

۱۰- اگر طول یک ضلع مثلثی 30 و اندازه دو زاویه مجاور آن ضلع 60° و 67° باشد، محیط مثلث کدام است؟ ($\cos 53^\circ = 0.6$)

$$45 + 40\sqrt{3} \quad (4)$$

$$45 + 30\sqrt{3} \quad (3) \checkmark$$

$$30 + 40\sqrt{3} \quad (2)$$

$$30 + 30\sqrt{3} \quad (1)$$

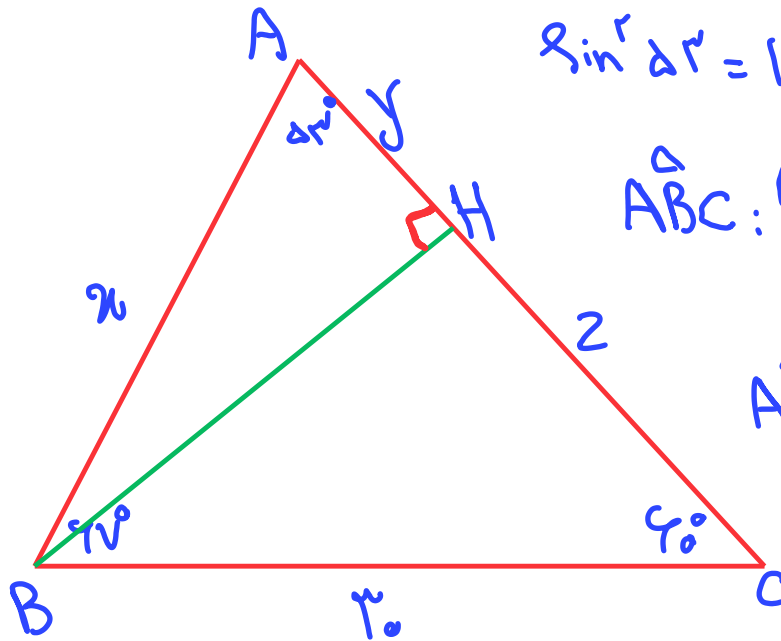
$$\sin^2 \Delta^2 = 1 - \cos \Delta^2 \Rightarrow \sin \Delta^2 = 1 - 0.6 = 0.4 \Rightarrow \boxed{\sin \Delta^2 = 0.4}$$

$$\triangle ABC: \frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}} \Rightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{30}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{60}{1} = \frac{30\sqrt{3}}{1}$$

$$\triangle ABH: \cos \Delta^2 = \frac{y}{x} \Rightarrow 0.6 = \frac{y}{\frac{30\sqrt{3}}{1}} \Rightarrow \boxed{y = \frac{18\sqrt{3}}{1}}$$

$$\triangle BCH: \hat{HBC} = 30^\circ \Rightarrow CH = \frac{BC}{2} \Rightarrow \boxed{Z = 15}$$

$$2P_{\triangle ABC} = 30 + 15 + \frac{30\sqrt{3} + 18\sqrt{3}}{1} = 45 + 30\sqrt{3} \checkmark$$



۲۶- در شکل زیر، $AB = AC$ و $BD = \frac{1}{4}BC$ است. اگر مساحت مثلث ABC برابر ۴۰ باشد، طول ED کدام است؟

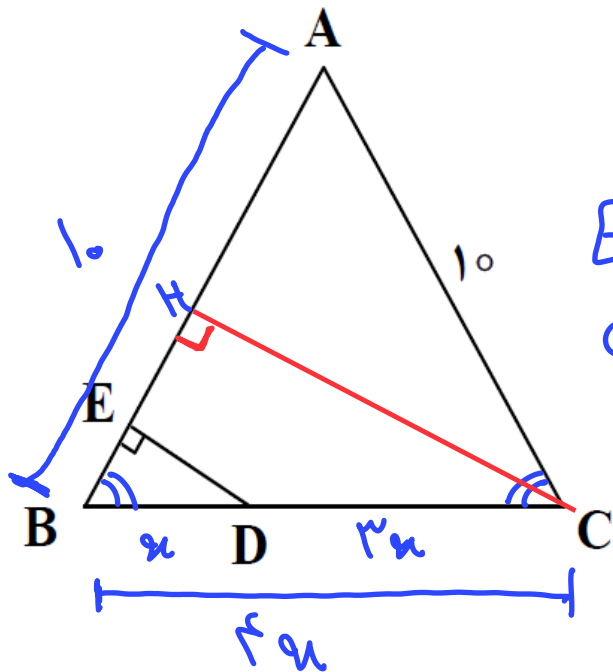
ارتفاع CH را رسم می‌کنیم:

$$\sqrt{5} \quad (۱)$$

$$\sqrt{6} \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۳) \checkmark$$

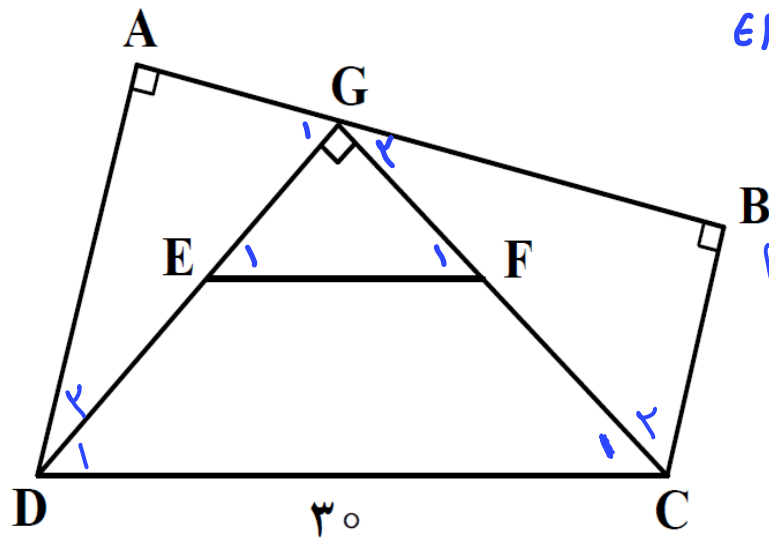
$$۳ \quad (۴)$$



$$\left. \begin{array}{l} ED \perp AB \\ CH \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow ED \parallel CH \xrightarrow[\triangle ABC]{\text{تالی}} \frac{BD}{BC} = \frac{ED}{CH} \Rightarrow \frac{x}{4x} = \frac{ED}{CH} \Rightarrow \boxed{CH = 4ED}$$

$$S_{\triangle ABC} = 40 \Rightarrow \frac{4ED \times 10}{2} = 40 \Rightarrow \boxed{ED = 2}$$

۲۷- در شکل زیر، چهارضلعی های EFCD دوزنقه متساوی الساقین است. اگر طول اضلاع دوزنقه ABCD اعداد صحیح مثبت باشند، طول ضلع AB کدام است؟



$$EFCD: ED=FB \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{G}_1 = 90^\circ \Rightarrow \boxed{GD=GC} \xrightarrow{ED, FC} \boxed{GE=GF} \quad (1) \checkmark$$

۲۵ (۲)

۲۳ (۳)

۲۶ (۴)

$$ABCD: \hat{ADC} + \hat{BCD} = 180^\circ \rightarrow \hat{D}_1 + \hat{C}_1 = 90^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{ADG}: \hat{D}_1 + \hat{G}_1 = 90^\circ \\ \hat{BCG}: \hat{C}_1 + \hat{G}_1 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{C}_1 = \hat{G}_1 \\ \hat{D}_1 = \hat{G}_1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ضلع}} \hat{AGD} \cong \hat{BGC}$$

$$\Rightarrow \boxed{AD=BG} \quad \boxed{AG=BC} \quad (2)$$

$$\triangle DGC: CD = GD + GC \Rightarrow 90 = 2GD \Rightarrow \boxed{GD = 45}$$

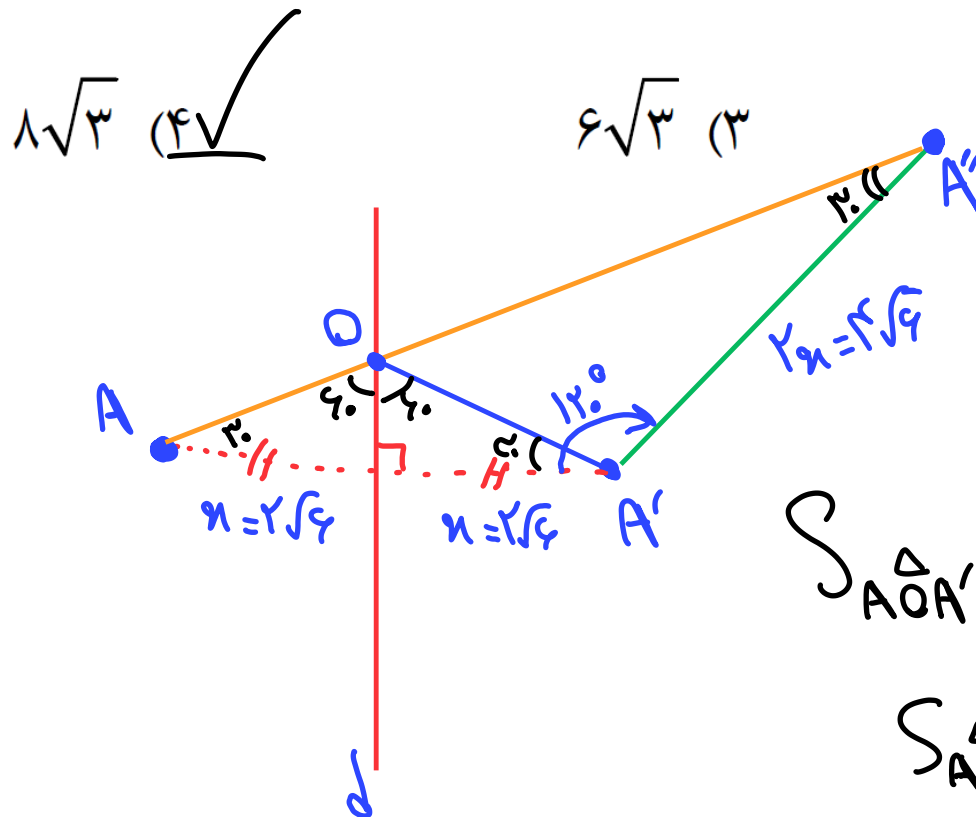
$$\triangle AGD: GD = AG + AD \Rightarrow 45 = AG + 30 \Rightarrow AG = 15$$

$$\triangle BGC: GD = BG + GC \Rightarrow 45 = BG + 21 \Rightarrow BG = 24$$

$$\left. \begin{array}{l} AG \in \mathbb{Z} \\ BG \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AG = 15 \\ BG = 24 \end{array} \right.$$

$$AB = AG + BG = 15 + 24 = 39$$

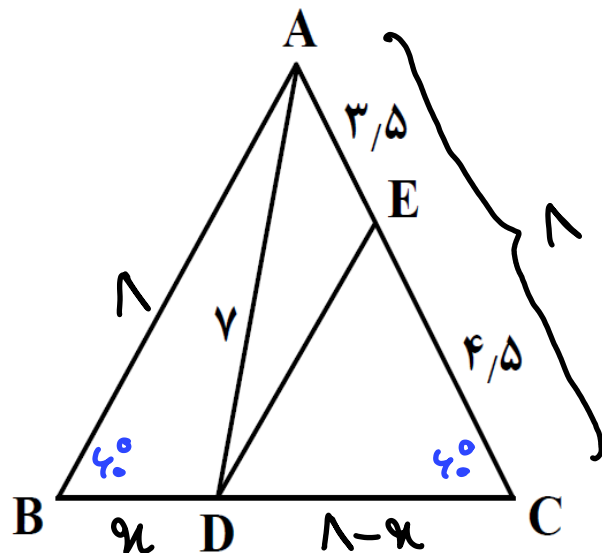
۲۸- نقطه A' که تصویر نقطه A تحت بازتاب نسبت به خط d و نقطه A'' تصویر نقطه A تحت دوران حول نقطه A' به اندازه 120° است. اگر فاصله نقطه A از خط d برابر $2\sqrt{6}$ و O نقطه برخورد پاره خط AA'' با خط d باشد، مساحت مثلث OAA' کدام است؟



$$\triangle OAA': \frac{4\sqrt{6}}{\sin 120^\circ} = \frac{AO}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{4\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{AO}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{AO = 4\sqrt{2}}$$

$$S_{\triangle OAA'} = \frac{1}{2} AO \times OA' \cos 120^\circ = \frac{1}{2} (4\sqrt{2})^2 \cos 120^\circ$$

$$S_{\triangle OAA'} = \frac{1}{2} (16 \times 2) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{11\sqrt{3}}$$



۲۹- در مثلث متساوی الاضلاع ABC شکل زیر، طول ضلع BD کدام می تواند باشد؟

طبق قضیه کسینوس ها در مثلث:

(۱) ۲

(۲) ۲٫۵

(۳) ۳ ✓

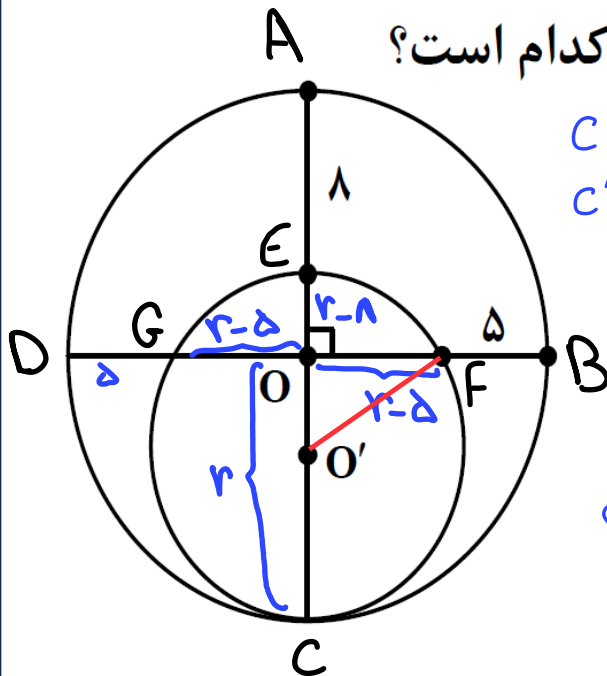
(۴) ۳٫۵

$$\triangle ABD: y^2 = x^2 + 1^2 - 2(1)(x) \cos 40^\circ$$

$$\Rightarrow 49 = x^2 + 1 - 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1 \end{cases}$$

۳۰- در شکل زیر، دو دایره به مرکزهای O و O' مماس درون هستند. طول خط‌المركزین کدام است؟



$C(O, r)$
 $C'(O', r')$

$OA = OB = OC = OD = r$
 $C'(O', r') : OG \cdot OF = OE \cdot OC$

روش اول:

(۱) ۳

(۲) ۴ ✓

(۳) ۳, ۵

(۴) ۴, ۵

$$(r-\delta)(r-\delta) = (r-1)r$$

$$r^2 - 1 \cdot r + \delta^2 = r^2 - 1r \rightarrow \boxed{r = \frac{\delta^2}{1}}$$

$$\triangle OO'F : O'F^2 = OO'^2 + OF^2 \Rightarrow r'^2 = (r-\delta)^2 + (r-r')^2$$

$$\frac{4\delta^2}{r^2} = \left(\frac{1\delta}{r}\right)^2 + \left(\frac{r\delta}{r} - r'\right)^2 \rightarrow \boxed{r' = \frac{17}{r}}$$

$$OO' = |r - r'| = \frac{r\delta}{r} - \frac{17}{r} = \frac{1}{r} = \boxed{4}$$

روش دوم:

دو دایره
مماس درون

$$|OO'| = r - r' \Rightarrow 2|OO'| = \cancel{2r} - \cancel{2r'} \Rightarrow \boxed{|OO'| = 4}$$

طبق شکل = ۱

قطر دایره کوچک

قطر دایره بزرگ

۳۱- اگر $\vec{a} = (1, -1, -1)$ باشد، حاصل $\vec{k} \times (\vec{a} \times \vec{i}) + (\vec{k} \times \vec{a}) \times \vec{i}$ کدام است؟

$-\vec{i} + \vec{k}$ (۴)

$\vec{i} + \vec{k}$ (۳)

$-\vec{i} - \vec{k}$ (۲)

$\vec{i} - \vec{k}$ (۱) ✓

$$\vec{a} = (1, -1, -1) = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{j} + \vec{k}$$

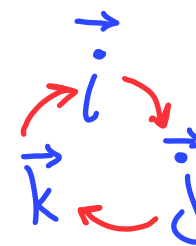
$$\vec{k} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{j} + \vec{i}$$

$$\vec{k} \times (\vec{a} \times \vec{i}) + (\vec{k} \times \vec{a}) \times \vec{i}$$

$$= \vec{k} \times (\vec{k} - \vec{j}) + (\vec{i} + \vec{j}) \times \vec{i}$$

$$= \vec{k} \times \vec{k} - \vec{k} \times \vec{j} + \vec{i} \times \vec{i} + \vec{j} \times \vec{i} = -(-\vec{i}) + (-\vec{k})$$

$$= \vec{i} - \vec{k}$$



۳۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 20 & x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \\ -3 & y \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد، مقدار $\frac{x}{y}$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۳ (۳) -۵ (۴) -۳ ✓

$$A = \begin{bmatrix} -2 & x-\Delta \\ -2x-4\Delta & 22-xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} y-\Delta=0 \rightarrow \boxed{y=\Delta} \\ -2x-4\Delta=0 \rightarrow \boxed{x=-1\Delta} \\ 22-xy=-2 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\frac{x}{y} = -\frac{1\Delta}{\Delta} = -1$$

۳۳- برای ماتریس‌های وارون‌پذیر A و B ، اگر $(AB)^{-1} A^3 B = \begin{bmatrix} 5|A| & 4 \\ |A| & 2|A| \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس A ۳ کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$4 \quad (1) \checkmark$$

$$|(AB)^{-1} A^3 B| = 10|A|^2 - 4|A| \Rightarrow \frac{|A|^3 |B|}{|A||B|} = 10|A|^2 - 4|A| \Rightarrow |A|^2 = 10|A|^2 - 4|A|$$

$$\xrightarrow[\substack{A \text{ وارون پذیر} \\ |A| \neq 0}]{|A|} |A| = 10|A| - 4 \rightarrow \boxed{|A| = \frac{4}{9}} \leadsto |3A_{\text{عکس}}| = 3^2 |A| = 4$$

۳۴- دایره C بر خط $y = \frac{3}{4}x$ مماس است. اگر معادلات دو وتر مساوی و منصف هم از دایره C، خطوط $2x + y = 3$ و

$2x - 3y = 7$ باشند، شعاع دایره کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲) ✓

۱ (۱)

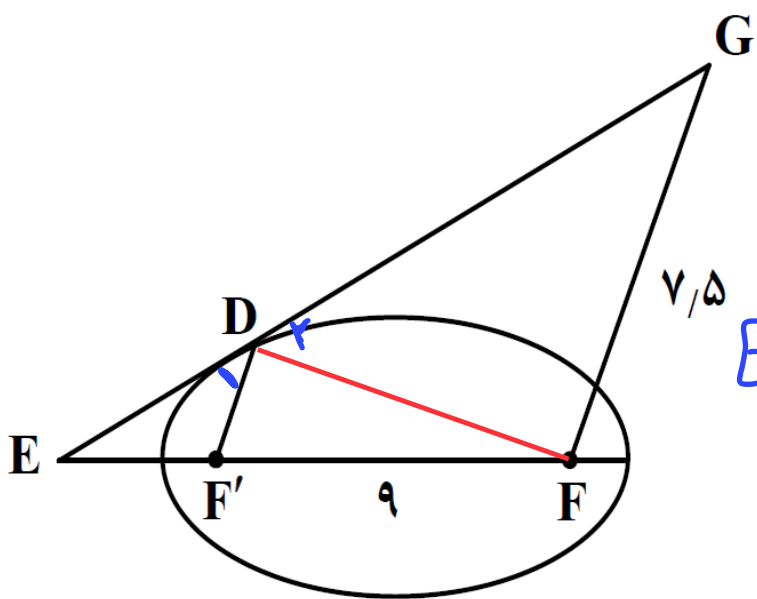
دو وتر مساوی و منصف یکدیگر = قطرهای دایره

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases} \rightarrow 4y = -4 \rightarrow \boxed{y = -1} \quad \boxed{x = 2} \rightarrow O(2, -1)$$

فاصله O تا خط مماس: $y - \frac{3}{4}x = 0$

$$r = \frac{|-1 - \frac{3}{4}(2)|}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{4}} = 2$$

مثلت $EF'D$ و EFG متشابه با نسبت تشابه $\frac{1}{3}$ باشند، خروج از مرکز بیضی کدام است؟



$$\omega \ll E_G \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_r \text{ (I)}$$

$$V_C = f f' \Rightarrow \boxed{C = \frac{q}{V}}$$

$$EFG \sim EF'D \rightarrow \frac{DF'}{CF} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DF'}{V, \Delta} = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{DF' = 1, \Delta}$$

$$\rightarrow \hat{D}_1 = \hat{G} \stackrel{\text{I}}{=} \hat{D}_r \Rightarrow \text{مستطوي الاضلاع} F \hat{D} G \Rightarrow \boxed{FD = FG = \sqrt{r^2}}$$

$$Y_a = F_D + F'_D = r_1 \Delta + V_1 \Delta = 1.0 \rightarrow \boxed{a = \Delta}$$

$$e = \frac{c}{v} = \frac{v}{v/2} = 2$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$
$$\frac{3}{5} \quad (2)$$
$$\frac{5}{6} \quad (3)$$
$$\frac{9}{10} \quad (4) \checkmark$$