

۱- مقدار عبارت گویای $A = \frac{x^3 - 3\sqrt[3]{2}x^2 + 3\sqrt[3]{4}x - 1}{x^3 - 3\sqrt[3]{3}x^2 + 3\sqrt[3]{9}x}$ به ازای $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ کدام است؟

۰٫۸ (۴)

۰٫۶ (۳)

۰٫۴ (۲)

۰٫۲ (۱)

$$A = \frac{(x - \sqrt[3]{2})^3 + 1}{(x - \sqrt[3]{3})^3 + 3} \xrightarrow{x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}} A = \frac{(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})^3 + 1}{(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3})^3 + 3} = \frac{4}{5} = ۰٫۸$$

۲- اگر $۳a + ۲$ ، ۱۱ و $a - ۴$ ، به ترتیب جملات چهارم، هفتم و نهم یک الگوی خطی باشند، چند جمله از این الگو مثبت است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

$$t_n = kn + b \quad t_4 = ۳a + ۲, \quad t_5 = ۱۱, \quad t_9 = a - ۴$$

$$k = \frac{۱۱ - ۳a - ۲}{۲} = \frac{a - ۴ - ۱۱}{۲} \rightarrow ۱۸ - ۶a = ۳a - ۱۵ \rightarrow ۹a = ۳۳ \rightarrow a = ۷$$

$$t_5 = ۱۱, \quad t_9 = ۳ \rightarrow k = -۴, \quad b = ۳۹ \rightarrow t_n = -۴n + ۳۹ > ۰$$

$$۴n < ۳۹ \rightarrow n < \frac{۳۹}{۴} \rightarrow n = ۱, ۲, \dots, ۹$$

۳- به ازای چند مقدار از a ، معادله درجه دوم $(x - ۲)^2 + ۲a(x + ۱)^2 = a$ دارای یک ریشه مضاعف است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$x^2 - ۴x + ۴ + ۲a(x^2 + ۲x + ۱) - a = 0 \rightarrow (۲a + ۱)x^2 + (۴a - ۴)x + ۴ + a = 0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow \Delta = ۱۶(a - ۱)^2 - ۴(۲a + ۱)(۴ + a) = 0 \rightarrow ۴(a^2 - ۲a + ۱) - (۲a^2 + ۹a + ۴) = 0$$

$$۲a^2 - ۱۷a = 0 \rightarrow a(۲a - ۱۷) = 0 \rightarrow a = 0 \text{ یا } a = \frac{۱۷}{۲}$$

۴- به چند طریق می توان از بین ۳ ریاضی دان، ۲ فیزیک دان و ۳ شیمی دان، یک کمیته علمی دو نفره انتخاب کرد به طوری که دو نفر انتخابی هم رشته نباشند؟

۶۶ (۴)

۵۴ (۳)

۳۳ (۲)

۲۷ (۱)

$$\text{روز سه شنبه} \rightarrow \text{روز چهارشنبه} \rightarrow \binom{3}{1} + \binom{3}{1} + \binom{3}{1} = 9$$

$$\text{کل حالت} = \binom{9}{1} = 9 \rightarrow 36 - 9 = 27$$

۶- اگر α و β دو عدد حقیقی و متمایز باشند به طوری که $\alpha^2 = \alpha + 3$ و $\beta^2 = \beta + 3$ باشد، مقدار $\alpha^5 + \beta^5$ کدام است؟

۷۹ (۴)

۷۳ (۳)

۶۷ (۲)

۶۱ (۱)

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 = \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 \rightarrow \alpha^4 + \beta^4 = (\alpha + \beta + 3)^2 - 2(\alpha\beta + 9 + 3(\alpha + \beta))$$

$$(\alpha^4 + \beta^4)(\alpha + \beta) = \alpha^5 + \beta^5 + \alpha^4\beta + \alpha\beta^4$$

$$\rightarrow \alpha^5 + \beta^5 = (\alpha^4 + \beta^4)(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$\alpha^2 = \alpha + 3, \beta^2 = \beta + 3 \rightarrow x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow \alpha + \beta = 3 = 1$$

$$\alpha\beta = 3 = -3$$

$$(*) \Rightarrow \alpha^5 + \beta^5 = ((3)^2 - 2(1 + 9 + 3)) (1) + 3(1 + 3 \times 3) = (9 - 18) + 30 = 21$$

۷- نمودار تابع $y = mx^2 - 3x + 4$ محور x ها را در دو طرف $x=2$ قطع می کند. اگر حدود تغییرات m بازه (a, b) باشد، مقدار $a + 2b$ کدام است؟

صفر (۴)

۱ (۳)

 $\frac{1}{2}$ (۲)

۲ (۱)

$$af(r) < 0 \rightarrow m f(r) < 0 \rightarrow m(4m - 6 + 4) < 0 \rightarrow m(4m - 2) < 0$$

$$\rightarrow 0 < m < \frac{1}{2} \rightarrow a = 0, b = \frac{1}{2} \rightarrow a + 2b = 1$$

۸- برای $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ اگر $f^{-1}(6-2x) \leq f^{-1}(2-x)$ باشد، حدود x شامل چند عدد صحیح مثبت است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \xrightarrow{\text{استریتوری}} f^{-1}(x) \xrightarrow{\text{استریتوری}}$$

$$f^{-1}(6-2x) \leq f^{-1}(2-x) \rightarrow 6-2x \geq 2-x \rightarrow -x \geq -4 \rightarrow x \leq 4$$

$$6-2x > 0 \rightarrow x < 3, \quad 2-x > 0 \rightarrow x < 2 \rightarrow x < 2$$

۹- اگر $75^x = 27^y$ باشد، حاصل $125^{\frac{x}{y-x}}$ کدام است؟ ($x \neq 0$)

۳√۳ (۴)

۵√۵ (۳)

√۳ (۲)

√۵ (۱)

$$(2^x \cdot 3)^x = (3^x)^y \rightarrow 2^{xy-x} = 3^{xy-x} \rightarrow 2^{\frac{xy}{xy-x}} = 3^{\frac{xy}{xy-x}}$$

$$\rightarrow 2^{\frac{x}{y-x}} = \sqrt{3} \rightarrow 125^{\frac{x}{y-x}} = 2^{\frac{xy}{y-x}} = (\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$$

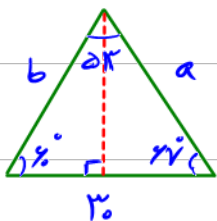
۱۰- اگر طول یک ضلع مثلثی ۳۰ و اندازه دوزاویه مجاور آن ضلع ۶۰° و ۶۷° باشد، محیط مثلث کدام است؟ ($\cos 53^\circ = 0.6$)

۴۵ + ۴۰√۳ (۴)

۴۵ + ۳۰√۳ (۳)

۳۰ + ۴۰√۳ (۲)

۳۰ + ۳۰√۳ (۱)



$$S = \frac{1}{2} \times r \times b \times \sin 53^\circ = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin 23^\circ$$

$$r \times \frac{\sqrt{3}}{2} = a \times \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{15\sqrt{3}}{1} = \frac{15\sqrt{3}}{1}$$

$$S = \frac{1}{2} \times r \times a \times \sin 67^\circ = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin 23^\circ \rightarrow r \cdot \sin 67^\circ = b \times \frac{1}{2}$$

$$\sin(67^\circ) = \sin(180^\circ - 23^\circ) = \sin 180^\circ \cos 23^\circ - \cos 180^\circ \sin 23^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\underline{P} = r + \frac{15\sqrt{3}}{1} + \frac{15}{1} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} \right) = 45 + 3\sqrt{3}$$

۱۱- اگر $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار داشته باشد،

انتهای زاویه‌های $\alpha + \beta$ و 2β به ترتیب در کدام ربع‌ها قرار دارند؟

- (۱) دوم و سوم (۲) سوم و سوم (۳) دوم و چهارم (۴) سوم و چهارم

$$\left. \begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = -\frac{64}{65} \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = -\frac{12}{65} \end{aligned} \right\} \text{ ربع سوم}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\beta &= 2 \sin \beta \cos \beta = 2\left(\frac{5}{13}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{120}{169} \\ \cos 2\beta &= 2 \cos^2 \beta - 1 = 2\left(-\frac{12}{13}\right)^2 - 1 = \frac{288}{169} - 1 > 0 \end{aligned} \right\} \text{ ربع دوم}$$

۱۲- معادله مثلثاتی $\frac{\sqrt{3} + \tan x}{1 + \sqrt{3} \cot x} = \tan 4x$ چند جواب در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۱۳

$$\frac{x \tan x}{\tan x + \sqrt{3}} \rightarrow \frac{\sqrt{3} \tan x + \tan^2 x}{\tan x + \sqrt{3}} = \frac{\tan x (\sqrt{3} + \tan x)}{(\sqrt{3} + \tan x)} = \tan x$$

$$\rightarrow \Sigma x = k\pi + x \rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$$

k	-۶	-۵	-۴	-۳	-۲	-۱	۰
x	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$
x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
k	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π	$\frac{7\pi}{3}$

بنابراین $1 + \sqrt{3} \cot x = 0$

$$\rightarrow \cot x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}$$

بنابراین $\cos 4x = 0 \rightarrow \Sigma x = k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$

و $\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi$, $\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$



@azad_mathematics

dr.aliazad



علی آزاد

۱۳- اگر $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ و $g(x) = [1-x]$ باشد، به ازای چند مقدار صحیح a ، $\lim_{x \rightarrow a^+} \log(x) = 1+a$ است؟

$x \rightarrow a^+$

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f([1-x]) = \lim_{x \rightarrow a^+} 1 - \sqrt{[1-x]} = 1+a \rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{[1-x]} = -a$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{[1-x]} = -a \rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{1+[x]} = -a \rightarrow \begin{cases} a=0 & \checkmark \\ a=-1 & \checkmark \\ a=-2 & \times \\ a=-3 & \times \\ a=-4 & \times \end{cases}$$

۱۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cos 2\pi x - 1}{x + 2\sqrt{-x} - 1}$ کدام است؟

$8\pi^2$ (۴)

$4\pi^2$ (۳)

$2\pi^2$ (۲)

صفر (۱)

$$\xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2\pi \sin 2\pi x}{1 - \frac{1}{\sqrt{-x}}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2\pi \sqrt{-x} \sin 2\pi x}{\sqrt{-x} - 1} \xrightarrow{\text{Hop}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2\pi \left(-\frac{1}{\sqrt{-x}} \sin 2\pi x + 2\pi \cos 2\pi x (\sqrt{-x}) \right)}{\frac{1}{\sqrt{-x}}} = \frac{2\pi \left(-\frac{1}{\sqrt{-1}} \times 0 + 2\pi \times 1 \times 1 \right)}{\frac{1}{\sqrt{-1}}} = 8\pi^2$$

۱۵- برای تابع $f(x) = \frac{1-2x}{6x^2+x+a}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} f(x)$ موجود و مخالف صفر باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{3x+2}{|x-a|} \times f(x)$ کدام است؟

وجود ندارد (۴)

$-\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

صفر (۱)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} f(x) \text{ موجود } \rightarrow 6\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + a = 0 \rightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + a = 0 \rightarrow a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{3x+2}{|x+1|} \times f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{3x+2}{x+1} \times \frac{1-2x}{6x^2+x-2} = \frac{-1}{\frac{1}{3}} = -\frac{3}{4}$$

۱۶- اگر $f(x) = a(1-x)(x+1) - bx^2$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه صفر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{xf(x)}{x+b}$ کدام است؟

(۴) وجود ندارد

(۳) صفر

(۲) $+\infty$

(۱) $-\infty$

$$f(x) = a(1-x) - bx^2 = a - ax - bx^2 = a - x(a+b) \rightarrow a+b=0 \rightarrow b=-a$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{xf(x)}{x+b} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{ax}{x-a} = \frac{a^2}{0^-} = -\infty$$

۱۷- اگر حد چپ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + b|x|}$ در $x=a$ برابر $-\infty$ باشد، تابع f چند مجانب قائم دارد؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۲

(۱) ۳

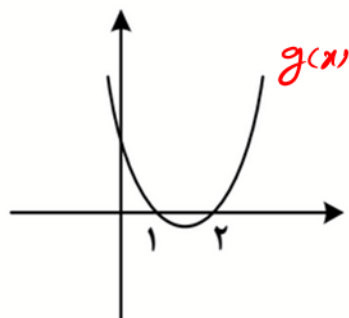
$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x^2 + |x|}{x^2 + b|x|} = -\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{|x|^2 + |x|}{|x|^2 + b|x|} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{|x|(|x| + 1)}{|x|(|x| + b)} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{|x| + 1}{|x| + b}$$

$$|a| + b = 0 \rightarrow b = -|a|$$

$$f(x) = \frac{|x| + 1}{|x| + b} = \frac{|x| + 1}{|x| - |a|}$$

$$|x| - |a| = 0 \rightarrow \begin{cases} x = a \\ x = -a \end{cases} \text{ (۲) مجانب قائم}$$

۱۸- نمودار تابع $y = g(x)$ در زیر رسم شده است. برای تابع f با ضابطه $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ ، $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq a \\ g(a) & x = a \end{cases}$ کدام است؟



$$f'_+(a) = -\infty$$

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

$$g(x) = k(x-1)(x-2) \quad f(x) = \begin{cases} k(x-1)(x-2) & x \neq a \\ 2k > 0 & x = a \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{k(x-1)(x-2) - 2k}{x-a} = \frac{-2k}{0^+} = -\infty$$

$$k(a-1)(a-2) - 2k < 0$$

$$k(a^2 - 3a + 2) - 2k < 0 \rightarrow ka^2 - 3ak < 0 \rightarrow k(a^2 - 3a) < 0$$

$$0 < a < 3$$

$$b = 0, c = 3 \rightarrow b + c = 3$$

۱۹- اگر α زاویه خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ در نقطه $(-1, -1)$ با جهت مثبت محور x ها باشد، حاصل عبارت

$$A = 3\sin\alpha + 4\cos\alpha \text{ کدام است؟}$$

$$-0.3\sqrt{10} \quad (4)$$

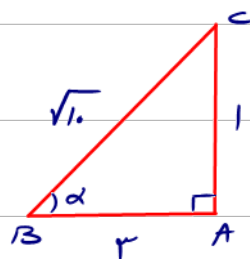
$$-0.9\sqrt{10} \quad (3)$$

$$0.3\sqrt{10} \quad (2)$$

$$0.9\sqrt{10} \quad (1)$$

$$y = x^{-1/3} \rightarrow y' = -\frac{1}{3}x^{-4/3} \xrightarrow{x=-1} y' = -\frac{1}{3} = \tan\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$



$$A = 3\sin\alpha + 4\cos\alpha = \frac{-9}{\sqrt{10}} = -0.9\sqrt{10}$$

۲۰- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 1 \\ x^3+1 & x < 1 \end{cases}$ داده شده است. کدام مورد در خصوص مشتقات یک طرفه f در $x=1$ ، درست است؟

$$f'_+(1) = +\infty \quad (4)$$

$$f'_+(1) = -\infty \quad (3)$$

$$f'_-(1) = +\infty \quad (2)$$

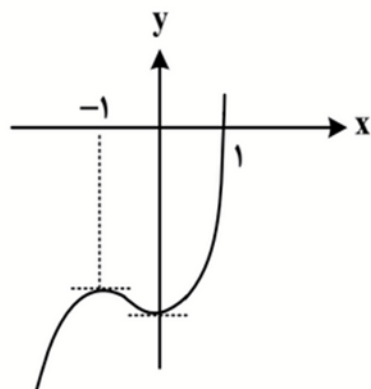
$$f'_-(1) = 3 \quad (1)$$

درست است؟

تابع f در نقطه $x=1$ نسبتاً پیوسته است.

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 1 - 4}{x - 1} = \frac{-2}{-} = +\infty$$

۲۱- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 5$ در زیر رسم شده است. عرض نقطه ماکزیمم نسبی تابع f ، کدام است؟



$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad f'(0) = 0 \rightarrow c = 0$$

$$f'(x) = x(3ax + 2b) = 0 \rightarrow x = -\frac{2b}{3a} = -1$$

$$\rightarrow 2b = 3a, \quad f(0) = -5$$

$$f(1) = 0 \rightarrow a + b - 5 = 0 \rightarrow a + b = 5$$

$$a + \frac{2}{3}a = 5 \rightarrow a = 3, \quad b = 2 \quad f(-1) = -a + b - 5 = -3 + 2 - 5 = -6$$

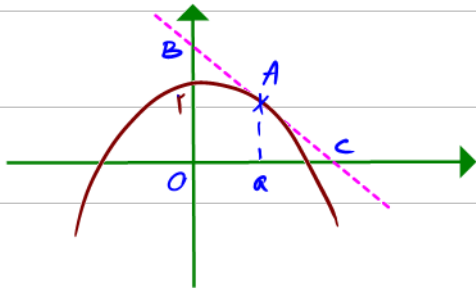
۲۲- در نقطه A از نمودار سهمی $y = 2 - x^2$ واقع در ناحیه اول، مماسی رسم می‌کنیم که مماس رسم شده همراه با محورهای مختصات، مثلثی با مساحت مینیمم می‌سازد. عرض نقطه A کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{5}{4} \quad (1)$$



$$A(a, r - a^2) \quad y' = -2x \xrightarrow{x=a} y' = -2a$$

$$BC \text{ خط مماس } y = -2ax + b \xrightarrow{(a, r - a^2)} r - a^2 = -2a^2 + b$$

$$y = -2ax + a^2 + r$$

$$b = a^2 + r$$

نقطه B $x=0, y = a^2 + r \quad B(0, a^2 + r)$

$$S = \frac{1}{2} (a^2 + r) \left(\frac{a^2 + r}{2a} \right)$$

نقطه C $y=0, x = \frac{a^2 + r}{2a} \quad C\left(\frac{a^2 + r}{2a}, 0\right)$

$$S' = \frac{1}{2} \left(\frac{r(a^2 + r)}{2a} + \frac{2a(2a) - r(a^2 + r)}{4a^2} (a^2 + r) \right) = 0$$

$$a^2 + r + \frac{4a^2 - 2a^2 - r}{4a^2} (a^2 + r) = 0 \rightarrow r(a^2 - r)(a^2 + r) = -4a^2(a^2 + r)$$

$$r(a^2 - r) = -4a^2 - 4a^2 \rightarrow 2a^4 + 4a^2 - 4 = 0 \rightarrow 2a^4 + 4a^2 - 4 = 0$$

$$a^2 = \frac{r}{2} \rightarrow y_A = r - a^2 = r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$$

علی آزاد