارد محیط شفاف دیگری شود، طول موج آن کاهش می‌یابد و می‌توان نوشت:

$$\lambda_2 = \lambda_1 - 200 = 600 - 200 = 400 \text{ nm}$$

گام دوم: با توجه به این‌که محیط اول خلأ است، ضریب شکست آن $n_1 = 1$ بوده و می‌توان ضریب شکست محیط دوم را پیدا کرد:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \frac{400}{600} = \frac{1}{n_2} \Rightarrow n_2 = \frac{3}{2}$$

نوری که طول موج آن در خلأ λ_1 است وارد محیط شفافی می‌شود و طول موج آن ۱۵۰ نانومتر تغییر می‌کند. اگر بسامد این نور $5 \times 10^{14} \text{ Hz}$ باشد، ضریب شکست این محیط شفاف چه قدر است؟ ($c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$)

(سؤال ۵۵ کنکور ریاضی ۱۴۰۲ - نوبت اول)

(۴) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۱) $\frac{3}{2}$

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی

فیزیک

۵۵

شدت تابش متوسط خورشید در سطح زمین 300 W/m^2 است. اگر طول موج متوسط این تابش برابر با 550 nm باشد، در هر ساعت چند فوتون به هر متر مربع از سطح زمین می‌رسد؟

$$(h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J.s} \text{ و } c = 3 \times 10^8 \text{ m/s})$$

$$5 \times 10^{24} \text{ (۲)}$$

$$3 \times 10^{24} \text{ (۱)}$$

$$5 \times 10^{23} \text{ (۴)}$$

$$3 \times 10^{23} \text{ (۳)}$$

مشاوره این تست، مشابه یکی از پرسش‌های دوره‌ای آخر فصل ۵ کتاب فیزیک ۳ رشته ریاضی یا آخر فصل ۴ کتاب فیزیک ۳ تجربی، طرح شده است. به پرسش‌های کتاب درسی، توجه ویژه‌ای داشته باشید.

پاسخ: گزینه ۱

درس: Box

(۱) رابطه توان یک چشمه موج الکترومغناطیس:

$$\begin{array}{c} \text{انرژی تابشی (J)} \\ \uparrow \\ P = \frac{E}{\Delta t} \\ \downarrow \\ \text{بازه زمانی (s)} \end{array}$$

← توان (W)

(۲) شدت تابش یک موج الکترومغناطیس، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$I = \frac{P}{A} \xrightarrow{P = \frac{E}{\Delta t}} I = \frac{E}{A \Delta t}$$

I: شدت تابش (W/m^2)

E: انرژی تابشی (J)

A: مساحت سطحی که موج الکترومغناطیس بر آن می‌تابد. (m^2)

Δt : بازه زمانی تابش (s)

(۳) یک موج الکترومغناطیس (نور مرئی و غیرمرئی) با بسامد f را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از بسته‌های انرژی در نظر گرفت؛ انرژی هر یک از این بسته‌ها که فوتون نامیده می‌شود، از رابطه $E = hf$ به دست می‌آید.

E: انرژی (J)

h: ثابت پلانک $6.6 \times 10^{-34} \text{ J.s}$

f: بسامد (Hz)

بنابراین انرژی کل موج الکترومغناطیس برای n فوتون، از رابطه $E = nhf = nh \frac{c}{\lambda}$ به دست می‌آید.

گام اول: ابتدا انرژی تابشی‌ای را که در هر ساعت به هر متر مربع از سطح زمین می‌رسد، به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{E}{A \Delta t} \xrightarrow{I = 300 \text{ W/m}^2, A = 1 \text{ m}^2, \Delta t = 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}} 300 = \frac{E}{1 \times 3600} \Rightarrow E = 3 \times 36 \times 10^4 \text{ J}$$

گام دوم: تعداد فوتون‌هایی را که با این انرژی به هر متر مربع از سطح زمین می‌رسند، محاسبه می‌کنیم:

$$E = \frac{nhc}{\lambda} \Rightarrow n = \frac{E \lambda}{hc} = \frac{3 \times 36 \times 10^4 \times 550 \times 10^{-9}}{6.6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} \Rightarrow n = \frac{3000 \times 10^{-5}}{10^{-26}} = 3 \times 10^{24}$$

شدت تابشی خورشید در خارج جو زمین حدود 1360 W/m^2 است؛ یعنی در هر ثانیه به سطحی برابر 1 m^2 ، مقدار انرژی ۱۳۶۰ J می‌رسد. وقتی این تابش به سطح زمین می‌رسد مقدار زیادی از شدت آن، به علت جذب در جو و ابرها از دست می‌رود. اگر شدت تابشی متوسط خورشید در سطح زمین به ازای هر متر مربع حدود 300 W/m^2 باشد، در هر ثانیه چند فوتون به هر متر مربع از سطح زمین می‌رسد؟ طول موج متوسط فوتون‌ها را 570 nm فرض کنید.

(فیزیک (۳) - پرسش ۴ صفحه ۱۳۴ کتاب درسی)

۵۶ در طیف اتمی هیدروژن، اختلاف کوتاه‌ترین طول موج گسیلی کدام دو رشته برابر $\frac{1}{4} \mu\text{m}$ است؟ $(R = \frac{1}{\infty} (\text{nm})^{-1})$

براکت	پاشن	بالمر	لیمان	نام رشته
۴	۳	۲	۱	n'

(۱) بالمر، پاشن

(۳) براکت، پاشن

(۲) بالمر، لیمان

(۴) براکت، لیمان

پاسخ: گزینه ۱

Hint

با استفاده از رابطه ریذبرگ و به ازای $n = \infty$ ، کوتاه‌ترین طول موج هر یک از رشته‌های طیف اتمی هیدروژن را به دست آورید و بررسی کنید که اختلاف کدام یک از آن‌ها، برابر $\frac{1}{4} \mu\text{m}$ یا 500 nm است.

درس: Box

معادله ریذبرگ:

طول موج تمامی خط‌های طیف گسیلی اتم هیدروژن از رابطه زیر به دست می‌آید. به طوری که اگر الکترون اتم هیدروژن از تراز n به تراز n' برود، طول موج λ را تابش می‌کند و اگر از n' به n برود، طول موج λ را جذب می‌کند.

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

 λ : طول موج (nm) n : شماره مدار بزرگ‌تر n' : شماره مدار کوچک‌تر R : ثابت ریذبرگ $= 1.097 \times 10^7 (\text{nm})^{-1}$

نکته

طبق رابطه $E = \frac{hc}{\lambda}$ ، کوتاه‌ترین طول موج گسیلی، متناظر با بیشترین انرژی گسیلی است، یعنی هنگامی که الکترون اتم هیدروژن از مدار $n = \infty$ به مدار n' بیاید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: رابطه مربوط به کوتاه‌ترین طول موج گسیل در اتم هیدروژن را بر حسب n' به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{\min}} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{\infty} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_{\min}} = \frac{1 \cdot 10^{-7}}{n'^2} \Rightarrow \lambda_{\min} = 100 n'^2$$

گام دوم: کوتاه‌ترین طول موج گسیلی را به ازای $n' = 1$ تا $n' = 4$ به دست می‌آوریم:

$$n' = 1 \Rightarrow \lambda_{\min,1} = 100(1)^2 = 100 \text{ nm}$$

$$n' = 2 \Rightarrow \lambda_{\min,2} = 100(2)^2 = 400 \text{ nm}$$

$$n' = 3 \Rightarrow \lambda_{\min,3} = 100(3)^2 = 900 \text{ nm}$$

$$n' = 4 \Rightarrow \lambda_{\min,4} = 100(4)^2 = 1600 \text{ nm}$$

گام سوم: با توجه به مقادیر به دست آمده در گام دوم، به راحتی معلوم می‌شود که اختلاف $\lambda_{\min,2}$ و $\lambda_{\min,3}$ به اندازه 500 nm

یا $\frac{1}{4} \mu\text{m}$ است؛ بنابراین رشته‌های مورد نظر، $n' = 2$ (بالمر) و $n' = 3$ (پاشن) است.

اگر یک هسته پرتوزا ۳ ذره β^- و یک ذره α گسیل کند، به ترتیب از راست به چپ، عدد اتمی و عدد نوترونی آن چگونه تغییر می کند؟

- (۱) ۱ واحد افزایش می یابد، ۳ واحد کاهش می یابد.
- (۲) ۱ واحد کاهش می یابد، ۳ واحد کاهش می یابد.
- (۳) ۱ واحد افزایش می یابد، ۵ واحد کاهش می یابد.
- (۴) ۱ واحد کاهش می یابد، ۵ واحد کاهش می یابد.

مشاوره پرتوزایی هسته ها، از مطالب بسیار مهم در فصل آخر کتاب فیزیک ۳ است که سوالات مربوط به آن در بسیاری از کنکورهای سال های اخیر، به چشم می خورد.

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

عدد اتمی (Z): تعداد پروتون های یک هسته را عدد اتمی می نامند و در عنصرهای مختلف، متفاوت است.

عدد نوترونی (N): تعداد نوترون های یک هسته را عدد نوترونی آن هسته می نامند.

عدد جرمی (A): مجموع تعداد کل پروتون ها و نوترون ها، که همان تعداد نوکلئون ها می باشد را عدد جرمی می گوئیم.

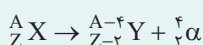
$$\underbrace{A}_{\text{تعداد پروتون ها و نوترون ها (عدد جرمی)}} = \underbrace{Z}_{\text{تعداد پروتون ها (عدد اتمی)}} + \underbrace{N}_{\text{تعداد نوترون ها (عدد نوترونی)}}$$

نمایش هسته: هسته هر اتم با نماد شیمیایی X، به صورت ${}^A_Z X_N$ نشان داده می شود. معمولاً برای اختصار، N را نمی نویسند. مثلاً می توان ${}^{27}_{13} Al$ را به صورت ${}^{27}_{13} Al$ نمایش داد.

نماد عنصر $\rightarrow A$ عدد جرمی
عدد نوترونی $\rightarrow Z$ عدد اتمی

واپاشی آلفا (α):

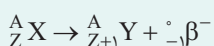
در این نوع واپاشی، هسته سنگین ${}^A_Z X$ با گسیل ذره آلفا وامی باشد. پرتوهای آلفا، ذرات باردار مثبت از جنس هسته اتم هلیم هستند و از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده اند (${}^4_2 He$). واپاشی آلفا، با رابطه زیر بیان می شود:



در این رابطه X، هسته مادر و Y، هسته دختر نامیده می شوند.

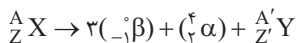
واپاشی بتا، همراه با گسیل الکترون (${}^0_{-1} \beta^-$ یا ${}^0_{-1} e^-$):

الکترون گسیل شده در این واپاشی، در هسته مادر وجود ندارد و همچنین یکی از الکترون های مداری اتم نیست. این الکترون وقتی به وجود می آید که نوترونی درون هسته، به پروتون و الکترون تبدیل شود. فرایند این واپاشی را با رابطه زیر بیان می کنند:



در این رابطه X، هسته مادر و Y، هسته دختر نامیده می شوند.

گام اول: وقتی از هسته پرتوزای ${}^A_Z X$ به عنوان هسته مادر، سه ذره β^- و یک ذره α گسیل شود، هسته دختر ${}^{A'}_{Z'} Y$ به دست می آید.



مجموع عددهای جرمی دو طرف واکنش، یکسان است. مجموع عددهای اتمی دو طرف واکنش نیز یکسان است؛ بنابراین می توان نوشت:

$$A = 3(0) + 4 + A' \Rightarrow A' = A - 4$$

$$Z = 3(-1) + 2 + Z' \Rightarrow Z' = Z + 1$$

یعنی عدد جرمی، ۴ واحد کاهش می یابد، اما عدد اتمی یک واحد افزایش می یابد. در نتیجه، گزینه های (۲) و (۴) نادرست هستند.

گام دوم: حالا باید ببینیم که عدد نوترونی چه تغییری کرده است.

$$A' = A - 4 \xrightarrow{A=Z+N} Z' + N' = Z + N - 4 \Rightarrow Z' - Z + N' - N = -4 \Rightarrow 1 + N' - N = -4 \Rightarrow N' - N = -5$$

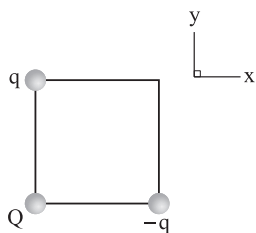
یعنی عدد نوترونی ۵ واحد کاهش می یابد و گزینه (۳) درست است.

اگر عدد نوترونی را با عدد جرمی اشتباه می گرفتیم، به گزینه نادرست (۱) می رسیدیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گول نخوری ✗

در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای روی سه رأس مربعی قرار دارند. اگر میدان الکتریکی خالص در رأس چهارم مربع در جهت محور x باشد، $\frac{Q}{q}$ برابر کدام است؟



(۱) $2\sqrt{2}$

(۲) $-2\sqrt{2}$

(۳) $\sqrt{2}$

(۴) $-\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۱

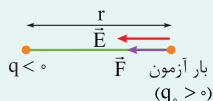
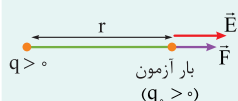
درس Box

هر بار الکتریکی نقطه‌ای q در اطراف خود خاصیتی به نام میدان الکتریکی ایجاد می‌کند که اندازه این میدان در نقطه‌ای به فاصله r از بار q از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E = k \frac{|q|}{r^2}$$

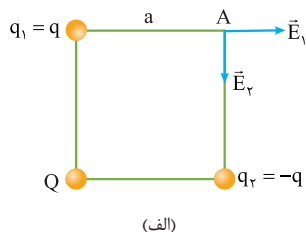
ثابت کولن $(\frac{N.m^2}{C^2})$ اندازه بار الکتریکی (C) میدان الکتریکی (N/C) فاصله (m)

برای تشخیص جهت میدان الکتریکی حاصل از یک ذره باردار، بار آزمون ($q_0 > 0$) را در نقطه مورد نظر قرار می‌دهیم، جهت نیروی واردشده به بار q_0 هم‌جهت با میدان الکتریکی حاصل از بار q در آن نقطه است.

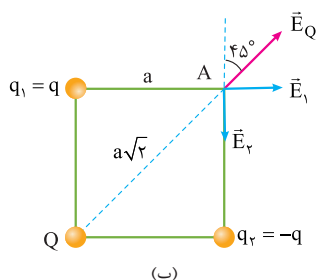


طبق شکل‌های بالا، میدان الکتریکی بار مثبت در جهتی است که از بار دور شود و میدان الکتریکی بار منفی در جهتی است که به بار نزدیک شود.

گام اول: با فرض این‌که $q > 0$ است، در نقطه A (رأس چهارم مربع)، جهت میدان‌های الکتریکی حاصل از بارهای q و $-q$ را مشخص می‌کنیم:



گام دوم: با توجه به شکل (الف)، برای این‌که میدان الکتریکی خالص در جهت محور x باشد، باید $Q > 0$ باشد تا مؤلفه قائم میدان الکتریکی Q ، میدان E_r را خنثی کند (مطابق شکل (ب))، یعنی:



$$E_{Q,y} = E_r \Rightarrow E_Q \cos 45^\circ = E_r$$

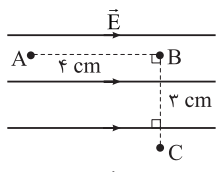
$$\Rightarrow \frac{k|Q|}{(a\sqrt{2})^2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{k|q|}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{k|Q|}{2a^2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{k|q|}{a^2} \Rightarrow \left| \frac{Q}{q} \right| = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{Q>0, q>0} \frac{Q}{q} = 2\sqrt{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر، اندازه میدان الکتریکی یکنواخت برابر $5 \times 10^3 \text{ N/C}$ است. اگر پتانسیل الکتریکی نقطه A برابر 300 V باشد، پتانسیل الکتریکی نقطه C برابر چند ولت است؟



(۱) ۵۰

(۲) ۱۰۰

(۳) ۲۰۰

(۴) ۵۰۰

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

$$\Delta V = -Ed \cos \alpha$$

رابطه اختلاف پتانسیل دو نقطه و اندازه میدان الکتریکی یکنواخت:

$$|\Delta V| = Ed$$

در حالت خاص، اگر بار، در راستای میدان الکتریکی حرکت کند:

$$\Delta V = -Ed$$

وقتی جابه‌جایی در جهت میدان الکتریکی باشد ($\alpha = 0^\circ$):

$$\Delta V = Ed$$

وقتی جابه‌جایی در خلاف جهت میدان الکتریکی ($\alpha = 180^\circ$):

$$\Delta V = 0$$

وقتی جابه‌جایی عمود بر میدان الکتریکی باشد ($\alpha = 90^\circ$):

ΔV : اختلاف پتانسیل الکتریکی (V)

E: اندازه میدان الکتریکی (V/m)

d: فاصله بین دو نقطه (m)

α : زاویه بین میدان الکتریکی $\vec{E}$ و جابه‌جایی $\vec{d}$

نقطه B و نقطه C هم‌پتانسیل هستند، پس کافی است پتانسیل الکتریکی نقطه B را به دست آوریم. با توجه به این که از A تا B در جهت میدان الکتریکی حرکت کرده‌ایم، داریم:

$$\Delta V = -Ed \Rightarrow V_B - 300 = -5 \times 10^3 \times 4 \times 10^{-2} \Rightarrow V_B = 300 - 200 \Rightarrow V_B = 100 \text{ V}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فیزیک

۶۰

ظرفیت خازنی که بین صفحه‌های آن هواست، برابر 20 nF و بار الکتریکی ذخیره‌شده در آن $1/8 \text{ } \mu\text{C}$ است. خازن را از باتری جدا کرده و فاصله بین صفحه‌های آن را ۳ برابر می‌کنیم. انرژی ذخیره‌شده در خازن چند میکروژول و چگونه تغییر می‌کند؟

(۱) ۵۴، کاهش می‌یابد.

(۲) ۵۴، افزایش می‌یابد.

(۳) ۱۶۲، کاهش می‌یابد.

(۴) ۱۶۲، افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینه ۴

درس‌Box

(۱) ظرفیت خازن از ویژگی‌های ساختاری خازن است و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

ثابت دی‌الکتریک κ (مربع متر) A مساحت هر یک از صفحه‌ها (متر مربع) d فاصله صفحه‌ها از هم (متر) ϵ_0 ضریب گذردهی الکتریکی خلأ (F/m)

● ثابت دی‌الکتریک یکا ندارد.

● اگر خازن پرشده‌ای را از مولد جدا کنیم، بار الکتریکی Q ثابت می‌ماند.

(۲) یکی از رابطه‌های انرژی ذخیره‌شده در خازن به صورت زیر است:

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

بار ذخیره‌شده در خازن (C) U انرژی (J) Q ظرفیت خازن (F)

گام اول: چون خازن را از باتری جدا کرده‌ایم، بار الکتریکی ذخیره‌شده در خازن ثابت است، یعنی:

$$Q = \text{ثابت} = 1/8 \text{ } \mu\text{C}$$

گام دوم: طبق رابطه $C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$ ، با سه برابر کردن فاصله بین صفحه‌ها، ظرفیت خازن $\frac{1}{3}$ می‌شود، در نتیجه:

$$C_2 = \frac{1}{3} C_1 = \frac{1}{3} \times 20 = \frac{20}{3} \text{ nF}$$

گام سوم: تغییرات انرژی ذخیره‌شده در خازن را محاسبه می‌کنیم:

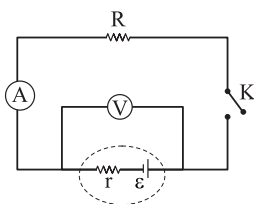
$$U = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow \Delta U = \frac{Q^2}{2} \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right) = \frac{(1/8 \times 10^{-6})^2}{2} \left(\frac{1}{20/3} - \frac{1}{20} \right) \times 10^9$$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{(1/8)^2 \times 10^{-12}}{2} \left(\frac{3}{20} - \frac{1}{20} \right) \times 10^9 = 162 \times 10^{-6} \text{ J} = 162 \text{ } \mu\text{J}$$

پس انرژی ذخیره‌شده در خازن به اندازه $162 \text{ } \mu\text{J}$ افزایش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در مدار شکل زیر، ابتدا کلید K باز است. اگر با بستن کلید، مقداری که ولتسنج آرمانی نشان می‌دهد، 1 V و مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، 2 A تغییر کند، مقاومت درونی باتری برابر چند اهم است؟



(۱) ۰/۵

(۲) ۱

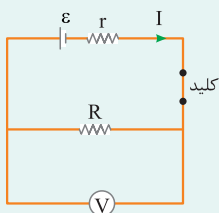
(۳) ۲

(۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

برای اندازه‌گیری اختلاف پتانسیل هر قسمت از مدار، ولتسنج با آن قسمت به طور موازی بسته می‌شود. مقاومت الکتریکی یک ولتسنج آرمانی، بی‌نهایت فرض می‌شود و جریان از آن عبور نمی‌کند. مثلاً در مدار زیر داریم:



ولتسنج هم با مقاومت R و هم با باتری موازی بسته شده است، پس اختلاف پتانسیل دو سر آن‌ها را نشان می‌دهد.

$$V = IR$$

$$V = \varepsilon - Ir \xrightarrow{\text{اگر کلید قطع شود و جریان عبوری از باتری صفر شود}} V = \varepsilon$$

گام اول: در حالتی که کلید K باز است، جریانی در مدار برقرار نمی‌شود و داریم:

$$I = 0, V = \varepsilon$$

گام دوم: در حالت دوم که کلید را می‌بندیم، جریان در مدار برقرار می‌شود، یعنی جریان 2 A افزایش پیدا می‌کند و طبق رابطه $V = \varepsilon - Ir$ ، اختلاف پتانسیل 1 V کاهش پیدا کرده، پس:

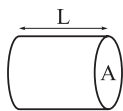
$$\left. \begin{array}{l} I' = 2\text{ A} \\ V' = V - 1 = \varepsilon - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow I'r = 1 \xrightarrow{I'=2\text{ A}} r = \frac{1}{2} \Omega = 0.5 \Omega$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

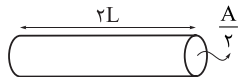
فیزیک

۶۲

شکل زیر، دو سیم مسی استوانه‌ای را در یک دما نشان می‌دهد. سطح مقطع سیم (۲) نصف سطح مقطع سیم (۱) و طول آن دو برابر طول سیم (۱) است. نسبت مقاومت سیم (۲) به مقاومت سیم (۱) برابر کدام است؟



سیم (۱)



سیم (۲)

۸ (۴)

۴ (۳)

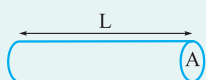
 $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

فقط کافی است رابطه $R = \rho \frac{L}{A}$ را به صورت نسبتی بنویسید.

Hint

اگر سطح مقطع جسم در تمام طول آن یکسان باشد، مقاومت آن از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$R = \rho \frac{L}{A}$$

طول رسانا (m) $\uparrow$
 $\downarrow$ مساحت مقطع جسم (m^۲)
 مقاومت الکتریکی (Ω) $\leftarrow$ مقاومت ویژه (Ω.m)

درس Box

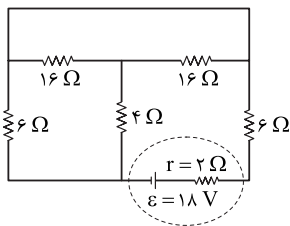
به کمک رابطه نسبتی $R = \rho \frac{L}{A}$ داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \frac{A_1}{A_2} \xrightarrow{\rho_2 = \rho_1} \frac{R_2}{R_1} = 1 \times \frac{2L}{L} \times \frac{A}{\frac{A}{2}} = 4$$

اگر اشتباهاً نسبت $\frac{R_1}{R_2}$ را بنویسی، توی دام گزینه (۲) می‌افتی.

گول نخوری ✗



۶۳ در مدار شکل مقابل، توان خروجی باتری برابر چند وات است؟

۲۲ / ۵ (۱)

۲۴ (۲)

۳۰ (۳)

۳۱ / ۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

کوتاه‌نویس Box

(۱) توان مصرفی در یک مقاومت مصرف‌کننده، از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$P = VI, P = RI^2, P = \frac{V^2}{R}$$

V: اختلاف پتانسیل دو سر مصرف‌کننده (V)

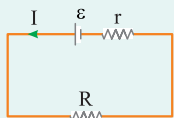
R: مقاومت الکتریکی مصرف‌کننده (Ω)

I: جریان الکتریکی عبوری از مصرف‌کننده (A)

(۲) توان خروجی باتری از رابطه زیر محاسبه می‌شود و برابر است با توان تولیدی (کل) منهای توان تلف‌شده:

$$P_{\text{خروجی}} = \varepsilon I - rI^2$$

توان اتلافی باتری توان کل باتری



$$\Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{r + R}$$

(۳) رابطه جریان الکتریکی در یک مدار تک‌حلقه:

I: جریان الکتریکی (A)

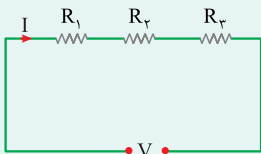
ε: نیروی محرکه مولد (V)

r: مقاومت درونی مولد (Ω)

R: مقاومت خارجی یا مصرفی مدار (Ω)

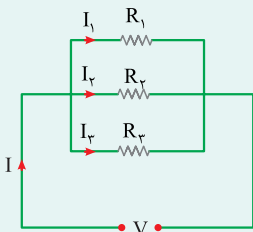
(۴) به هم بستن مقاومت‌ها:

الف) اتصال متوالی (سری): در این حالت، مطابق شکل زیر، جریان عبوری از تمام مقاومت‌ها یکسان است و داریم:



$$\begin{cases} I_1 = I_2 = I_3 = I \\ V = V_1 + V_2 + V_3 \end{cases} \Rightarrow R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

ب) اتصال موازی: مطابق شکل در اتصال موازی، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌ها با هم برابر است، پس:

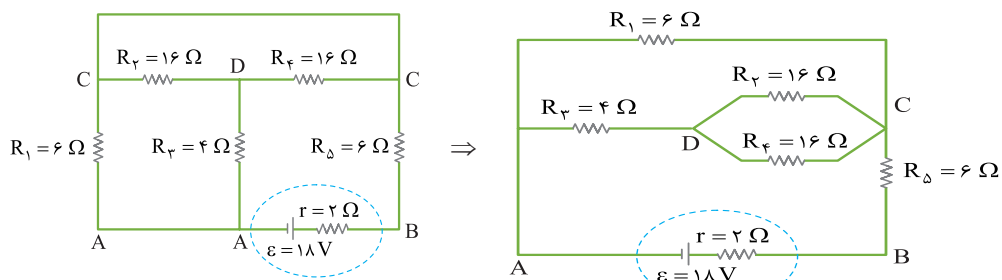


$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 + I_3 \\ V = V_1 = V_2 = V_3 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

فیزیک

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا شکل ساده شده‌ای از مدار را به کمک نام گذاری نقاط هم‌پتانسیل رسم می‌کنیم:



گام دوم: مقاومت معادل و سپس جریان الکتریکی عبوری از مدار را محاسبه می‌کنیم:

$$R_2 \text{ و } R_4 : R' = \frac{16 \times 16}{16 + 16} = 8 \Omega \quad , \quad R_3 \text{ و } R' : R'' = 8 + 4 = 12 \Omega$$

$$R_1 \text{ و } R'' : R''' = \frac{12 \times 6}{12 + 6} = 4 \Omega \quad , \quad R_5 \text{ و } R''' : R_{eq} = 4 + 6 = 10 \Omega$$

جریان الکتریکی عبوری:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{18}{10 + 2} = \frac{3}{2} \text{ A}$$

گام سوم: با توجه به رابطه $\varepsilon I - r I^2 = P_{\text{خروجی باتری}}$ ، داریم:

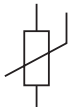
$$P_{\text{خروجی باتری}} = \varepsilon I - r I^2 = 18 \times \frac{3}{2} - 2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 27 - 4/2 = 22/2 \text{ W}$$

توان خروجی باتری با توان مصرفی مقاومت معادل برابر است، یعنی بعد از به دست آوردن مقاومت معادل می‌توان نوشت:

$$P_{\text{خروجی باتری}} = P_{\text{مصرفی مقاومت معادل}} = R_{eq} I^2 = 10 \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 22/2 \text{ W}$$

تیزبازی

شکل زیر، نماد کدام قطعه در مدارهای الکتریکی است؟



(۱) مقاومت نوری

(۲) دیود

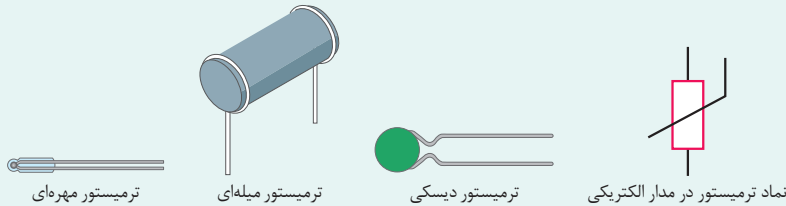
(۳) پتانسیومتر

(۴) ترمیستور

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

ترمیستور: ترمیستور نوعی از مقاومت است که بستگی مقاومت الکتریکی آن به دما با مقاومت‌های الکتریکی معمولی تفاوت دارد. اغلب از ترمیستورها به عنوان حسگر دما در مدارهای حساس به دما مانند زنگ خطر آتش و دماپاها و نیز در دماسنج‌ها استفاده می‌شود. ترمیستورها در ابعاد کوچکی ساخته می‌شوند و شکل‌های متفاوتی دارند که رایج‌ترین آن‌ها دیسکی، مهره‌ای و میله‌ای است.



مطابق مطلب بیان شده در درس یاکس، این شکل نماد ترمیستور است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی سایر گزینه‌ها:

نماد مقاومت نوری به صورت  یا  است.

نماد دیود به صورت  است.

نماد پتانسیومتر به صورت  یا  است.

فیزیک

۶۵

جریان عبوری از سیملوله‌ای که دارای ۵۰۰ حلقه نزدیک به هم است، برابر 400 mA و بزرگی میدان مغناطیسی در نقطه‌ای درون سیملوله و دور از لبه‌های آن برابر $4/8 \text{ G}$ است. طول این سیملوله برابر چند سانتی‌متر است؟

$$(\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}})$$

۵۰ (۴)

۲۵ (۳)

۲۰ (۲)

۲۰۰ (۱)

مشاوره این تست مشابه کنکور ریاضی ۱۴۰۴ است.

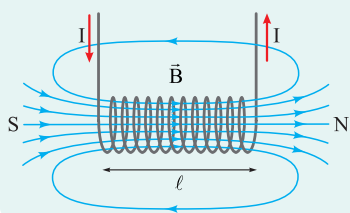
پاسخ: گزینه ۴

داده‌ها را در رابطه $B = \frac{\mu_0 NI}{\ell}$ جای‌گذاری کنید تا ℓ به دست آید.

Hint

درسی Box

اندازه میدان مغناطیسی در درون سیملوله و دور از لبه‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید:



تعداد دورهای سیملوله ضرب تراوایی مغناطیسی خلأ $(\frac{\text{T.m}}{\text{A}})$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell} \quad \begin{array}{l} \text{جریان الکتریکی (A)} \\ \text{طول سیملوله (m)} \end{array}$$

میدان مغناطیسی (T)

کافی است داده‌ها را در رابطه میدان مغناطیسی سیملوله جای‌گذاری کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \Rightarrow 4/8 \times 10^{-4} = 12 \times 10^{-7} \times \frac{500}{\ell} \times 400 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{12 \times 5 \times 4 \times 10^{-6}}{4/8 \times 10^{-4}} = 0/5 \text{ m} = 50 \text{ cm}$$

جریان الکتریکی $2/5 \text{ A}$ از سیملوله آرمانی به طول 10 cm می‌گذرد. اگر میدان مغناطیسی ایجادشده در درون سیملوله 157 G باشد، تعداد حلقه‌های آن چه قدر است؟ $(\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}})$

(سوال ۶۷ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت اول)

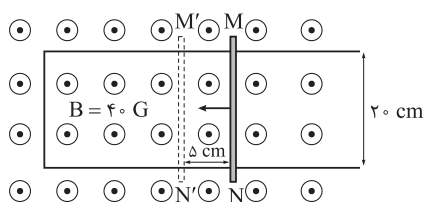
۱۰۰۰ (۲)

۱۵۰۰ (۱)

۲۵۰ (۴)

۵۰۰ (۳)

در شکل زیر، میله فلزی را روی رسانای U شکل در مدت 2 s و از وضعیت MN به وضعیت M'N' درمی آوریم. در این مدت، اندازه نیروی محرکه القاشده چند میلی ولت و جهت جریان القاشده در میله کدام است؟



(۱) و از N به طرف M

(۲) و از M به طرف N

(۳) و از N به طرف M

(۴) و از M به طرف N

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

(۱) قانون لنز بیان می کند که وقتی شار مغناطیسی تغییر می کند، جریان در حلقه القا می شود که میدان مغناطیسی ناشی از آن با تغییر شار مخالفت می کند، یعنی:

وقتی شار مغناطیسی افزایش می یابد، میدان مغناطیسی اصلی و القایی در خلاف جهت هم هستند.



وقتی شار مغناطیسی کاهش می یابد، میدان مغناطیسی اصلی و القایی هم جهت هستند.



(۲) طبق قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، با تغییر شار مغناطیسی عبوری از حلقه، نیروی محرکه ای در حلقه القا می شود که اندازه آن از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} \text{نیروی محرکه القایی (V)} \quad | \varepsilon_{av} | &= | -NAB \left(\frac{\cos \theta_f - \cos \theta_i}{\Delta t} \right) | \\ | \varepsilon_{av} | &= | -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} | \Rightarrow \begin{cases} | \varepsilon_{av} | = | -NA \cos \theta \left(\frac{\Delta B}{\Delta t} \right) | \\ | \varepsilon_{av} | = | -NB \cos \theta \left(\frac{\Delta A}{\Delta t} \right) | \end{cases} \end{aligned}$$

↑
تعداد حلقه
↓
آهنگ تغییر
شار مغناطیسی (Wb/s)

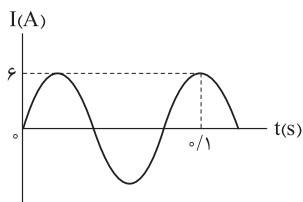
گام اول: میله MN با حرکت به سمت چپ و کاهش مساحت، باعث ایجاد نیروی محرکه القایی شده، در نتیجه برای محاسبه اندازه نیروی محرکه القایی طبق رابطه زیر داریم:

$$| \varepsilon_{av} | = | -NB \cos \theta \frac{\Delta A}{\Delta t} | = | -1 \times 40 \times 10^{-4} \times 1 \times \frac{(5 \times 20) \times 10^{-4}}{2} | = 2 \times 10^{-4} \text{ V} \Rightarrow | \varepsilon_{av} | = 0.2 \text{ mV}$$

گام دوم: با توجه به این که مساحت در حال کاهش است، شار مغناطیسی عبوری از حلقه کاهش می یابد. طبق قانون لنز، میدان مغناطیسی القایی باید در جهت میدان مغناطیسی اصلی یعنی برون سو $\odot$ باشد تا با این کاهش شار مخالفت کند. به کمک قاعده دست راست در حلقه، با توجه به این که میدان القایی برون سو است، جریان القایی در حلقه پادساعتگرد است، پس جهت جریان در میله، به سمت بالا $(\uparrow)$ ، یعنی از N به طرف M است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

از یک مقاومت الکتریکی ۵ اهمی، جریان متناوب سینوسی که نمودار تغییرات آن بر حسب زمان به صورت شکل زیر است، عبور می‌کند. توان مصرفی این مقاومت در لحظه $t = \frac{1}{4} \text{ s}$ برابر چند وات است؟



(۱) ۴۵

(۲) ۹۰

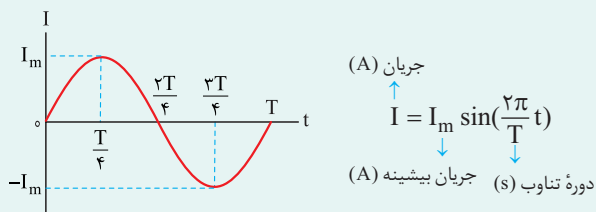
(۳) ۱۳۵

(۴) ۱۸۰

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

جریان متناوب، جریانی است که اندازه و علامت آن به صورت تابع سینوسی با زمان تغییر می‌کند. نمودار و معادله جریان متناوب بر حسب زمان به صورت زیر است:



گام اول: برای محاسبه دوره تناوب، با توجه به نمودار داریم:

$$0.1 = \frac{T}{4} \Rightarrow T = 0.4 \text{ s}$$

گام دوم: با داشتن I_m و T ، معادله جریان - زمان به راحتی نوشته می‌شود:

$$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 6 \sin\left(\frac{2\pi}{0.4}t\right) = 6 \sin(5\pi t)$$

گام سوم: برای محاسبه توان مصرفی مقاومت در لحظه $t = \frac{1}{4} \text{ s}$ ، طبق رابطه $P = RI^2$ ، به جریان عبوری از مقاومت در این لحظه نیاز داریم، پس:

$$I = 6 \sin\left(5\pi \times \frac{1}{4}\right) = 6 \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 6 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2} \text{ A}$$

$\underbrace{\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)}_{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)}$

در نتیجه توان مصرفی برابر است با:

$$P = RI^2 = 5(-3\sqrt{2})^2 = 90 \text{ W}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

درون یک ظرف استوانه‌ای به مساحت قاعده 20 cm^2 ، 800 g روغن ریخته شده است. فشار پیمانه‌ای در کف ظرف برابر چند کیلوپاسکال است؟ ($P_0 = 100 \text{ kPa}$ و $g = 10 \text{ N/kg}$)

- (۱) $4/0$ (۲) 4 (۳) $4/100$ (۴) 104

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

(۱) فشار کل در کف یک ظرف استوانه‌ای، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P = P_0 + \frac{mg}{A}$$

P : فشار کل (Pa)

P_0 : فشار جو (Pa)

m : جرم (kg)

g : شتاب گرانش (N/kg یا m/s^2)

A : مساحت مقطع (m^2)

(۲) به اختلاف فشار مطلق (P) و فشار هوای محیط (P_0)، فشار پیمانه‌ای می‌گویند و آن را با نماد P_g نمایش می‌دهند:

$$P = P_0 + \rho gh \Rightarrow P_g = P - P_0 = \rho gh$$

ρ : چگالی مایع (kg/m^3)

h : ارتفاع مایع (m)

$g \approx 10 \text{ N/kg}$: شتاب گرانش در سطح زمین

با استفاده از رابطه فشار کل، فشار پیمانه‌ای وارد بر کف ظرف را به دست می‌آوریم:

$$P = P_0 + \frac{mg}{A} \Rightarrow P_g = P - P_0 = \frac{mg}{A} \xrightarrow{P_0 = 100 \text{ kPa} = 10^5 \text{ Pa}, m = 800 \text{ g} = 0.8 \text{ kg}, g = 10 \text{ N/kg}, A = 20 \text{ cm}^2 = 20 \times 10^{-4} \text{ m}^2}$$

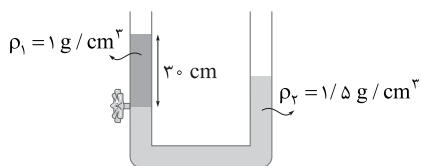
$$P_g = \frac{0.8 \times 10}{20 \times 10^{-4}} = \frac{8}{2 \times 10^{-3}} = 4000 \text{ Pa} = 4 \text{ kPa}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

آگه به کلمه پیمانه‌ای هواسـت نباشه، به اشتباه گزینه (۴) رو می‌زنی!

گول نخوری ✗

در شکل زیر، دو مایع مخلوط‌نشدنی در لوله U شکل قرار دارند و شیر رابط، بسته است. با باز شدن شیر رابط، اختلاف ارتفاع سطح آزاد مایع‌ها در دو شاخه لوله به چند سانتی‌متر می‌رسد؟



۱۰ (۱)

۱۲ (۲)

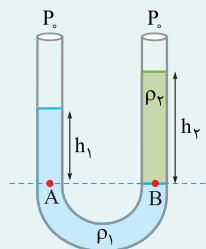
۱۸ (۳)

۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

کلاس Box

در لوله‌های U شکل، مطابق شکل زیر، در نقاط هم‌تراز که در یک مایع قرار دارند، فشار برابر است:



$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_1 g h_1 + P_0 = \rho_2 g h_2 + P_0 \Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$

گام اول: در نقاط هم‌تراز درون یک مایع، از برابری فشار استفاده می‌کنیم:

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \xrightarrow[\rho_2 = 1/5 \text{ g/cm}^3]{\rho_1 = 1 \text{ g/cm}^3, h_1 = 30 \text{ cm}} 1 \times 30 = 1/5 \times h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{30}{1/5} = 20 \text{ cm}$$

گام دوم: با توجه به آن که اختلاف ارتفاع دو ستون را خواسته، h_1 را از h_2 کم می‌کنیم:

$$h_1 - h_2 = 30 - 20 = 10 \text{ cm}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فیزیک

۷۰

تندی خودرویی به جرم 1200 kg از 54 km/h به 90 km/h می‌رسد. در این مدت، کار کل انجام‌شده روی خودرو برابر چند کیلوژول است؟

$$2/4 \times 10^3 \text{ (۲)}$$

$$2/4 \times 10^2 \text{ (۱)}$$

$$2/4 \times 10^5 \text{ (۴)}$$

$$2/4 \times 10^4 \text{ (۳)}$$

پاسخ: گزینه ۱

درس‌Box

قضیه کار - انرژی جنبشی: کار کل انجام‌شده روی یک جسم با تغییر انرژی جنبشی آن برابر است.

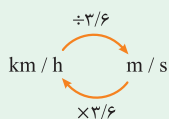
$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_t = K_2 - K_1$$

W_t : کار برآیند (J)

K_2 : انرژی جنبشی در حالت ۲ (J)

K_1 : انرژی جنبشی در حالت ۱ (J)

برای تبدیل یکای سرعت و تندی از km/h به m/s و بالعکس، می‌توانیم به شکل زیر عمل کنیم:



با تبدیل یکای سرعت‌ها و جای‌گذاری در قضیه کار - انرژی جنبشی، به راحتی کار برآیند را محاسبه می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

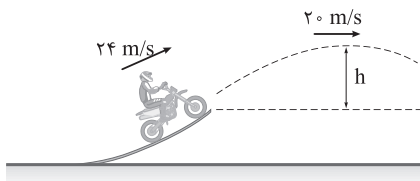
$$W_t = \Delta K$$

$$\Rightarrow W_t = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \xrightarrow[v_2 = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}]{m = 1200 \text{ kg}, v_1 = 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s}}$$

$$W_t = \frac{1}{2} \times 1200 \times \underbrace{(625 - 225)}_{400} = 600 \times 400 = 24 \times 10^4 \text{ J} = 2/4 \times 10^2 \text{ kJ}$$



موتورسواری از انتهای سکویی مطابق شکل زیر، پرشی را با تندی 24 m/s انجام می‌دهد. اگر تندی موتورسوار در بالاترین نقطه مسیرش به 20 m/s برسد، ارتفاع h برحسب متر کدام است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ و مقاومت هوا را در طول مسیر حرکت موتورسوار نادیده بگیرید.)



$$1) \quad 7/8$$

$$2) \quad 8/8$$

$$3) \quad 17/6$$

$$4) \quad 18/6$$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

انرژی پتانسیل گرانشی جسمی به جرم m در ارتفاع h از سطح مبدأ پتانسیل گرانشی برابر است با:

$$U = mgh$$

$\uparrow$ انرژی پتانسیل گرانشی (J) $\uparrow$ شتاب گرانش (m/s^2)
 $\uparrow$ ارتفاع (m) $\uparrow$ جرم (kg)

(۱) انرژی مکانیکی جسم برابر با مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل آن است:

$$E = K + U$$

E : انرژی مکانیکی (J)

K : انرژی جنبشی (J)

U : انرژی پتانسیل گرانشی (J)

(۲) اصل پایستگی انرژی مکانیکی: در غیاب نیروهای اتلافی مانند مقاومت هوا، اصطکاک و ...، انرژی مکانیکی جسم در تمام نقاط مسیر حرکت جسم مقدار یکسانی دارد:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

مبدأ پتانسیل را ارتفاعی که پرش شروع می‌شود، در نظر می‌گیریم و اصل پایستگی انرژی مکانیکی را می‌نویسیم:

$$E_1 = E_2$$

$$\Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

با جای‌گذاری مقادیر خواهیم داشت:

$$\frac{v_1 = 24 \text{ m/s}, v_2 = 20 \text{ m/s}}{U_1 = 0, g = 10 \text{ m/s}^2} \rightarrow \frac{1}{2} m (24)^2 = \frac{1}{2} m (20)^2 + m \times 10 \times h$$

$$\Rightarrow \frac{576}{2} = 200 + 10h \Rightarrow 288 - 200 = 10h \Rightarrow 88 = 10h \Rightarrow h = 8.8 \text{ m}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۷۲ ضریب انبساط طولی مس $\frac{1}{K} \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ است. اگر دمای یک میله مسی 50°F افزایش یابد، طول آن چند درصد تغییر می‌کند؟

۰/۵ (۲)

۰/۰۵ (۱)

۰/۹ (۴)

۰/۰۹ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

۱) فرمول تبدیل تغییرات دما از مقیاس کلون به فارنهایت:

$$\Delta F = \frac{9}{5} \Delta T$$

می‌تونی ΔT هم بنویسی!

ΔF : تغییر دما برحسب درجه فارنهایت ($^\circ\text{F}$)

ΔT : تغییر دما برحسب کلون (K)

۲) رابطه انبساط طولی در اثر تغییر دمای ΔT برای جامدات:

$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta T$$

$$\frac{\Delta L}{L_1} = \alpha \Delta T \Rightarrow \text{درصد تغییر طول} = \frac{\Delta L}{L_1} \times 100 = \alpha \Delta T \times 100$$

$\Delta L = L_2 - L_1$: تغییر طول (m)

L_2 : طول ثانویه یا طول تغییر یافته (m)

L_1 : طول اولیه (m)

α : ضریب انبساط طولی ($\frac{1}{K}$)

ΔT : تغییرات دما (K)

گام اول: ابتدا تغییرات دما را برحسب کلون به دست می‌آوریم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$\Delta F = \frac{9}{5} \Delta T \xrightarrow{\Delta F = 50^\circ\text{F}} 50 = \frac{9}{5} \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{250}{9} \text{ K}$$

گام دوم: حالا از رابطه درصدی درس باکس استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\Delta L}{L_1} \times 100 = \alpha \Delta T \times 100 = \frac{1}{8} \times 10^{-5} \times \frac{250}{9} \times 100 = 50 \times 10^{-5} \times 100 = 0.05\%$$

درون ظرفی ۲۰۰ g یخ با دمای -10°C قرار دارد. حداقل چند گرم آب با دمای 40°C به آن اضافه کنیم تا تمام یخ ذوب شود؟ (تبادل گرما فقط بین آب و یخ انجام می‌شود، $\frac{J}{g.K} = 4/2 = 2c_{\text{یخ}} = c_{\text{آب}}$ و $L_F = 336 \text{ J/g}$ است.)

(۲) ۴۰۰

(۱) ۳۷۵

(۴) ۴۵۰

(۳) ۴۲۵

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

(۱) برای جسمی که بدون تغییر حالت، در اثر تبادل گرما، فقط دمای آن تغییر می‌کند، می‌توان نوشت:

$$Q = mc\Delta T$$

Q: گرما (J)

m: جرم (kg)

c: گرمای ویژه $(\frac{J}{kg.K})$ $\Delta T = \Delta \theta$: تغییر دما (K) یا $(^{\circ}\text{C})$

(۲) وقتی جسم جامدی در دمای ذوب خود از حالت جامد به مایع تبدیل شود و یا مایعی در همین دما به جامد تبدیل شود، داریم:

$$Q = \pm mL_F$$

↑ ذوب
↓ انجماد

Q: گرما (J)

m: جرم (kg)

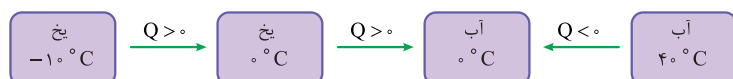
 L_F : گرمای نهان ذوب (J/kg)

(۳) اگر دو یا چند جسم با دماهای متفاوت در تماس با یکدیگر قرار بگیرند، پس از مدتی هم‌دما می‌شوند و به تعادل گرمایی می‌رسند. براساس قانون پایستگی انرژی می‌توان نوشت:

$$Q_1 + Q_2 + \dots = 0$$

در این رابطه، برای اجسامی که گرما می‌گیرند، $Q > 0$ و برای اجسامی که گرما از دست می‌دهند، $Q < 0$ است.

گام اول: ابتدا طرح‌واره مسائل گرما را رسم می‌کنیم:



گام دوم: گرمای مورد نیاز تبدیل یخ -10°C به یخ 0°C درجه سلسیوس را به دست می‌آوریم:

$$Q_1 = mc\Delta\theta \xrightarrow{m=200\text{ g}, c=210 \frac{J}{g.K}, \Delta\theta=0-(-10)=10^{\circ}\text{C}} Q_1 = 200 \times 210 \times 10 = 4200 \text{ J}$$

گام سوم: گرمای مورد نیاز تبدیل یخ صفر درجه سلسیوس به آب صفر درجه سلسیوس را به دست می‌آوریم:

$$Q_2 = mL_F \xrightarrow{m=200\text{ g}, L_F=336 \text{ J/g}} Q_2 = 200 \times 336 = 67200 \text{ J}$$

گام چهارم: گرمای مورد نیاز تبدیل آب 40°C به آب صفر درجه سلسیوس را به دست می‌آوریم:

$$Q_3 = mc\Delta\theta \xrightarrow{m=?, c=4/2 \frac{J}{g.K}, \Delta\theta=0-40=-40^{\circ}\text{C}} Q_3 = m \times 4/2 \times (-40) = -168m$$

گام پنجم: با جمع جبری Q ها و برابر قرار دادن آنها با صفر، جرم آب را به دست می‌آوریم:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

$$\Rightarrow 4200 + 67200 - 168m = 0 \Rightarrow 71400 = 168m \Rightarrow m = \frac{71400}{168} \Rightarrow m = 425 \text{ g}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر فشار مقدار معینی گاز کامل، ۲۵ درصد افزایش و حجم آن، ۳۶ درصد کاهش یابد، انرژی درونی آن چند درصد و چگونه تغییر می کند؟

(۱) ۲۰٪، کاهش می یابد.

(۲) ۲۵٪، کاهش می یابد.

(۳) ۲۰٪، افزایش می یابد.

(۴) ۲۵٪، افزایش می یابد.

پاسخ: گزینه ۱

قانون گازهای کامل (آرمانی):

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2}$$

P: فشار مطلق (Pa)

V: حجم (m^3)

n: تعداد مول (mol)

T: دمای مطلق (K)

از قانون گاز کامل در حالت نسبتی استفاده می کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$PV = nRT \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \times \frac{V_2}{V_1} = \frac{125}{100} \times \frac{64}{100} = \frac{80}{100} \Rightarrow T_2 = 0.8 T_1$$

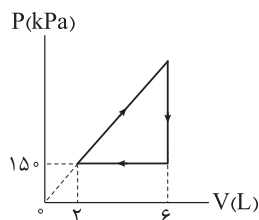
$$T_2 - T_1 = 0.8 T_1 - T_1 = -0.2 T_1$$

بنابراین دما بر حسب کلوین، ۲۰٪ کاهش یافته است.

علامت منفی نشان دهنده کاهش دما است.

برای مقدار معینی گاز، انرژی درونی، تابع دمای مطلق آن است؛ بنابراین انرژی درونی نیز ۲۰٪ کاهش می یابد.

نمودار فشار مقدار معینی گاز کامل برحسب حجم آن در طی چرخه‌ای به شکل زیر است. در این چرخه بین گاز و محیط چند کیلوژول گرما و چگونه مبادله شده است؟



(۱) $6/0^\circ$ ، از گاز به محیط منتقل شده است.

(۲) $9/0^\circ$ ، از گاز به محیط منتقل شده است.

(۳) $6/0^\circ$ ، از محیط به گاز منتقل شده است.

(۴) $9/0^\circ$ ، از محیط به گاز منتقل شده است.

پاسخ: گزینه ۳



با توجه به ثابت بودن شیب پاره‌خطی که امتداد آن از مبدأ نمودار می‌گذرد، بیشینه فشار در چرخه را به دست آورید؛ سپس به کمک مساحت سطح داخل چرخه، کار انجام‌شده را حساب کنید. در انتها نیز با استفاده از قانون اول ترمودینامیک، گرمای مبادله‌شده در چرخه را پیدا کنید.

درس‌Box

قانون اول ترمودینامیک:

در یک فرایند ایستوار، تغییر انرژی درونی دستگاه، برابر است با مجموع کار انجام‌شده توسط محیط روی دستگاه (گاز) و گرمای داده‌شده به دستگاه (گاز).

$$\Delta U = Q + W$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 : \text{تغییر انرژی درونی (J)}$$

$$U_1 : \text{انرژی درونی اولیه (J)}$$

$$U_2 : \text{انرژی درونی نهایی (J)}$$

اگر دستگاه گرما بگیرد، $Q > 0$ و اگر دستگاه گرما از دست بدهد، $Q < 0$.

چرخه ترمودینامیکی:

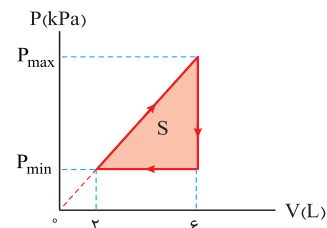
وقتی دستگاه پس از طی چند فرایند مختلف به حالت اولیه خود برمی‌گردد، به مجموعه این فرایندها چرخه ترمودینامیکی گفته می‌شود.

● مساحت سطح داخل یک چرخه در نمودار $P - V$ با قدرمطلق کار انجام‌شده در آن چرخه برابر است. اگر جهت چرخه ساعتگرد باشد، $W < 0$ و اگر پادساعتگرد باشد، $W > 0$ خواهد بود.

● در یک چرخه، تغییر انرژی درونی دستگاه صفر است. ($\Delta U = 0$)

گام اول: در نمودار داده‌شده، شیب پاره‌خطی که امتداد آن از مبدأ می‌گذرد، ثابت است؛ بنابراین می‌توانیم بیشینه فشار ($P_{\max}$)

در چرخه را به دست آوریم:



$$\text{شیب خط} = \frac{P_{\min} - 0}{2 - 0} = \frac{P_{\max} - 0}{6 - 0} \quad \frac{P_{\min} = 15^\circ \text{ kPa}}{15^\circ} \rightarrow \frac{15^\circ}{2} = \frac{P_{\max}}{6} \Rightarrow P_{\max} = 45^\circ \text{ kPa}$$

گام دوم: مساحت سطح داخل چرخه را حساب می‌کنیم تا اندازه کار انجام‌شده در هر چرخه به دست آید:

$$S = |W| = \frac{(P_{\max} - P_{\min})\Delta V}{2} = \frac{(45^\circ - 15^\circ) \times 10^3 \times (6 - 2) \times 10^{-3}}{2}$$

$$\Rightarrow |W| = 300 \times 2 = 600 \text{ J} = 0.6 \text{ kJ}$$

از آن‌جا که چرخه ساعتگرد است، داریم:

$$W = -0.6 \text{ kJ}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فیزیک

گام سوم: با استفاده از قانون اول ترمودینامیک، گرمای مبادله شده بین گاز و محیط در یک چرخه را حساب می کنیم:

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{\Delta U=0} 0 = Q + (-6) \Rightarrow Q = 6 \text{ kJ}$$

چون گرمای محاسبه شده با علامت مثبت به دست آمده است، یعنی دستگاه (گاز) گرما دریافت کرده و به عبارت دیگر گرما از محیط به گاز منتقل شده است.

اگر در محاسبه مساحت داخل چرخه، ارتفاع آن را 450 kPa قرار دهید، در دام گزینه (۴) می افتید.

گول نخوری



در فرمول مولکولی کدام ترکیب، شمار اتم‌های کربن با شمار اتم‌های هیدروژن برابر نیست؟

(۲) استیرن

(۱) استیلن

(۴) استون

(۳) سیانو اتن

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در مولکول استون برخلاف سایر ترکیب‌ها، شمار اتم‌های کربن و هیدروژن برابر نیست.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): استیلن یا اتین $\leftarrow (HC \equiv CH)C_7H_7$

گزینه (۲): استیرن $\leftarrow (CH_2=CH)C_8H_8$



گزینه (۳): سیانو اتن $\leftarrow (CH_2=CH)C_7H_7N$



گزینه (۴): استون $\leftarrow (CH_3C(=O)CH_3)C_7H_8O$



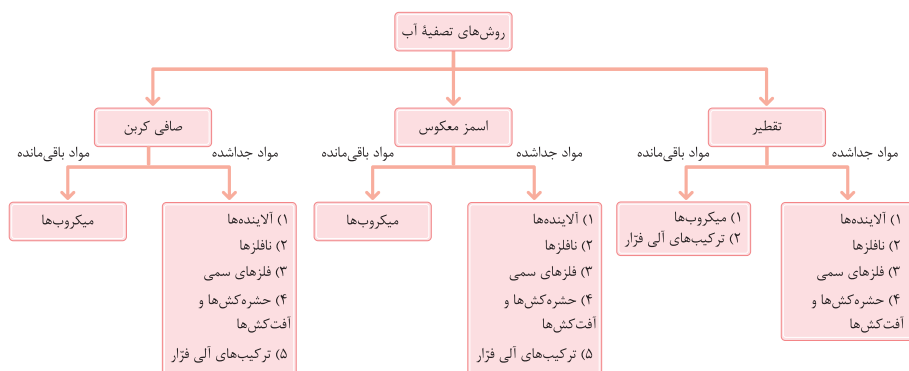
یک نمونه آب به روش‌های تقطیر، صافی کربنی و اسمز معکوس تصفیه می‌شود. کدام مورد در آب تصفیه‌شده به هر سه روش، همچنان وجود دارد؟

- (۱) ترکیب‌های آلی فزار
(۲) نافلرها
(۳) میکروب‌ها
(۴) حشره‌کش‌ها

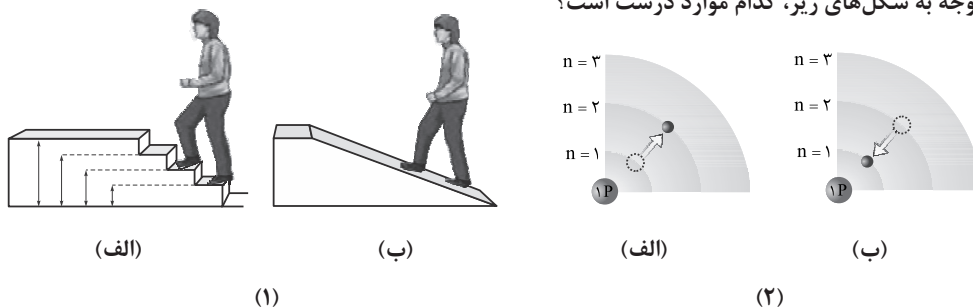
پاسخ: گزینه ۳

در هر سه روش، میکروب‌ها در آب باقی می‌مانند، به همین دلیل قبل از مصرف، آب را باید کلرزی کرد.

✓ پاسخ خیلی تشریحی



با توجه به شکل‌های زیر، کدام موارد درست است؟



الف) مبادله انرژی در انتقال الکترون بین لایه‌ها در مدل کوانتومی اتم، مشابه شکل (۱ - الف) است.
 ب) مقدار انرژی مبادله شده در انتقال‌های انجام شده در شکل (۲) با هم برابر است.
 پ) طبق مدل بور، مبادله انرژی الکترون بین لایه‌ها در اتم هیدروژن مشابه شکل (۱ - ب) است.
 ت) انرژی پرتو حاصل در شکل (۲ - ب) کم‌تر از انرژی پرتو بنفش‌رنگ است.

پ و ت

الف و ب

ب و ت

الف و پ

پاسخ: گزینه ۱

عبارت‌های «الف» و «ب» درست‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی عبارت‌ها:

الف و پ) هم در مدل بور و هم در مدل کوانتومی، انرژی الکترون در لایه‌ها کوانتومی (گسسته) در نظر گرفته می‌شود و مشابه شکل (۱ - الف) است.

ب) انرژی مبادله شده در انتقال الکترون از یک لایه به لایه بالاتر (n_1 به n_2), با انرژی مبادله شده در بازگشت الکترون (n_2 به n_1) برابر است.

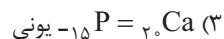
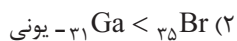
ت) شکل (۲ - ب) انتقال الکترون از لایه دوم به لایه اول را نشان می‌دهد. با توجه به این که اختلاف سطح انرژی لایه‌های اول و دوم، بیشتر از لایه‌های دوم و سوم است، پرتو نشر شده در انتقال $n = 2 \rightarrow n = 1$ در محدوده فرابنفش (طول موج کوتاه‌تر از مرئی) قرار دارد.

طول موج پرتوهای حاصل از همه انتقال‌های الکترونی در اتم هیدروژن و این که هر یک در کدام گستره امواج الکترومغناطیس قرار می‌گیرند، در زیر آورده شده است:

فرابنفش	>	نور مرئی	>	فروسرخ	طول موج
انتقال از لایه‌های بالاتر به لایه اول (مانند $n = 5 \rightarrow n = 1$) و انتقال از لایه هفتم به لایه دوم ($n = 7 \rightarrow n = 2$)		انتقال از لایه‌های ۳، ۴، ۵، ۶ به لایه دوم ($n = 6, 5, 4, 3 \rightarrow n = 2$)		انتقال از لایه‌های بالاتر به یکی از لایه‌های سوم تا پنجم (مانند $n = 4 \rightarrow n = 3$)	

نکته

در کدام گزینه، مقایسهٔ شمار لایه‌های الکترونی پر شده در دو اتم به درستی انجام شده و ترکیب حاصل از دو عنصر، از کدام نوع (مولکولی یا یونی) است؟



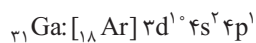
پاسخ: گزینهٔ ۲

بررسی گزینه‌ها:

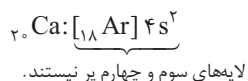
✓ پاسخ خیلی تشریحی

ترکیب حاصل از یک فلز و یک نافلز، یونی است؛ بنابراین گزینهٔ (۱) را رد!

گزینهٔ (۲): در هر دو اتم Ga و Br ، سه لایهٔ الکترونی اول به طور کامل پر شده‌اند.



گزینهٔ (۳): در هر دو اتم P و Ca ، فقط لایه‌های اول و دوم به طور کامل پر شده‌اند.



گزینهٔ (۴): در هر دو اتم O و F ، فقط لایهٔ اول به طور کامل پر شده است:



با توجه به جدول دوره‌ای عناصرها، کدام موارد درست است؟

(الف) شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم عناصر در دوره سوم برخلاف اتم عناصر دوره چهارم، با افزایش عدد اتمی به طور منظم افزایش می‌یابد.

(ب) تفاوت عدد اتمی نخستین نافلز دوره دوم و قوی‌ترین نافلز جامد دوره سوم، برابر عدد اتمی عنصر سازنده دومین گاز فراوان هواکره است.

(پ) مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های ظرفیت در اتم سبک‌ترین شبه‌فلز گروه ۱۴، با عدد اتمی آن برابر است.

(ت) نخستین عنصری که لایه سوم اتم آن کاملاً پر می‌شود، دارای ۸ الکترون با $l=0$ است.

${}_{14}\text{Si}$

(۲) ب و ت

(۱) الف و ت

(۴) الف و پ

(۳) ب و پ

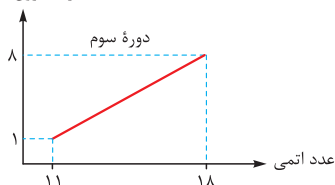
پاسخ: گزینه ۴

عبارت‌های «الف» و «پ» درست‌اند.

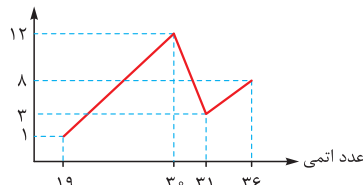
بررسی عبارت‌ها:

(الف) در دوره سوم شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم‌ها از Na تا Ar روند افزایشی دارد، ولی در دوره چهارم، این روند منظم نیست.

شمار الکترون ظرفیتی



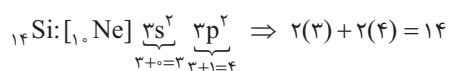
شمار الکترون ظرفیتی



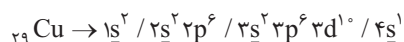
شمار الکترون‌های ظرفیتی برای اتم عناصرهای گروه‌های ۱ تا ۱۲ برابر با شماره گروه و برای اتم عناصرهای گروه‌های ۱۳ تا ۱۸ برابر با یکان شماره گروه است.

(ب) نخستین نافلز دوره دوم، C و قوی‌ترین نافلز جامد دوره سوم، S است که تفاوت عدد اتمی آن‌ها ۱۰ واحد است. دومین گاز فراوان هواکره اکسیژن است. عدد اتمی عنصر اکسیژن (O) برابر ۸ است.

(پ) سبک‌ترین شبه‌فلز گروه ۱۴، سیلیسیم است:



(ت) نخستین عنصری که لایه سوم اتم آن کاملاً پر می‌شود، Cu با ۲۹ الکترون با $l=0$ است. (منظور از $l=0$ زیرلایه s است.)



(سؤال ۷۷ کنکور تهرانی ۱۴۰۴ - توبت دوم)

کدام موارد درباره «جدول تناوبی عناصرها» درست است؟

(الف) تفاوت عدد اتمی قوی‌ترین نافلز گروه ۱۶ و قوی‌ترین فلز دوره دوم، برابر ۶ است.

(ب) تفاوت عدد اتمی قوی‌ترین نافلز جامد دوره سوم و نخستین عنصر واسطه دوره چهارم، برابر ۵ است.

(ج) شمار عناصرهای میان نخستین شبه‌فلز گروه ۱۴ و دومین نافلز دوره سوم، برابر عدد اتمی یک گاز نجیب جدول است.

(د) مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های ظرفیت نافلز مایع دوره چهارم، برابر با عدد اتمی یکی از عناصرهای گروه ۱۵ است.

(۲) «الف» و «ج»

(۱) «الف» و «ب»

(۴) «ج» و «د»

(۳) «ب» و «د»

- (۱) گازی که در میان اجزای هوای پاک و خشک رتبه سوم را از لحاظ درصد حجمی دارد، دومین گازی است که در تقطیر جزء به جزء هوای مایع از ستون تقطیر خارج می‌شود. Ar
- (۲) در فرایند جداسازی اجزای هوا، اولین گاز خارج شده بعد از رطوبت هوا، گاز کربن دی‌اکسید است که در دمای 185 K به حالت جامد از هوا خارج می‌شود.
- (۳) آرایش الکترون - نقطه‌ای X، منحصربه‌فرد و متعلق به عنصری است که در حدود ۷ درصد حجمی از مخلوط گاز طبیعی را تشکیل می‌دهد.
- (۴) در دما و فشار اتاق، مخلوطی از گازهای N_2 و H_2 برخلاف مخلوط گازهای O_2 و H_2 ، در حضور جرقه منفجر نمی‌شود.

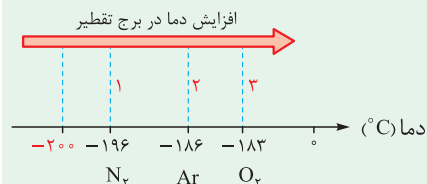
پاسخ: گزینه ۲

بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): سومین گاز هوای پاک و خشک، آرگون است که در ستون تقطیر، بعد از نیتروژن از مخلوط جدا می‌شود.

با گرم کردن هوای مایع در ستون تقطیر، هر چه نقطه جوش ماده‌ای پایین‌تر باشد، زودتر به جوش آمده و زودتر از مخلوط خارج می‌شود.



مقایسه نقطه جوش: $\text{N}_2 < \text{Ar} < \text{O}_2$
 $-196^\circ\text{C} \quad -186^\circ\text{C} \quad -183^\circ\text{C}$

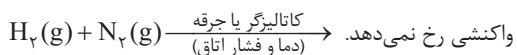
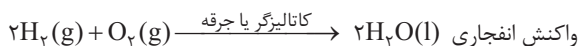
ترتیب جداسازی گازها: $\text{N}_2 \rightarrow \text{Ar} \rightarrow \text{O}_2$ گزینه (۲): در فرایند جداسازی اجزای هوا، بعد از رطوبت، کربن دی‌اکسید در دمای -78°C به صورت جامد از هوا جدا می‌شود.

$$T(\text{K}) = \theta(^{\circ}\text{C}) + 273 = -78 + 273 = 195\text{ K}$$

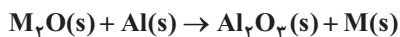
گزینه (۳): آرایش الکترون - نقطه‌ای X: را فقط می‌توان به هلیوم نسبت داد. هلیوم حدود ۷ درصد حجمی گاز طبیعی را تشکیل می‌دهد.

 $\Rightarrow \text{He}$: آرایش الکترون - نقطه‌ای هلیوم با دو الکترون ظرفیتی $\Rightarrow \text{A}$: آرایش الکترون - نقطه‌ای عنصرهای گروه ۲ با دو الکترون ظرفیتی

گزینه (۴): گاز نیتروژن، فراوان‌ترین گاز سازنده هواکره است و واکنش‌پذیری ناچیزی دارد، به طوری که عملاً در مقایسه با اکسیژن که واکنش‌پذیری بالایی دارد، گازی غیرفعال و واکنش‌ناپذیر محسوب می‌شود. *نشون به این نشون که در دما و فشار اتاق، گاز اکسیژن با گاز هیدروژن در حضور کاتالیزگر یا جرقه، واکنش می‌دهد، اما گاز نیتروژن با گاز هیدروژن هیچ واکنشی نمی‌دهد:*



۸۲ با توجه به معادله داده شده، کدام مورد نادرست است؟



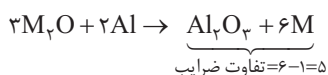
- (۱) پس از موازنه، تفاوت ضرایب استوکیومتری فراورده‌ها برابر ۵ است.
- (۲) ترکیب موجود در فراورده‌ها، یکی از واکنش‌دهنده‌های فرایند هال است.
- (۳) عنصر M می‌تواند فلز مس یا کروم باشد.
- (۴) یک واکنش اکسایش - کاهش است و در آن، آلومینیم نقش کاهنده را دارد.

پاسخ: گزینه ۳

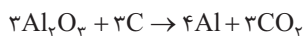
پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به فرمول M_2O ، نماد کاتیون M به صورت M^+ است. مس دارای کاتیون‌های یک بار مثبت (Cu^+) و دو بار مثبت (Cu^{2+}) است، اما کروم دارای کاتیون‌های Cr^{2+} و Cr^{3+} می‌باشد؛ پس M نمی‌تواند فلز کروم باشد. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): معادله موازنه شده واکنش به صورت زیر است:

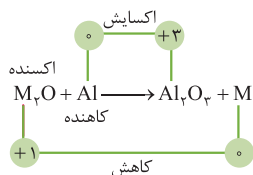


گزینه (۲): Al_2O_3 یکی از واکنش‌دهنده‌های فرایند هال است:

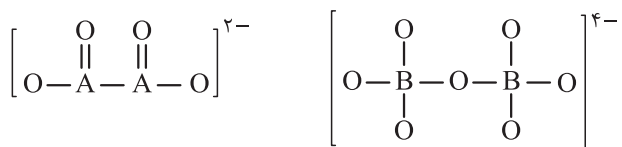


گزینه (۴): در واکنش مورد نظر، عدد اکسایش M و Al تغییر می‌کند؛ پس از نوع اکسایش - کاهش است. همچنین آلومینیم،

اکسایش یافته و نقش کاهنده را دارد.



اگر در ساختارهای زیر، A عنصری از دوره دوم و B عنصری از دوره سوم جدول تناوبی باشد، کدام مطلب در مورد این دو عنصر درست است؟ (در ساختار یون‌های داده شده، همه اتم‌ها از قاعده هشت‌تایی پیروی می‌کنند.)



(۱) B عنصری نیمه‌رسانا است که با هیچ عنصر گازی در جدول تناوبی هم‌گروه نیست.

(۲) A نافلز است که در آخرین زیرلایه الکترونی آن چهار الکترون وجود دارد و حداقل دو نوع اکسید تشکیل می‌دهد.

(۳) یکی از رادیوایزوتوپ‌های عنصر B در ایران تولید می‌شود و اختلاف عدد اتمی A و B برابر عدد اتمی نخستین هالوژن جدول است.

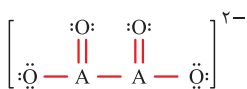
(۴) اتم A تمایل دارد با گرفتن یا اشتراک الکترون، خود را به آرایش هشت‌تایی برساند و ایزوتوپی از آن که شمار پروتون و نوترون برابری دارد، در طبیعت فراوان‌تر است.

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به تعداد کل الکترون‌های به‌کاررفته در ساختار لوویس یک یون، می‌توان از فرمول زیر برای محاسبه بار یک یون مجهول استفاده کرد.

(مجموع شمار الکترون‌های به‌کاررفته در ساختار لوویس) - (مجموع شمار الکترون‌های لایه ظرفیت اتم‌ها) = بار یون (q)

ابتدا باید با مشخص کردن شمار الکترون‌های ظرفیتی A و B، این عناصر را پیدا کنیم:

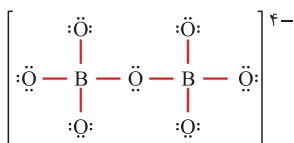


الکترون‌های پیوندی

$$-2 = (2A + (4 \times 6)) - (\overset{+}{2} + \overset{+}{16}) \Rightarrow A = 4$$

الکترون‌های ناپیوندی

A دارای ۴ الکترون ظرفیتی بوده و متعلق به دوره دوم است. $\leftarrow C$



الکترون‌های پیوندی

$$-4 = (2B + (7 \times 6)) - (\overset{+}{4} + \overset{+}{16}) \Rightarrow B = 5$$

الکترون‌های ناپیوندی

B دارای ۵ الکترون ظرفیتی بوده و متعلق به دوره سوم است. $\leftarrow P$

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): فسفر، نافلز و نارسانا است. در ضمن فسفر با نیتروژن که در دما و فشار اتاق به حالت گاز است، هم‌گروه می‌باشد.

گزینه (۲): A، کربن است که در آخرین زیرلایه اتم آن، ۲ الکترون وجود دارد:



گزینه (۳): در فصل اول شیمی دهم، شکلی از رادیوایزوتوپ فسفر تولیدشده در ایران نشان داده شده است.

عدد اتمی q_F (نخستین هالوژن) $\Rightarrow 9 = 15 - 6 = 9$ تفاوت عدد اتمی A و B

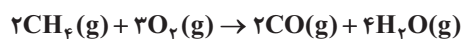
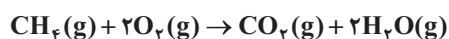
گزینه (۴): A، نافلز کربن است که فقط با اشتراک الکترون به آرایش هشت‌تایی می‌رسد.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

در دو فرایند جداگانه، ۱۲/۸ گرم گاز متان مطابق معادله‌های زیر می‌سوزد. اختلاف حجم گاز اکسیژن مصرف شده در این دو فرایند در شرایط STP چند لیتر است و در این دو واکنش، در مجموع چند گرم بخار آب تولید می‌شود؟

$$(H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1})$$



$$57/6 - 8/96 \quad (2)$$

$$28/8 - 8/96 \quad (1)$$

$$57/6 - 17/92 \quad (4)$$

$$28/8 - 17/92 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

طبق معادله‌های داده شده، به ازای مصرف ۱ مول متان در واکنش اول، ۲ مول O_2 و در واکنش دوم، $\frac{3}{2} = 1.5$ مول O_2 مصرف می‌شود؛ یعنی اختلاف تعداد مول گاز اکسیژن مصرف شده در دو واکنش به ازای مصرف ۱ مول متان برابر ۰.۵ مول است. به ازای ۱۲/۸ گرم متان خواهیم داشت:

$$12/8 \text{ g } CH_4 \times \frac{1 \text{ mol } CH_4}{16 \text{ g } CH_4} \times \frac{0.5 \text{ mol } O_2}{1 \text{ mol } CH_4} \times \frac{22.4 \text{ L } O_2}{1 \text{ mol } O_2} = 8/96 \text{ L } O_2$$

در هر دو واکنش، به ازای مصرف ۱ مول CH_4 ، ۲ مول H_2O تولید می‌شود:

$$12/8 \text{ g } CH_4 \times \frac{1 \text{ mol } CH_4}{16 \text{ g } CH_4} \times \frac{2 \text{ mol } H_2O}{1 \text{ mol } CH_4} \times \frac{18 \text{ g } H_2O}{1 \text{ mol } H_2O} = 28/8 \text{ g } H_2O$$

$$H_2O \text{ جرم کل} = 2 \times 28/8 = 57/6 \text{ g}$$

جدول زیر، انحلال پذیری گاز نیتروژن مونوکسید را در دمای 20°C و در فشارهای مختلف نشان می دهد. کدام مورد درست است؟ ($N = 14$, $O = 16$: g.mol^{-1})

P(atm)	۲/۵	۶	۸
$S(\frac{\text{mg}}{100\text{ g H}_2\text{O}})$	۱۶/۵	۳۹/۶	۵۲/۸

(۱) معادله انحلال پذیری نیتروژن مونوکسید (بر حسب گرم در 100 گرم آب) بر حسب فشار را می توان به صورت $S = 6/6 P$ نشان داد.

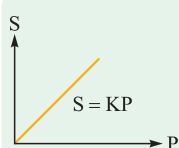
(۲) برای انحلال کامل $66/22 \times 10^{-19}$ مولکول NO در 100 گرم آب با دمای 20°C ، فشار گاز حداقل باید ۵ اتمسفر باشد.

(۳) در دمای 10°C و فشار 3 atm نیز انحلال پذیری گاز نیتروژن مونوکسید برابر $39/6$ میلی گرم است.

(۴) در فشار 9 atm و دمای 20°C ، انحلال پذیری گاز اکسیژن می تواند برابر $62/4$ میلی گرم در 100 گرم آب باشد.

پاسخ: گزینه ۲

نمودار انحلال پذیری گازها بر حسب فشار، به صورت یک خط راست با عرض از مبدأ صفر است.



به این ترتیب، با n برابر شدن فشار گاز در دمای ثابت، انحلال پذیری گاز نیز n برابر می شود.

بررسی گزینه ها:

گزینه (۱): معادله انحلال پذیری گازها بر حسب فشار را می توان به صورت $S = KP$ نشان داد. برای به دست آوردن K ، کافی است مقدار انحلال پذیری در یک فشار را به آن فشار تقسیم کنیم.

$$K = \frac{S}{P} = \frac{16/5 \times 10^{-3} \text{ g}}{2/5 \text{ atm}} = 6/6 \times 10^{-3} \Rightarrow S = 6/6 \times 10^{-3} P$$

دقت کنید که در جدول، انحلال پذیری گاز بر حسب میلی گرم داده شده است.

گزینه (۲): ابتدا ببینیم $66/22 \times 10^{-19}$ مولکول NO معادل چند گرم است:

$$66/22 \times 10^{-19} \text{ مولکول} \times \frac{1 \text{ mol NO}}{6/02 \times 10^{23} \text{ مولکول}} \times \frac{30 \text{ g NO}}{1 \text{ mol NO}} = 0/033 \text{ g NO}$$

حالا با توجه به معادله انحلال پذیری، فشار گاز را حساب می کنیم:

$$S = 6/6 \times 10^{-3} P \Rightarrow 0/033 = 6/6 \times 10^{-3} P \Rightarrow P = \frac{1}{2 \times 10^{-1}} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ atm}$$

گزینه (۳): در دمای ثابت، با نصف شدن فشار از 6 atm به 3 atm ، انحلال پذیری گاز نصف شده و به $39/6$ می رسد. هر چند با کاهش دما از 20°C به 10°C ، انحلال پذیری گاز افزایش می یابد، اما دقیقاً دو برابر نمی شود، زیرا نمودار انحلال پذیری گازها بر حسب دما، خطی نیست.

گزینه (۴): در فشار 9 atm ، انحلال پذیری NO، $1/5$ برابر انحلال پذیری آن در فشار 6 atm است:

$$S = 1/5 \times 39/6 = 59/4 \text{ mg}$$

O_2 ، ناقطبی است و در شرایط یکسان، انحلال پذیری کمتری نسبت به NO ($S < 59/4$) دارد؛ بنابراین انحلال پذیری O_2 در فشار 9 atm نمی تواند عدد $62/4$ باشد.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

کدام مورد درست است؟ **۸۶**

- (۱) نقطه جوش آب (برحسب کلوین)، بیش از دو برابر نقطه جوش هیدروژن سولفید در فشار ۱ اتمسفر است.
- (۲) هر چه جرم مولی یک ماده بیشتر باشد، جهت گیری مولکول های آن در میدان الکتریکی، محسوس تر است.
- (۳) در انحلال یونی مانند حل شدن اتانول در آب، مولکول های حلال و حل شونده با یکدیگر جاذبه یون - دوقطبی برقرار می کنند.
- (۴) ممکن است یک ماده ساختار مولکولی داشته باشد، اما با اضافه شدن به آب، به صورت یونی در آن حل شود.

پاسخ: گزینه ۴

بررسی گزینه ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): نقطه جوش آب و هیدروژن سولفید به ترتیب 100°C و -60°C است:

$$\frac{T(\text{H}_2\text{O})}{T(\text{H}_2\text{S})} = \frac{(100 + 273)\text{K}}{(-60 + 273)\text{K}} = \frac{373}{213} \approx 1/75$$

دقت کنید که گشتاور دوقطبی آب، حدود دو برابر گشتاور دوقطبی هیدروژن سولفید است.

$$\frac{\mu(\text{H}_2\text{O})}{\mu(\text{H}_2\text{S})} = \frac{1/85\text{ D}}{0/97\text{ D}} \approx 1/9$$

گزینه (۲): جهت گیری مولکول ها در میدان الکتریکی به میزان قطبیت آن ها بستگی دارد، یعنی هر چه گشتاور دوقطبی یک مولکول بیشتر باشد، جهت گیری آن در میدان الکتریکی محسوس تر است.

گزینه (۳): جاذبه بین مولکول های اتانول ($\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$) و آب از نوع پیوند هیدروژنی است. جاذبه یون - دوقطبی بین یون ها و حلال های قطبی برقرار می شود.گزینه (۴): مثلاً HCl یک ترکیب مولکولی است، اما در آب به طور کامل یونیده می شود و انحلال آن از نوع یونی است.

کدام مورد دربارهٔ جدول تناوبی عناصر درست است؟

- (۱) در هر گروه، شمار عنصرهای شبه‌فلزی کم‌تر از شمار عنصرهای نافلزی است.
 (۲) اگر فعالیت شیمیایی فلز X بیشتر از فلز قلیایی M باشد، X و M در یک دوره قرار ندارند.
 (۳) اگر A تنها نافلز مایع جدول باشد، نزدیک‌ترین فلز هم‌دوره به آن با تشکیل کاتیون به آرایش گاز نجیب می‌رسد.

${}_{35}\text{Br}$

- (۴) اگر شعاع اتمی B از عنصر هم‌گروه آن (R) بیشتر باشد، واکنش‌پذیری B از R بیشتر است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

بررسی گزینه‌ها:

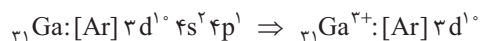
پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینهٔ (۱): مثلاً در گروه ۱۴، شمار عنصرهای شبه‌فلزی بیشتر از شمار عنصرهای نافلزی است.

نافلز	C ۶
شبه‌فلز	Si ۱۴
	Ge ۳۲
	Sn ۵۰
فلز	Pb ۸۲

گزینهٔ (۲): در بین فلزهای هر دوره، فلزهای قلیایی (گروه ۱) بیشترین واکنش‌پذیری را دارند؛ پس اگر واکنش‌پذیری فلزی از یک فلز قلیایی بیشتر باشد، آن فلز نمی‌تواند با آن فلز قلیایی هم‌دوره باشد.

گزینهٔ (۳): تنها نافلز مایع جدول دوره‌ای، برم (${}_{35}\text{Br}$) است. نزدیک‌ترین فلز هم‌دوره به برم، گالیوم است که کاتیون آن به آرایش گاز نجیب نمی‌رسد.



گزینهٔ (۴): واکنش‌پذیری عناصر فقط به شعاع اتمی آن‌ها وابسته نیست. به نوع عنصر (فلز یا نافلز) نیز بستگی دارد. در فلزها، واکنش‌پذیری با شعاع اتمی رابطهٔ مستقیم دارد، در حالی که در نافلزها، واکنش‌پذیری با شعاع اتمی رابطهٔ وارونه دارد.

افزایش شعاع اتمی	Li	افزایش واکنش‌پذیری	F	کاهش واکنش‌پذیری
	Na		Cl	
	K		Br	

(سؤال ۸۸ کنکور تهری ۱۴۰۲ (خارج از کشور))

چند مورد از موارد زیر دربارهٔ عنصرهای جدول دوره‌ای، درست است؟

- شمار الکترون‌های ظرفیتی عناصر گروه‌های مختلف، می‌تواند برابر باشد.
- شعاع اتمی نافلز مایع جدول (Z)، از شعاع اتمی فلز مایع جدول (R)، کوچک‌تر است.
- اگر فعالیت شیمیایی نافلز Y بیشتر از هالوژن D باشد، این دو عنصر در یک دوره جای ندارند.
- اگر شعاع اتمی نافلز X ، برابر r_1 باشد، شعاع اتمی فلز هم‌گروه X ، به یقین، بزرگ‌تر از r_1 است.

۱ (۴)

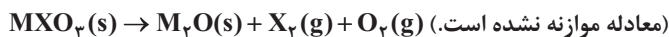
۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)



۲۵۲/۵ گرم از نمک MXO_3 با خلوص ۸۰ درصد مطابق واکنش زیر تجزیه می‌شود:



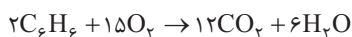
اگر طی این فرایند، ۹۴ گرم M_2O تولید شود و نیمی از گاز اکسیژن تولیدشده بتواند ۱۳ گرم بنزن را به طور کامل بسوزاند، تفاوت جرم مولی دو عنصر M و X چند گرم است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1}$)

۹ (۱) ۲۵ (۲) ۳۵ (۳) ۴۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

معادله موازنه‌شده تجزیه MXO_3 و سوختن کامل بنزن به صورت زیر است:



ابتدا با توجه به جرم بنزن، تعداد مول گاز اکسیژن مصرف‌شده در واکنش سوختن بنزن و سپس تعداد مول گاز اکسیژن تولیدشده در تجزیه MXO_3 را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{13}{2 \times 78} = \frac{X}{15} \Rightarrow X = \frac{15}{2 \times 6} = \frac{5}{4} \text{ mol } O_2$$

با توجه به اطلاعات این سؤال، این مقدار O_2 ، نصف O_2 تولیدشده در تجزیه MXO_3 است:

$$MXO_3 \text{ تجزیه } O_2 \text{ تعداد مول } O_2 \text{ تولیدشده در واکنش تجزیه } = 2 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2} \text{ mol}$$

حالا با توجه به مقدار MXO_3 ، M_2O و O_2 در واکنش اول، می‌توانیم جرم مولی M و X را حساب کنیم:



$$\frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{100} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{252/5 \times \frac{80}{100}}{4(M+X+48)} = \frac{47}{2(2M+16)} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{50/5}{M+X+48} = \frac{47}{2M+16} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{47}{2M+16} = \frac{1}{2} \Rightarrow 94 = 2M+16 \Rightarrow M = 39 \\ \frac{50/5}{M+X+48} = \frac{1}{2} \Rightarrow 101 = 39+X+48 \Rightarrow X = 14 \end{cases}$$

$$M - X = 39 - 14 = 25$$

اگر شمار مولکول‌های موجود در ۳۳ گرم C_1H_n با مجموع شمار اتم‌ها در یک گرم پروپان برابر باشد و این ترکیب فاقد پیوند سه‌گانه و دارای یک حلقه باشد، چند پیوند دوگانه در ساختار آن وجود دارد؟ ($H = 1, C = 12 : g.mol^{-1}$)

- ۵ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۲



برای محاسبه شمار اتم‌های هیدروژن در هیدروکربن‌ها می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد:

(تعداد پیوندهای سه‌گانه $\times 4$) - (تعداد حلقه‌ها + تعداد پیوندهای دوگانه $\times 2$) - $2n + 2$ = شمار اتم‌های هیدروژن یک هیدروکربن n کربنی

گام اول: محاسبه مجموع شمار مول اتم‌ها در یک گرم پروپان:

$C_3H_8 \sim 11$ اتم

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{اتم}} \Rightarrow \frac{1}{44} = \frac{x}{11} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ mol اتم}$$

گام دوم: محاسبه n در C_1H_n :

طبق اطلاعات سؤال در ۳۳ گرم از این ترکیب، $\frac{1}{4}$ مول مولکول وجود دارد:

$C_1H_n \sim 1$ مولکول

$$\frac{33}{120 + n} = \frac{1}{4} \Rightarrow 132 = 120 + n \Rightarrow n = 12$$

گام سوم: محاسبه تعداد پیوندهای دوگانه در $C_{12}H_{22}$:

با فرمول شمار اتم‌های هیدروژن، تعداد پیوندهای دوگانه در این ترکیب را به دست می‌آوریم:

$$12 = \underbrace{(2 \times 12)}_{2n+2} + 2 - 2(\underbrace{x}_{\text{تعداد حلقه}} + \underbrace{1}_{\text{تعداد پیوندهای دوگانه}}) \Rightarrow x = 4$$

۹۰ کدام مورد درست است؟

- (۱) انجام واکنش تولید متان از عناصر سازنده‌اش، به دلیل گرماگیر بودن دشوار است.
- (۲) با افزایش درصد جرمی هیدروژن در آلکان‌ها، گرمای سوختن مولی آن‌ها نیز افزایش می‌یابد.
- (۳) برای پیوندهای $C \equiv O$ و $H-C$ برخلاف پیوندهای $N \equiv N$ و $H-Cl$ ، از میانگین آنتالپی پیوند استفاده می‌شود.
- (۴) اگر واکنش $A(l) \rightarrow B(g)$ گرماده باشد، واکنش $A(g) \rightarrow B(l)$ نیز به یقین گرماده است.

پاسخ: گزینه ۴

بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): واکنش $CH_4(g) \rightarrow 2H_2(g) + C(s)$ (گرافیت)، گرماده است. تأمین شرایط بهینه برای انجام این واکنش در آزمایشگاه، بسیار دشوار است.

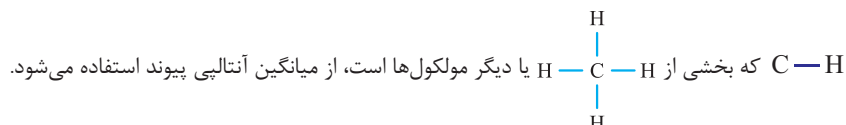
گزینه (۲): در آلکان‌ها با افزایش جرم مولی، درصد جرمی کربن افزایش و درصد جرمی هیدروژن کاهش می‌یابد؛ مثلاً:

$$CH_4 \begin{cases} 12 \text{ g C} \rightarrow \%C = \frac{12}{16} \times 100 = 75 \\ 4 \text{ g H} \rightarrow \%H = \frac{4}{16} \times 100 = 25 \end{cases}$$

$$C_2H_6 \begin{cases} 24 \text{ g C} \rightarrow \%C = \frac{24}{30} \times 100 = 80 \\ 6 \text{ g H} \rightarrow \%H = \frac{6}{30} \times 100 = 20 \end{cases}$$

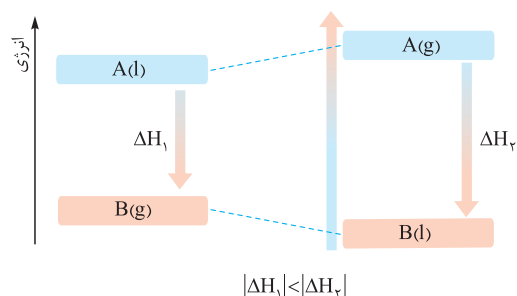
پس با افزایش درصد جرمی هیدروژن، آلکان سبک‌تر و جرم مولی کم‌تر می‌شود، در حالی که در آلکان‌های سبک‌تر با جرم مولی کم‌تر، گرمای سوختن مولی کم‌تر است.

گزینه (۳): در پیوندهای موجود در مولکول‌های دواتمی مستقل مانند کربن مونوکسید ($C \equiv O$) و نیتروژن ($N \equiv N$) و هیدروژن کلرید ($H-Cl$) از آنتالپی پیوند استفاده می‌شود، اما زمانی که پیوند قسمتی از یک مولکول بزرگ‌تر باشد مانند

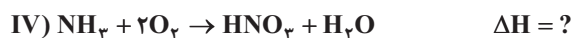
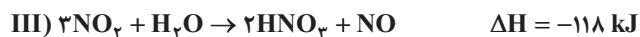


گزینه (۴): اگر واکنش $A(l) \rightarrow B(g)$ گرماده باشد، با تبدیل $A(l)$ به $A(g)$ و تبدیل $B(g)$ به $B(l)$ اختلاف انرژی بین واکنش‌دهنده و فراورده (ΔH) افزایش می‌یابد و واکنش گرماده‌تر می‌شود.

برای دو واکنش فوق می‌توان نمودار انرژی زیر را در نظر گرفت:



با توجه به ΔH واکنش‌های (I) تا (III)، اگر سرعت تولید انرژی در واکنش (IV)، $2/3$ کیلوژول بر ثانیه باشد، سرعت مصرف گاز اکسیژن در این واکنش چند گرم بر دقیقه است؟ ($O = 16 \text{ g.mol}^{-1}$)



۴۰ (۴)

۳۲ (۳)

۲۴ (۲)

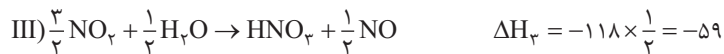
۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با توجه به قانون هس، ΔH واکنش (IV) را به دست می‌آوریم:

واکنش (I) را در $\frac{1}{4}$ و واکنش (II) را در $\frac{3}{4}$ و واکنش (III) را در $\frac{1}{4}$ ضرب می‌کنیم:



بنابراین ΔH واکنش (IV) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta H = (-225) + (-84) + (-29.5) = -338.5 \text{ kJ}$$

گام دوم: برای محاسبه سرعت مصرف اکسیژن بر حسب گرم بر دقیقه، باید گرم اکسیژن مصرفی را در یک دقیقه محاسبه کرد:

$$1 \text{ min} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \times \frac{2/3 \text{ kJ}}{1 \text{ s}} \times \frac{2 \text{ mol O}_2}{338.5 \text{ kJ}} \times \frac{32 \text{ g O}_2}{1 \text{ mol O}_2} = 24 \text{ g O}_2$$

(۱) لیکوپن و بنزوئیک اسید نمونه‌هایی از نگهدارنده‌ها هستند که فعالیت رادیکال‌های آزاد در بدن را کاهش می‌دهند.

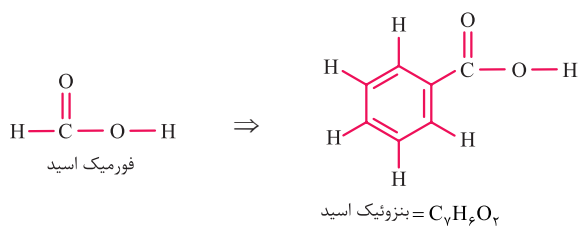
(۲) اگر هیدروژن متصل به کربن را در فورمیک اسید، با سرگروه خانوادهٔ آروماتیک‌ها جایگزین کنیم، ترکیب موجود در توت‌فرنگی با فرمول $C_7H_6O_2$ حاصل می‌شود.

(۳) گروه عاملی که طعم و بوی گشنیز به طور عمده به آن وابسته است، در کلسترول نیز وجود دارد.

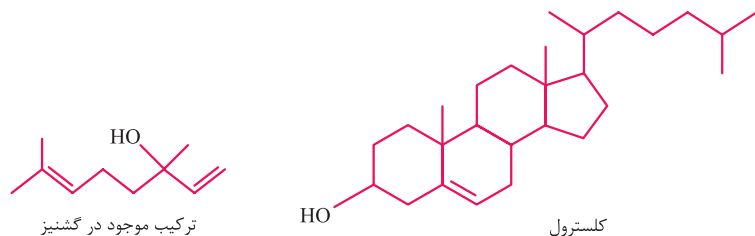
(۴) در الگوی کاهش ردپای غذا، طراحی مواد و فراورده‌های شیمیایی سالم‌تر، موجب کاهش مصرف غذاهای فراوری شده می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینہ (۲):



گزینه (۳): گشیز و کسترول، دارای گروه عاملی هیدروکسیل (OH) هستند:



گزینہ (۴): کمالا درستہ!

کدام ویژگی زیر در مولکول استر حلال چسب با اسید آلی سازنده آن، یکسان است؟

اتیل استات

(۱) نسبت شمار پیوندهای C-H به C-C

(۲) شمار اتم‌های کربن با عدد اکسایش مثبت

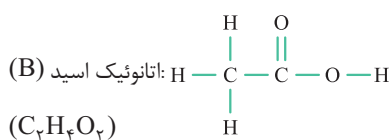
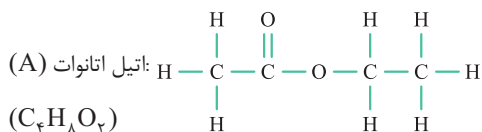
(۳) شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی

(۴) شمار مول گاز اکسیژن مورد نیاز برای سوختن کامل ۱ مول از آن

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

استر حلال چسب، همان اتیل اتانوات است که از اتانول و اتانویک اسید به دست می‌آید:

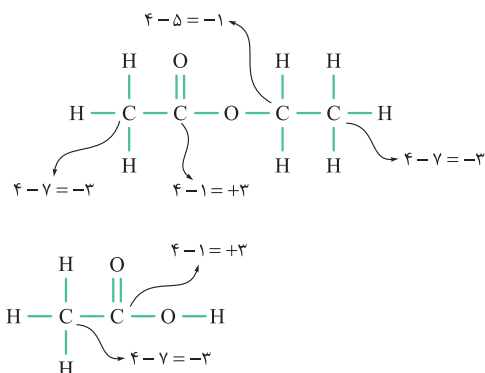


بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): در مولکول A به ترتیب، ۸ پیوند C-H و ۲ پیوند C-C و در مولکول B، به ترتیب ۳ پیوند C-H و ۱ پیوند C-C وجود دارد:

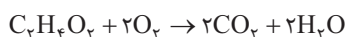
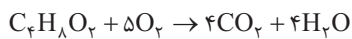
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{شمار پیوندهای C-H} \\ \text{شمار پیوندهای C-C} \end{array} \right. \begin{array}{l} A \rightarrow \frac{8}{2} = 4 \\ B \rightarrow \frac{3}{1} = 3 \end{array}$$

گزینه (۲): در هر دو مولکول، ۱ اتم کربن با عدد اکسایش مثبت وجود دارد:

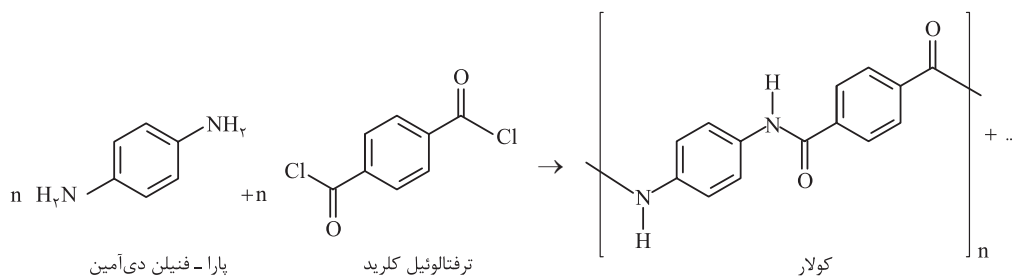


گزینه (۳): در ساختار مولکول‌های A و B، به ترتیب ۱۴ و ۸ جفت‌الکترون پیوندی (پیوند اشتراکی) وجود دارد.

گزینه (۴): معادله واکنش سوختن کامل ۱ مول از ترکیب‌ها را می‌نویسیم:



کولار را در صنعت از واکنش پارا-فنیلن دی آمین و ترفتالوئیل کلرید، مطابق معادله زیر تهیه می کنند:

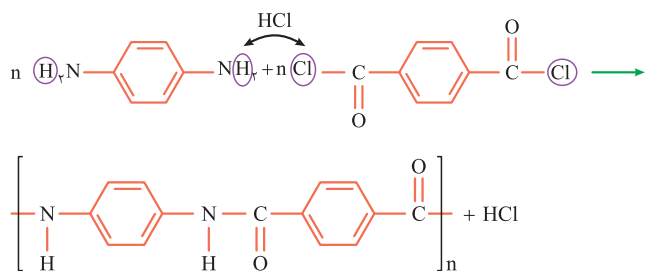


کدام مورد نادرست است؟

- (۱) کولار، یک پلی آمید آروماتیک است و توانایی برقراری پیوند هیدروژنی را دارد.
- (۲) فراورده جانبی این واکنش، در واکنش تهیه PET از اتیلن گلیکول و ترفتالیک اسید نیز تولید می شود.
- (۳) نسبت شمار جفت الکترون های پیوندی به ناپیوندی در ساختار ترفتالوئیل کلرید برابر ۲/۱ است.
- (۴) فرمول کولار را می توان به صورت $\text{-(C}_6\text{H}_4\text{)}_n\text{-(N}_2\text{O}_4\text{)}_n$ نشان داد.

پاسخ: گزینه ۲

برای ایجاد گروه عاملی آمیدی (-C(=O)-NH-)، گروه H-N باید به گروه C=O متصل شود. با توجه به ساختار مونومرها خواهیم داشت:

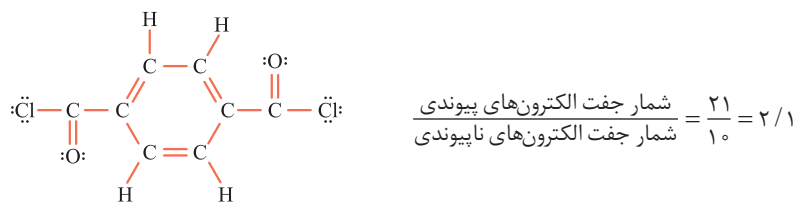


پس مولکول کوچک تولید شده در فرایند گفته شده برخلاف فرایندهای رایجی که در آن ها آب تولید می شود، مولکول هیدروژن کلرید (HCl) است.

بررسی سایر گزینه ها:

گزینه (۱): در ساختار کولار، حلقه بنزنی وجود دارد؛ بنابراین آروماتیک محسوب می شود، هم چنین به دلیل داشتن پیوند N-H ، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی را دارد.

گزینه (۳): ببینیم:



گزینه (۴): با توجه به واحد تکرارشونده کولار، درست است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

مواد زیست تخریب پذیر، موادی هستند که در طبیعت توسط جانداران ذره بینی به مولکول های ساده و کوچک مانند A، D، E و ... تبدیل می شوند. کدام مورد نادرست است؟

- (۱) هیچ یک از ترکیب های A، D و E، گاز گلخانه ای محسوب نمی شوند.
- (۲) یکی از این سه ترکیب، ساده ترین هیدروکربن بوده و به آن گاز مرداب نیز می گویند.
- (۳) اگر E یک هیدروکربن باشد، A و D فراورده های سوختن کامل آن هستند.
- (۴) شمار پیوندها در مولکول دو مورد از این ترکیب ها با هم یکسان است.

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

مواد زیست تخریب پذیر موادی هستند که در طبیعت توسط جانداران ذره بینی به مولکول های ساده و کوچک مانند کربن دی اکسید، متان، آب و ... تبدیل می شود.

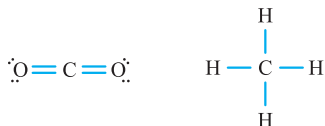
CO_2 و H_2O (و البته CH_4) گاز گلخانه ای محسوب می شوند.

بررسی سایر گزینه ها:

گزینه (۲): ساده ترین هیدروکربن، متان (CH_4) است و به آن گاز مرداب نیز گفته می شود.

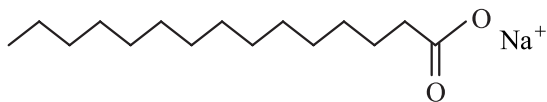
گزینه (۳): از سوختن کامل متان، CO_2 و H_2O تولید می شود!

گزینه (۴): شمار پیوندها در مولکول های CO_2 و CH_4 یکسان است.



درستی یا نادرستی مطالب زیر درباره ترکیب داده شده، به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

(H = ۱, C = ۱۲, O = ۱۶, Na = ۲۳, S = ۳۲ : g.mol⁻¹)



(الف) تفاوت جرم مولی آن با پاک کننده غیرصابونی با زنجیر سیر شده و هم کربن با آن برابر ۴۲ گرم است.

(ب) این ماده با ذرات چربی، واکنش شیمیایی داده و مخلوطی ناهمگن تشکیل می دهد.

(پ) با تغییر یون فلزی به NH₄⁺، نسبت مولی یون های سازنده ماده ثابت می ماند، ولی حالت فیزیکی آن تغییر می کند.

(ت) می توان آن را از واکنش استر سنگین با سود سوزآور به دست آورد.

(۲) درست - نادرست - درست - نادرست

(۱) درست - نادرست - درست - درست

(۴) نادرست - درست - درست - نادرست

(۳) نادرست - نادرست - نادرست - درست

پاسخ: گزینه ۱

به جز عبارت دوم، بقیه عبارت ها درست اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فرمول کلی صابون های جامد سیر شده به صورت C_nH_{2n+1}COONa و فرمول کلی پاک کننده های غیرصابونی با زنجیر آلکیلی سیر شده به صورت C_nH_{2n+1}C₆H₄SO₃Na است.

بررسی عبارت ها:

(الف) ماده مورد نظر C₁₄H₂₉COONa، یک صابون جامد سیر شده با جرم مولی ۲۶۴ g.mol⁻¹ است.

پاک کننده غیرصابونی جامد با زنجیر سیر شده و هم کربن با ترکیب داده شده، دارای فرمول C₉H₁₉C₆H₄SO₃Na بوده و جرم

مولی آن، ۳۰۶ g.mol⁻¹ است. اختلاف جرم مولی این دو پاک کننده ۴۲ گرم می باشد.

(ب) پاک کننده غیرصابونی با لکه چربی برهم کنش فیزیکی برقرار می کند و واکنش شیمیایی نمی دهد. البته مخلوط آب، صابون و

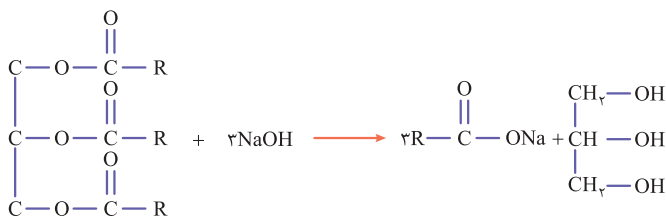
لکه چربی، مخلوط ناهمگن از نوع کلوئید است.

(پ) با تغییر یون Na⁺ به NH₄⁺، هم چنان هر واحد از این صابون شامل یک کاتیون و یک آنیون بوده و نسبت آن ها ۱ به ۱

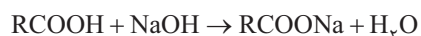
است، اما در حضور Na⁺، صابون جامد ولی در حضور NH₄⁺، صابون مایع می شود.

(ت) به طور کلی، برای تولید صابون دو روش وجود دارد:

(۱) هر مول استر سنگین را با سه مول سود سوزآور واکنش می دهند:



(۲) اسید چرب را مستقیم با NaOH واکنش می دهند:



رسانایی الکتریکی محلول ۰/۴ مولار اسید HA با رسانایی الکتریکی محلول ۰/۰۰۵ مولار آهن (III) کلرید برابر است. ثابت یونش این اسید به تقریب کدام است و اگر pH محلول این اسید با pH محلولی از نیتریک اسید با چگالی ۱/۲۶ g.mL⁻¹ برابر باشد، غلظت محلول نیتریک اسید چند ppm است؟ (H = ۱, N = ۱۴, O = ۱۶: g.mol⁻¹)

$$۵۰۰ - ۲ / ۵ \times ۱۰^{-۳} \quad (۲)$$

$$۵۰۰ - ۲ / ۵ \times ۱۰^{-۴} \quad (۱)$$

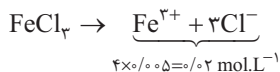
$$۱۰۰۰ - ۲ / ۵ \times ۱۰^{-۳} \quad (۴)$$

$$۱۰۰۰ - ۲ / ۵ \times ۱۰^{-۴} \quad (۳)$$

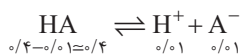
پاسخ: گزینه ۱

رسانایی الکتریکی محلول ها به مجموع غلظت مولی یون ها در آن ها بستگی دارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



در محلول HA، مجموع غلظت مولی یون ها، ۰/۰۲ مولار است؛ بنابراین غلظت هر یک از یون های H⁺ و A⁻ برابر ۰/۰۱ مولار است:



$$K_a = \frac{[\text{H}^+][\text{A}^-]}{[\text{HA}]} = \frac{0.01 \times 0.01}{0.4} = \frac{1}{4} \times 10^{-3} = 2.5 \times 10^{-4}$$

با توجه به این که pH محلول اسید HA با pH محلول نیتریک اسید برابر است، غلظت یون هیدرونیوم در دو محلول برابر می باشد:

$$[\text{H}^+] = 0.01 \text{ mol.L}^{-1}$$

نیتریک اسید (HNO₃) یک اسید قوی است و [H⁺] در محلول آن با غلظت اولیه محلول برابر است؛ بنابراین می توان نوشت:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{چگالی} \times \text{درصد جرمی}}{\text{جرم مولی}} = \frac{1.26 \text{ g.mL}^{-1} \times a}{100} \xrightarrow{a = \text{ppm} \times 10^{-4}} 0.01 = \frac{1.26 \times \text{ppm} \times 10^{-4}}{100} \Rightarrow \text{ppm} = 500$$



ید ماده‌ای سمی و واکنش‌پذیر است. در آزمایشگاه شیمی بعد از استفاده از ید جامد، بلافاصله باید باقی‌مانده آن را از محیط پاک کنند. بهترین روش برای این کار، تبدیل کردن ید به آنیون یدید می‌باشد که بتوان آن را به راحتی با آب شست‌وشو داد. با توجه به پتانسیل‌های کاهش‌دهنده در جدول زیر، کدام ماده برای این منظور مناسب است؟

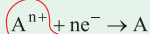
نیم‌واکنش	E° (V)
$S_4O_6^{2-}(aq) + 2e^- \rightarrow 2S_2O_3^{2-}(aq)$	0.08
$I_2(s) + 2e^- \rightarrow 2I^-(aq)$	0.54
$O_2(g) + 2H^+(aq) + 2e^- \rightarrow H_2O_2(aq)$	0.68



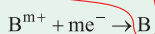
پاسخ: گزینه ۲



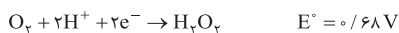
گونه‌ای با قدرت کاهندگی بیشتر (گونه سمت راست در نیم‌واکنش با E° کمتر) می‌تواند به طور خودبه‌خودی با گونه‌ای با قدرت اکسندگی بیشتر (گونه سمت چپ در نیم‌واکنش با E° بیشتر) واکنش دهد. به عبارت دیگر اگر نیم‌واکنش‌ها را از E° بیشتر به E° کمتر مرتب کنیم، گونه سمت راست پایین‌تر می‌تواند با گونه سمت چپ بالاتر، به طور خودبه‌خودی واکنش دهد:



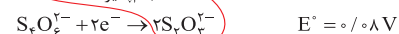
انجام‌پذیر



می‌خواهیم ماده مورد نظر با I_2 واکنش داده و آن را به I^- کاهش دهد، پس به یک کاهنده قوی‌تر از I^- نیاز داریم، یعنی باید گونه سمت راست از نیم‌واکنشی با E° کمتر را انتخاب کنیم؛ پس ماده دارای $S_4O_6^{2-}$ مناسب است.

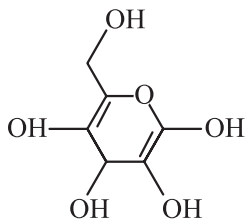


انجام‌پذیر

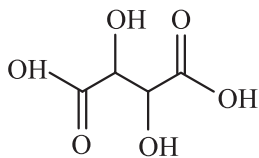


پاسخ خیلی تشریحی ✓

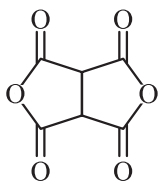
اختلاف مجموع اعداد اکسایش اتم‌های کربن در کدام دو ترکیب بیشتر است؟



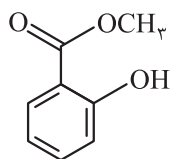
(a)



(b)



(c)



(d)

(۲) a و d

(۴) c و d

(۱) a و b

(۳) b و c

پاسخ: گزینه ۴

فرمول مولکولی ترکیب‌ها را نوشته و مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\text{a) } C_6H_8O_6 \Rightarrow 6C + 8(+1) + 6(-2) = 0 \Rightarrow 6C = +4$$

$$\text{b) } C_4H_6O_6 \Rightarrow 4C + 6(+1) + 6(-2) = 0 \Rightarrow 4C = +6$$

$$\text{c) } C_6H_4O_6 \Rightarrow 6C + 4(+1) + 6(-2) = 0 \Rightarrow 6C = +10$$

$$\text{d) } C_8H_8O_3 \Rightarrow 8C + 8(+1) + 3(-2) = 0 \Rightarrow 8C = -2$$

اختلاف مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در c و d (۱۲ واحد) از هر دو ترکیب دیگری، بیشتر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۱۰۰ درستی یا نادرستی کدام گزینه با سایر گزینه‌ها متفاوت است؟

- (۱) برای تأمین انرژی یک سلول الکترولیتی با یک سلول گالوانی، قطب منفی و مثبت سلول گالوانی را به ترتیب به کاتد و آند سلول الکترولیتی وصل می‌کنند.
- (۲) الکتروود آند در سلول‌های گالوانی، به دلیل پتانسیل کاهشی کمتر، با محلول ۱ مولار HCl واکنش می‌دهد.
- (۳) اگر جرم الکتروود آند یا کاتد در یک سلول گالوانی تغییری نکند، عملاً واکنشی رخ نداده است.
- (۴) یک جامد یونی را می‌توان به عنوان الکترولیت در یک سلول الکتروشیمیایی استفاده کرد.

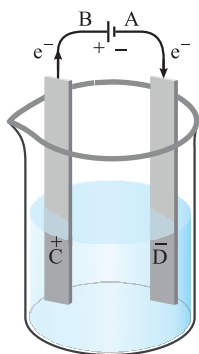
پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱) برخلاف سایر گزینه‌ها درست است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): الکترون‌ها از باتری یا همان سلول گالوانی (یعنی آند باتری و قطب منفی آن) به کاتد یک سلول الکترولیتی جریان می‌یابد و آند سلول الکترولیتی، به کاتد سلول گالوانی متصل است.



سلول الکترولیتی

- گزینه (۲): الکتروود آند در سلول‌های گالوانی، E° کم‌تری نسبت به الکتروود کاتد دارد؛ ولی E° آند می‌تواند مثبت یا منفی باشد. اگر مثبت باشد، نمی‌تواند با محلول ۱ مولار HCl واکنش دهد.
- گزینه (۳): به طور معمول درسته، اما *هواستون* به سلول‌های دارای SHE *باشد*! در سلول‌های دارای SHE، با وجود انجام واکنش، جرم الکتروود پلاتینی در نیم‌سلول SHE تغییری نمی‌کند.
- گزینه (۴): الکترولیت باید رسانای جریان برق باشد. ترکیب‌های یونی در حالت جامد، رسانای جریان برق نیستند.

۱۰۱ کدام گزینه مقایسه نقطه جوش مواد را درست نشان می‌دهد؟

$\text{Cu}, \text{NaCl}, \text{HF}, \text{HCl}, \text{CCl}_4$
(A) (B) (C) (D) (E)

(۱) $A > B > E > C > D$

(۲) $A > B > C > D > E$

(۳) $B > A > C > D > E$

(۴) $C > B > A > E > D$

مشاوره نقطه ذوب فلز مس (Cu) در چاپ‌های اخیر، به کتاب درسی اضافه شده است و همچنین موادی مانند NaCl و HF نیز در همین صفحه ذکر شده است و احتمال توجه طراحان به این موارد بسیار بالاست.

پاسخ: گزینه ۱

در مقایسه نقطه جوش توجه به حالت فیزیکی مواد در اولویت قرار دارد. مثلاً نقطه جوش موادی مانند Cu و NaCl که جامدند نسبت به CCl_4 که مایع است، بیشتر است.

مس فلزی با نقطه ذوب 1083°C و نقطه جوش 2500°C است در حالی که سدیم کلرید جامد، ترکیب یونی با نقطه ذوب 801°C و نقطه جوش 1413°C است ($A > B$).

CCl_4 در دمای اتاق به حالت مایع است، در حالی که HF و HCl در دمای اتاق گاز هستند، پس نقطه جوش بالاتری دارد (هرچند CCl_4 ناطبی است، اما جرم مولی نسبتاً بالای آن، سبب افزایش نقطه جوش آن شده است). همچنین بین دو گاز HF و HCl، نقطه جوش HF بالاتر است، چون بین مولکول‌های خود پیوند هیدروژنی برقرار می‌کند.

توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی

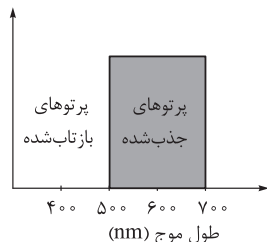
نقطه جوش: $\text{Cu} > \text{NaCl} > \text{CCl}_4 > \text{HF} > \text{HCl}$

فلز با نقطه ذوب بالا ترکیب یونی ماده مولکولی به حالت مایع ماده مولکولی به حالت گاز



پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به نمودار زیر که میزان جذب طول موج‌های نور مرئی توسط یک جسم را نشان می‌دهد، کدام گزینه در ارتباط با این جسم نادرست است؟



(۱) همه پرتوهای مرئی که توسط این جسم بازتاب می‌شوند، توسط یک نمونه دوده جذب می‌شوند.

(۲) به طور کلی میزان انرژی پرتوهای مرئی بازتاب‌شده توسط این جسم، بیشتر از میزان انرژی پرتوهای مرئی جذب‌شده توسط آن است.

(۳) در صورت تاباندن نور سفید به آن، جسم مورد نظر به رنگ قرمز دیده می‌شود.

(۴) جسم مورد نظر تنها یکی از پرتوهای موجود در طیف نشری خطی عنصر هیدروژن در محدوده مرئی را جذب می‌کند.

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

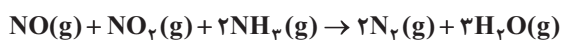
چشم ما اجسام را به رنگی می‌بیند که آن جسم از خود بازتاب یا عبور می‌دهد؛ بنابراین در صورت تاباندن نور سفید به جسم مورد نظر، این جسم پرتوهای آبی و بنفش را بازتاب کرده و به همین دلیل به رنگ آبی تا بنفش دیده می‌شود. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): دوده، یک رنگدانه معدنی سیاه است که همه طول موج‌های نور مرئی را جذب می‌کند. این جسم، پرتوهای با طول موج ۴۰۰ تا ۵۰۰ نانومتر را بازتاب می‌کند؛ بنابراین می‌توان گفت که همه پرتوهای مرئی بازتاب‌شده توسط این جسم، توسط یک نمونه دوده جذب می‌شوند.

گزینه (۲): طول موج پرتوهای الکترومغناطیسی با انرژی آن‌ها رابطه وارونه دارد. این جسم پرتوهایی با طول موج کوتاه‌تر (پرتوهایی با طول موج ۴۰۰ تا ۵۰۰ نانومتر) را بازتاب کرده و پرتوهایی با طول موج بلندتر (پرتوهایی با طول موج ۵۰۰ تا ۷۰۰ نانومتر) را جذب می‌کند؛ بنابراین انرژی پرتوهای مرئی بازتاب‌شده توسط این جسم، بیشتر از انرژی پرتوهای مرئی جذب‌شده توسط آن است.

گزینه (۴): در طیف نشری خطی عنصر هیدروژن در محدوده مرئی، پرتوهایی با طول موج ۴۱۰، ۴۳۴، ۴۸۶ و ۶۵۶ نانومتر وجود دارد که جسم مورد نظر از میان این پرتوها، تنها پرتویی با طول موج ۶۵۶ نانومتر را جذب می‌کند، در حالی که سایر پرتوها را بازتاب می‌دهد.

کدام موارد داده شده درباره واکنش زیر، درست است؟ ($H = 1, N = 14 : g.mol^{-1}$)



الف) به ازای مصرف ۵/۱ گرم آمونیاک، $5/418 \times 10^{23}$ الکترون در واکنش مبادله می شود.

ب) این واکنش در مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی برای کاهش مقدار اکسیدهای نیتروژن استفاده می شود.

پ) مولکول های سازنده همه واکنش دهنده ها، در میدان الکتریکی جهت گیری می کنند.

ت) یکی از اکسیدهای نیتروژن، نقش کاهنده و یکی از اکسیدهای نیتروژن، نقش اکسنده را ایفا می کند.

(۲) ب و ت

(۱) الف و ب

(۴) ب و پ

(۳) الف و پ

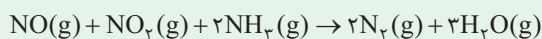
پاسخ: گزینه ۲

عبارت های «الف» و «پ» درست اند.

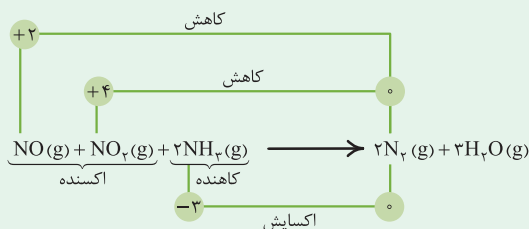
پاسخ خیلی تشریحی ✓



در مبدل کاتالیستی خودروهای دیزلی، علاوه بر کاتالیزورها، گاز آمونیاک را نیز به داخل مخلوط آلاینده ها تزریق می کنند تا طی واکنش زیر، گازهای NO و NO₂ تا حدود زیادی، به گاز بی خطر N₂ تبدیل شوند:



در واکنش حذف گازهای NO و NO₂ در موتور خودروهای دیزلی، NO و NO₂، نقش اکسنده را دارند در حالی که NH₃، نقش کاهنده را ایفا می کند:



تغییر عدد اکسایش N ضرب NH₃

$$(NH_3) \text{ شمار الکترون های مبادله شده براساس کاهنده } = 2 \times 1 \times 3 = 6$$

↑
N زیروند

بررسی عبارت ها:

الف) به ازای ۲ مول آمونیاک، ۶ مول الکترون مبادله می شود، به این ترتیب خواهیم داشت:

$$5/1 \text{ g } NH_3 \times \frac{1 \text{ mol } NH_3}{17 \text{ g } NH_3} \times \frac{6 \text{ mol } e^-}{1 \text{ mol } NH_3} \times \frac{6/0.2 \times 10^{23} e^-}{1 \text{ mol } e^-} = 5/418 \times 10^{23} e^-$$

ب) این واکنش در مبدل کاتالیستی خودروهای دیزلی انجام می شود و نه بنزینی!

پ) مولکول های سازنده هر سه واکنش دهنده (NO، NO₂ و NH₃) قطبی اند و در میدان الکتریکی جهت گیری می کنند.

ت) هر دو اکسید نیتروژن، کاهش می یابند و نقش اکسنده را دارند.



درستی یا نادرستی کدام گزینه درباره واکنش $A(g) + B(g) \rightleftharpoons 2X(g)$ ، با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

- (۱) با افزایش فشار، غلظت تعادلی مواد شرکت‌کننده در واکنش تغییری نمی‌کند.
- (۲) با افزودن مقداری گاز A به سامانه، تعادل در جهت رفت جابه‌جا شده و مقدار ثابت تعادل واکنش افزایش می‌یابد.
- (۳) با انتقال سامانه تعادلی به ظرف کوچک‌تر، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت تغییر نمی‌کند.
- (۴) اگر با کاهش دما، مقدار ثابت تعادل واکنش کاهش یابد، علامت ΔH واکنش، مانند علامت ΔH واکنش $N_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2NO(g)$ است.

پاسخ: گزینه ۴

عوامل مؤثر بر تعادل:

درس‌Box

عوامل		عکس‌العمل تعادل به تغییر	چگونگی تغییر ثابت تعادل (K) با جابه‌جاشدن تعادل
تغییر غلظت	افزایش غلظت یک ماده	جابه‌جایی در جهت مصرف آن ماده	تغییر نمی‌کند.
	کاهش غلظت یک ماده	جابه‌جایی در جهت تولید آن ماده	تغییر نمی‌کند.
تغییر حجم (فشار)	افزایش حجم (کاهش فشار) سامانه	جابه‌جایی در جهت شمار مول‌های گازی بیشتر	تغییر نمی‌کند.
	کاهش حجم (افزایش فشار) سامانه	جابه‌جایی در جهت شمار مول‌های گازی کم‌تر	تغییر نمی‌کند.
تغییر دما	واکنش‌های گرماده	کاهش دما	افزایش می‌یابد.
		افزایش دما	کاهش می‌یابد.
	واکنش‌های گرماگیر	کاهش دما	کاهش می‌یابد.
		افزایش دما	افزایش می‌یابد.

گزینه (۴) برخلاف سایر گزینه‌ها درست است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی گزینه‌ها:

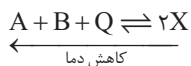
گزینه (۱): تعداد مول‌های گازی مواد در دو طرف معادله واکنش برابر است؛ بنابراین تغییر فشار سبب جابه‌جایی تعادل نمی‌شود، اما دقت کنید که افزایش فشار، غلظت همه گونه‌های گازی را افزایش می‌دهد.

عامل	تأثیر نوع تعادل	جهت جابه‌جایی تعادل	سرعت واکنش‌های رفت و برگشت	غلظت مواد گازی	ثابت تعادل
افزایش فشار (کاهش حجم)	شمار مول‌های گازی دو طرف معادله برابرند.	تعادل جابه‌جا نمی‌شود.	افزایش	افزایش	بدون تغییر
	شمار مول‌های گازی دو طرف معادله برابر نیستند.	به سمت شمار مول‌های گازی کم‌تر	افزایش	افزایش	بدون تغییر
	اصلاً ماده‌ی گازی نداریم.	تعادل جابه‌جا نمی‌شود.	بدون تغییر		بدون تغییر
کاهش فشار (افزایش حجم)	شمار مول‌های گازی دو طرف معادله برابرند.	تعادل جابه‌جا نمی‌شود.	کاهش	کاهش	بدون تغییر
	شمار مول‌های گازی دو طرف معادله برابر نیستند.	به سمت شمار مول‌های گازی بیشتر	کاهش	کاهش	بدون تغییر
	اصلاً ماده‌ی گازی نداریم.	تعادل جابه‌جا نمی‌شود.	بدون تغییر		بدون تغییر

گزینه (۲): تغییر غلظت مواد، تأثیری بر مقدار ثابت تعادل (K) ندارد. ثابت تعادل یک واکنش، فقط به دما وابسته است.

گزینه (۳): با کاهش حجم یا افزایش فشار، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت، افزایش می‌یابد.

گزینه (۴): کم‌شدن ثابت تعادل با کاهش دما، به معنای جابه‌جایی تعادل در جهت برگشت است؛ بنابراین تعادل مورد نظر، گرماگیر است:



واکنش $N_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2NO(g)$ نیز گرماگیر بوده و علامت ΔH آن مثبت است.

۱۰۵

در دما و فشار معین، ۵۰۰ لیتر گاز متان با چگالی $1/6 \text{ g.L}^{-1}$ با مقدار کافی بخار آب واکنش می‌دهد. اگر فراورده‌های این واکنش برای تولید متانول استفاده شوند، چند گرم متانول به دست می‌آید و چند مول از گاز هیدروژن تولید شده در واکنش اول، به صورت اضافی باقی می‌ماند؟ (بازده واکنش اول را ۵۰ درصد و بازده واکنش دوم را ۱۰۰ درصد فرض کنید؛ $\text{H} = 1, \text{C} = 12, \text{O} = 16 : \text{g.mol}^{-1}$)

$$25 - 2400 \quad (2)$$

$$50 - 800 \quad (1)$$

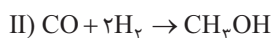
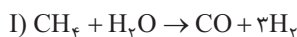
$$25 - 800 \quad (4)$$

$$50 - 2400 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

معادله واکنش‌های انجام شده به صورت زیر است:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



تعداد مول CO و H_2 تولید شده در واکنش اول را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{حجم} \times \text{چگالی}}{100} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}}$$

$$\frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{CH}_4} = \frac{\text{CO}}{\text{H}_2}$$

$$\frac{1/6 \times 500 \times \frac{50}{100}}{1 \times 16} = \frac{x}{1} = \frac{y}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \text{ mol CO} \\ y = 75 \text{ mol H}_2 \end{cases}$$

طبق واکنش دوم، به ازای مصرف ۲۵ مول CO ، ۵۰ مول H_2 مصرف می‌شود؛ بنابراین $75 - 50 = 25$ مول از گاز هیدروژن به صورت اضافی باقی می‌ماند، هم‌چنین با مصرف ۲۵ مول CO ، ۲۵ مول متانول تولید می‌شود:

$$\text{جرم متانول: } 25 \text{ mol CH}_3\text{OH} \times \frac{32 \text{ g CH}_3\text{OH}}{1 \text{ mol CH}_3\text{OH}} = 800 \text{ g CH}_3\text{OH}$$