

۱- مقدار عبارت گویای $A = \frac{x^3 - 3\sqrt[3]{2}x^2 + 3\sqrt[3]{4}x - 1}{x^3 - 3\sqrt[3]{3}x^2 + 3\sqrt[3]{9}x}$ به ازای $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ کدام است؟

۰٫۸ (۲)

۰٫۶ (۳)

۰٫۴ (۲)

۰٫۲ (۱)

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

صورت کسر A :

$$(x - \sqrt[3]{2})^3 = x^3 - 3\sqrt[3]{2}x^2 + 3\sqrt[3]{4}x - 2$$

$$(x - \sqrt[3]{2})^3 + 1 = x^3 - 3\sqrt[3]{2}x^2 + 3\sqrt[3]{4}x - 1$$

مخرج کسر A :

$$(x - \sqrt[3]{3})^3 = x^3 - 3\sqrt[3]{3}x^2 + 3\sqrt[3]{9}x - 3$$

$$(x - \sqrt[3]{3})^3 + 3 = x^3 - 3\sqrt[3]{3}x^2 + 3\sqrt[3]{9}x$$

$$A = \frac{(x - \sqrt[3]{2})^3 + 1}{(x - \sqrt[3]{3})^3 + 3} \xrightarrow{x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}} \frac{3+1}{2+3} = \frac{4}{5} \rightarrow 0.8$$

۲- اگر $a+2$ ، 11 و $a-4$ ، به ترتیب جملات چهارم، هفتم و نهم یک الگوی خطی باشند، چند جمله از این الگو مثبت است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

$$t_4 = 3a+2, t_7 = 11, t_9 = a-4$$

$$d = \frac{t_m - t_n}{m - n} \rightarrow \frac{t_7 - t_4}{7 - 4} = \frac{t_9 - t_7}{9 - 7} \Rightarrow \frac{11 - 3a - 2}{3} = \frac{a - 4 - 11}{2} \Rightarrow \frac{9 - 3a}{3} = \frac{a - 15}{2}$$

$$18 - 6a = 3a - 45 \rightarrow 63 = 9a \rightarrow a = 7, d = -4$$

$$t_1 = 35, t_2 = 31, t_3 = 27, t_4 = 23, t_5 = 19, t_6 = 15, t_7 = 11, t_8 = 7, t_9 = 3$$

$$t_{10} = -1 \quad \times$$

و جمله مثبت دارد

۳- به ازای چند مقدار از a ، معادله درجه دوم $a = (x-2)^2 + 2a(x+1)^2$ دارای یک ریشه مضاعف است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$x^2 - 4x + 4 + 2a(x^2 + 2x + 1) = a \rightarrow x^2 - 4x + 4 + 2ax^2 + 4ax + 2a - a = 0$$

$$\underbrace{(2a+1)}_A x^2 + \underbrace{(4a-4)}_B x + \underbrace{4+a}_C = 0 \Rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow (4a-4)^2 - 4(1+2a)(4+a) = 0$$

$$16a^2 - 32a + 16 - 4(4+a+8a+4a^2) = 0 \Rightarrow 16a^2 - 32a + 16 - 4(2a^2 + 9a + 4) = 0$$

$$16a^2 - 32a + 16 - 8a^2 - 36a - 16 = 0 \rightarrow 8a^2 - 68a = 0 \Rightarrow a(8a - 68) = 0$$

$$a = 0, a = \frac{68}{8} = 17\frac{1}{2}$$

نکته: $a = -\frac{1}{2}$ غیر قابل قبول می باشد زیرا ضریب x^2 را منفی می کند که در این دو جواب وجود ندارد پس هر دو این دو جواب قابل قبول هستند.

۶- اگر α و β دو عدد حقیقی و متمایز باشند به طوری که $\alpha^2 = \alpha + 3$ و $\beta^2 = \beta + 3$ باشد، مقدار $\alpha^5 + \beta^5$ کدام است؟

۷۹ (۴)

۷۳ (۳)

۶۷ (۲)

۶۱ (۱) ✓

$$\left. \begin{array}{l} \alpha^2 = \alpha + 3 \\ \beta^2 = \beta + 3 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 = x + 3 \rightarrow x^2 - x - 3 = 0$$

$$S = \alpha + \beta = 1$$

$$P = \alpha\beta = -3$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 7 \\ \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3SP = 10 \end{array} \right\} (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^3 + \beta^3) = \alpha^5 + \alpha^2\beta^3 + \alpha^3\beta^2 + \beta^5 = \alpha^5 + \beta^5 + \alpha^2\beta^3 + \alpha^3\beta^2$$

$$70 - \alpha^2\beta^3 + \alpha^3\beta^2 = \alpha^5 + \beta^5$$

$$70 - \alpha^2\beta^2(\beta + \alpha) = \alpha^5 + \beta^5$$

$$70 - (\alpha\beta)^2(\alpha + \beta) = \alpha^5 + \beta^5$$

$$70 - 9 = \alpha^5 + \beta^5 \rightarrow \alpha^5 + \beta^5 = 61$$

۷- نمودار تابع $y = mx^2 - 3x + 4$ محور x ها را در دو طرف $x=2$ قطع می کند. اگر حدود تغییرات m بازه (a, b) باشد، مقدار $a+2b$ کدام است؟

۴ (۴) صفر

۱ (۳) ✓

 $\frac{1}{2}$ (۲)

۲ (۱)

$$\left. \begin{array}{l} m > 0 \rightarrow f(2) < 0 \\ m < 0 \rightarrow f(2) > 0 \end{array} \right\} m f(2) < 0 \rightarrow m(4m - 2) < 0 \rightarrow 0 < m < \frac{1}{2}$$

$$a = 0, b = \frac{1}{2} \rightarrow 0 + 1 = 1$$

۸- برای $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ اگر $f^{-1}(6-2x) \leq f^{-1}(2-x)$ باشد، حدود x شامل چند عدد صحیح مثبت است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱) ✓

$$f^{-1}(6-2x) \leq f^{-1}(2-x) \rightarrow 6-2x \geq 2-x \rightarrow 4 \geq x$$

$$6-2x > 0 \rightarrow x < 3, 2-x > 0 \rightarrow x < 2$$

شرط دامنه f^{-1} ←

$$x < 3, x < 2, x \leq 4 \rightarrow x < 2 \rightarrow x = 1$$

9- اگر $75^x = 27^y$ باشد، حاصل 125^{2y-x} کدام است؟ ($x \neq 0$)

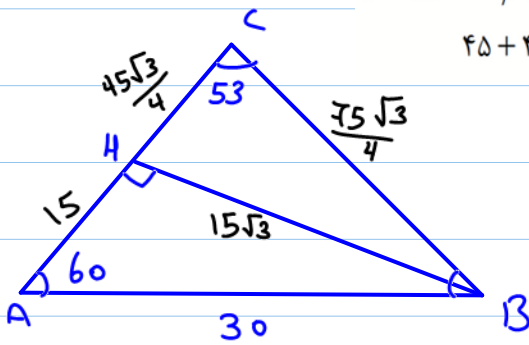
(1) $\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{3}$ (3) $5\sqrt{5}$ (4) $3\sqrt{3}$ ✓

$$75 = (5^2)(3), 27 = (3)^3 \rightarrow (5^2 \times 3)^x = (3)^{3y} \rightarrow 5^{2x} \times 3^x = 3^{3y} \rightarrow 5^{2x} = 3^{3y-x}$$

$$5^{\frac{2x}{3y-x}} = 3 \rightarrow 5^{\frac{3x}{3y-x}} = 3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}$$

10- اگر طول یک ضلع مثلثی 30° و اندازه دو زاویه مجاور آن ضلع 60° و 67° باشد، محیط مثلث کدام است؟ ($\cos 53^\circ = 0.6$)

(1) $30 + 30\sqrt{3}$ (2) $30 + 40\sqrt{3}$ (3) $45 + 30\sqrt{3}$ ✓ (4) $45 + 40\sqrt{3}$



$$\cos 53 = 0.6 \rightarrow \frac{3}{5}$$

$$\sin^2 53 + \cos^2 53 = 1 \Rightarrow \sin^2 53 = 0.64 \rightarrow \sin 53 = 0.8 = \frac{4}{5}$$

مثلث $\triangle ABH$:

$$\sin 60 = \frac{BH}{30} \Rightarrow BH = 15\sqrt{3}$$

$$\cos 60 = \frac{AH}{30} \Rightarrow AH = 15$$

مثلث $\triangle BCH$:

$$\sin 53 = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BC = \frac{75\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos 53 = \frac{CH}{BC} \Rightarrow CH = \frac{45\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{محیط} = 15 + 30 + \frac{45\sqrt{3}}{4} + \frac{75\sqrt{3}}{4} = 45 + 30\sqrt{3}$$

11- اگر $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار داشته باشد،

انتهای زاویه های $\alpha + \beta$ و 2β به ترتیب در کدام ربع ها قرار دارند؟

✓ سوم و چهارم

(3) دوم و چهارم

(2) سوم و سوم

(1) دوم و سوم

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{9}{25} \rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ (ربع اول)}$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \rightarrow \sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta \rightarrow \sin^2 \beta = \frac{25}{169} \rightarrow \sin \beta = \frac{5}{13} \text{ (ربع دوم)}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{16}{65}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = -\frac{63}{65}$$

→ ربع سوم

$$\sin(2\beta) = 2\sin \beta \cos \beta = (2)\left(\frac{5}{13}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{120}{169}$$

$$\cos(2\beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \left(-\frac{12}{13}\right)^2 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{119}{169}$$

→ ربع چهارم

۱۳ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۴ ✓ (۱)

$$\frac{\sqrt{3} + \tan x}{\frac{\tan x + \sqrt{3}}{\tan x}} = \tan 4x \rightarrow \frac{(\sqrt{3} + \tan x) \tan x}{\tan x + \sqrt{3}} \rightarrow \tan x = \tan 4x$$

$$\rightarrow 4x = k\pi + x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{-5\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \leftarrow \text{جواب های قابل قبول در این بازه}$$

 $x \rightarrow a^+$

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ ✓ (۲)

۱ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(g(x)) = 1 + a \rightarrow f(g(a^+)) = 1 + a \rightarrow f(-a) = 1 - \sqrt{-a} = 1 + a$$

$$-a \geq 0 \rightarrow a \leq 0 \rightarrow -\sqrt{-a} = a \rightarrow -a = a^2 \Rightarrow a^2 + a = 0$$

$$a(a+1) = 0$$

$$\leftarrow \text{هر دو این جواب ها قابل قبول هستند. } a=0, a=-1$$

 $8\pi^2$ ✓ $4\pi^2$ (۳) $2\pi^2$ (۲)

صفر (۱)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cos 2\pi x - 1}{-(-x - 2\sqrt{-x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cos 2\pi x - 1}{-(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{-x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cos 2\pi x - 1}{-(\sqrt{-x} - 1)^2}$$

$$t = x + 1 \rightarrow x = t - 1 \rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(2\pi t - 2\pi) - 1}{-(\sqrt{1-t} - 1)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(2\pi t) - 1}{-(\sqrt{1-t} - 1)^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(2\pi t) - 1 &\sim \frac{-(2\pi t)^2}{2} = -2\pi^2 t^2 \\ (\sqrt{1-t} - 1)^2 &\sim (\frac{1}{2})(-t) = -\frac{t}{2} \end{aligned} \right\} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\pi^2 t^2}{-\frac{t}{2}} = 8\pi^2$$

$$6(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} + a = 0$$

$$a = -2$$

وجود ندارد (۴)

 $-\frac{3}{4}$ ✓ (۳) $\frac{3}{4}$ (۲)

صفر (۱)

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \left(\frac{3x+2}{|x+2|} \right) \left(\frac{-(2x-1)}{(2x-1)(3x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{-1}{|x+2|} = \frac{-1}{|-\frac{2}{3} + \frac{6}{3}|} = -\frac{3}{4}$$

۱۶- اگر $f(x) = a(1-x)(x+1) - bx^2$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه صفر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{xf(x)}{x+b}$ کدام است؟

(۴) وجود ندارد

(۳) صفر

(۲) $+\infty$

(۱) $-\infty$ ✓

$$f(x) = a(1-x^2) - bx^2 \rightarrow a - ax^2 - bx^2 = x^2(-a-b) + a \rightarrow f(x) = a$$

$$-a-b=0 \rightarrow -a=b$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{ax}{x+b} = \frac{a^2}{a-a} = \frac{a^2}{0^-} = -\infty$$

۱۷- اگر حد چپ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + b|x|}$ در $x=a$ برابر $-\infty$ باشد، تابع f چند مجانب قائم دارد؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۲ ✓

(۱) ۳

$$f(x) = \frac{|x|^2 + |x|}{|x|^2 + b|x|} = \frac{|x|+1}{|x|+b} \rightarrow |x|+b=0 \rightarrow |x|=-b$$

$$b=0 \rightarrow f(x) = \frac{|x|+1}{|x|} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \times$$

$$b>0 \rightarrow |x| = \text{عدد منفی} \times$$

$$b<0 \rightarrow \checkmark$$

$$|x|=-b, b<0 \rightarrow x \rightarrow \text{دو جواب دارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} \checkmark$$

۱۸- نمودار تابع $y=g(x)$ در زیر رسم شده است. برای تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq a \\ g(0) & x = a \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ کدام است؟

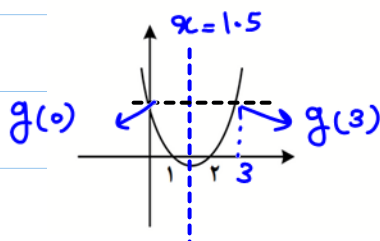
است. اگر بازه (b,c) حدود تغییرات a باشد، $b+c$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳ ✓

(۴) ۴



$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-a} = -\infty \rightarrow \frac{g(a)-g(0)}{0^+} = -\infty$$

$$g(a) - g(0) < 0 \rightarrow g(a) < g(0) \rightarrow 0 < a < 3 \rightarrow 3+0=3$$

۱۹- اگر α زاویه خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ در نقطه $(-1, -1)$ با جهت مثبت محور x ها باشد، حاصل عبارت

$$A = 3\sin\alpha + 2\cos\alpha \text{ کدام است؟}$$

۴) $-0.3\sqrt{10}$

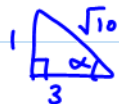
۳) $-0.9\sqrt{10}$ ✓

۲) $0.3\sqrt{10}$

۱) $0.9\sqrt{10}$

$$y = (x)^{-1/3} \rightarrow y' = (-1/3)(x)^{-4/3} \xrightarrow{x=-1} (-1/3) \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{(-1)^4}} \right) = -1/3$$

$$\tan\alpha = -1/3, \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{10}}$$



$$A = \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{12}{\sqrt{10}} = -\frac{9}{\sqrt{10}} \Rightarrow \frac{-9\sqrt{10}}{10} \rightarrow -0.9\sqrt{10}$$

۲۰- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 1 \\ x^2+1 & x < 1 \end{cases}$ داده شده است. کدام مورد در خصوص مشتقات یک طرفه f در $x=1$ ، درست است؟

۴) $f'_+(1) = +\infty$

۳) $f'_+(1) = -\infty$

۲) $f'_-(1) = +\infty$ ✓

۱) $f'_-(1) = 3$

تابع از راست در نقطه 1 پیوسته است $f(1) = 4$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$ ، تابع از چپ در نقطه 1 پیوسته نیست.

$$f'_+(1) = 3$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1 - 4}{x - 1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

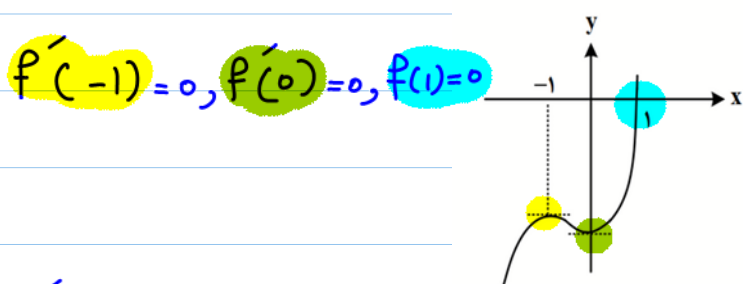
۲۱- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 5$ در زیر رسم شده است. عرض نقطه ماکزیمم نسبی تابع f ، کدام است؟

۱) -4 ✓

۲) -3

۳) $-\frac{5}{2}$

۴) $-\frac{7}{2}$



$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(0) = 0 \rightarrow c = 0$$

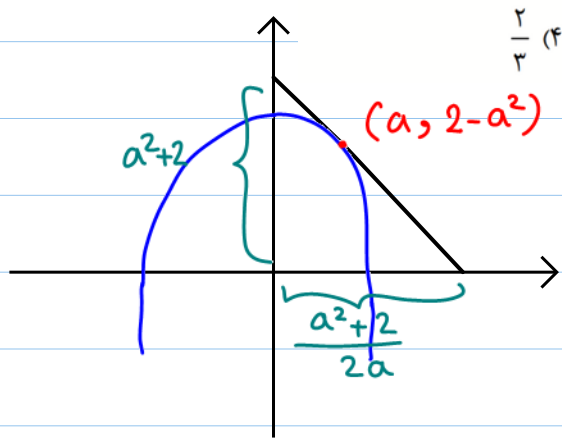
$$f'(-1) = 0 \rightarrow 3a - 2b = 0 \rightarrow 3a = 2b \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} a = 2, b = 3$$

$$f(1) = 0 \rightarrow a + b - 5 = 0 \rightarrow a + b = 5$$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5 \xrightarrow{\text{عرض نقطه ماکزیمم نسبی}} f(-1) = -2 + 3 - 5 = -4$$

۲۲- در نقطه A از نمودار سهمی $y = 2 - x^2$ واقع در ناحیه اول، مماسی رسم می‌کنیم که مماس رسم شده همراه با

محورهای مختصات، مثلثی با مساحت مینیمم می‌سازد. عرض نقطه A کدام است؟



$$y' = -2x$$

$$a \Rightarrow \text{شیب خط در نقطه } a \Rightarrow m = -2a$$

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - 2 + a^2 = -2a(x - a)$$

$$y = -2ax + a^2 + 2 \leftarrow \text{معادله خط مماس}$$

$$\text{ارتفاع مثلث } x=0 \rightarrow y = a^2 + 2$$

$$\text{قاعده مثلث } y=0 \rightarrow x = \frac{a^2 + 2}{2a}$$

$$S(a) = \frac{(a^2 + 2)}{2} \cdot \frac{(a^2 + 2)}{2a} = \frac{(a^2 + 2)^2}{4a}$$

$$S'(a) = \frac{2(a^2 + 2)(2a)(4a) - (4)(a^2 + 2)^2}{16a^2} = 0 \rightarrow 16a^2(a^2 + 2) - 4(a^2 + 2)^2 = 0$$

$$16a^2(a^2 + 2) = 4(a^2 + 2)^2$$

$$16a^2 = 4(a^2 + 2)$$

$$12a^2 = 8 \Rightarrow a^2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$