

۱- مقدار عبارت گویای $A = \frac{x^2 - 2\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{4}x - 1}{x^2 - 2\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{9}x}$ به ازای $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ کدام است؟

$A = \frac{(x - \sqrt[3]{2})^3 + 1}{(x - \sqrt[3]{3})^3 + 3} = \frac{3 + 1}{2 + 3} = 0.8$

۰.۸ (۴) ✓ ۰.۶ (۳) ۰.۴ (۲) ۰.۲ (۱)

۲- اگر $2a + 11$ و $a - 4$ به ترتیب جملات چهارم، هفتم و نهم یک الگوی خطی باشند، چند جمله از این الگو مثبت است؟

$(3a + 2) + 3d = 11 \rightarrow a + d = 3 \rightarrow d = -4$
 $11 + 2d = a - 4 \rightarrow 2d - a = -15 \rightarrow a = 7$

$a_{10} = -1$
 $a_1 - a_9$

۱۱ (۴) ۱۰ (۳) ۹ (۲) ✓ ۸ (۱)

۳- به ازای چند مقدار از a ، معادله درجه دوم $a(x-2)^2 + 2a(x+1)^2 = a$ دارای یک ریشه مضاعف است؟

$(2a+1)x^2 + (4a-4)x + (4+a) = 0 \rightarrow \Delta = 0$

$14a^2 - 32a + 14 - 16a^2 - 32a - 14 = 0$
 $16a^2 - 64a = 0 \rightarrow 4a(2a - 16) = 0$
 $a = 0, a = \frac{16}{2}$

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ✓ ۱ (۱)

۴- به چند طریق می توان از بین ۳ ریاضی دان، ۳ فیزیک دان و ۳ شیمی دان، یک کمیته علمی دو نفره انتخاب کرد

به طوری که دو نفر انتخابی هم رشته نباشند؟

$\binom{9}{2} = 36$
 $3 \times \binom{3}{2} = 9$
 $36 - 9 = 27$

۶۶ (۴) ۵۴ (۳) ۳۳ (۲) ۲۷ (۱) ✓

۶- اگر α و β دو عدد حقیقی و متمایز باشند به طوری که $\alpha^2 = \alpha + 3$ و $\beta^2 = \beta + 3$ باشد، مقدار $\alpha^5 + \beta^5$ کدام است؟

$\alpha^2 = \alpha + 3 \rightarrow \alpha^3 = 4\alpha + 3 \rightarrow \alpha^4 = 7\alpha + 12 \rightarrow \alpha^5 = 19\alpha + 21$
 $\beta^5 = 19\beta + 21$
 $\alpha^5 + \beta^5 = 19(\alpha + \beta) + 42 = 41$

۷۹ (۴) ۷۳ (۳) ۶۷ (۲) ۶۱ (۱) ✓

۷- نمودار تابع $y = mx^2 - 3x + 4$ محور x ها را در دو طرف $x=2$ قطع می کند. اگر حدود تغییرات m بازه (a, b) باشد، مقدار $a+2b$ کدام است؟

صفر (۴) $\checkmark$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۱)

$$\Delta > 0 \rightarrow 9 - 14m > 0 \rightarrow m < \frac{9}{14}$$

if $m > 0$, $f(2) < 0$: سعی روی بالا $\Rightarrow m f(2) < 0 \rightarrow m(8m - 2) < 0$
 if $m < 0$, $f(2) > 0$: سعی روی پایین $\Rightarrow m(8m - 2) < 0$

$$0 < m < \frac{1}{4}$$

۸- برای $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ اگر $f^{-1}(6-2x) \leq f^{-1}(2-x)$ باشد، حدود x شامل چند عدد صحیح مثبت است؟

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱) $\checkmark$

$f \rightarrow$ نزولی
 $f^{-1} \rightarrow$ نزولی

$$4 - 2x \geq 2 - x \Rightarrow x \geq 2$$

$$R_f = (0, +\infty) \rightarrow D_{f^{-1}} = (0, +\infty) \rightarrow \begin{cases} 2 - x > 0 \rightarrow x < 2 \\ 4 - 2x > 0 \rightarrow x < 2 \end{cases}$$

$$x < 2$$

۹- اگر $75^x = 27^y$ باشد، حاصل $125^{\frac{x}{3y-x}}$ کدام است؟ ($x \neq 0$)

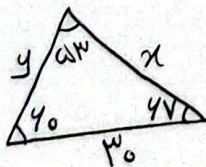
$3\sqrt{3}$ (۴) $\checkmark$ $5\sqrt{5}$ (۳) $5\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۱)

$$75^x = 27^y \rightarrow 3^x 5^{2x} = 3^{3y} \rightarrow 3^{xy-x} = 5^{2x} \xrightarrow{\log} (xy-x) \log 3 = (2x) \log 5$$

$$\Rightarrow 125^{\frac{x}{3y-x}} = 5^{\left(\frac{3 \log 3}{2 \log 5}\right)} = 5^{\frac{3}{2} \log 5} = 3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}$$

۱۰- اگر طول یک ضلع مثلثی ۳۰ و اندازه دوزاویه مجاور آن ضلع 60° و 67° باشد، محیط مثلث کدام است؟ ($\cos 3^\circ = 0.96$)

$45 + 40\sqrt{3}$ (۴) $45 + 30\sqrt{3}$ (۳) $30 + 40\sqrt{3}$ (۲) $30 + 30\sqrt{3}$ (۱)



$$\frac{30}{\sin 67^\circ} = \frac{x}{\sin 40^\circ} = \frac{y}{\sin 4^\circ}$$

$$\frac{30}{0.96} = \frac{\sqrt{3}}{2} x \rightarrow x = \frac{30}{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$\sin 4^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} (0.4) - \left(-\frac{1}{2}\right) (0.1) = 0.1\sqrt{3} + 0.05 \rightarrow y = 30 \left(\frac{0.1\sqrt{3} + 0.05}{0.1} \right)$$

$$y = \frac{45}{2} \sqrt{3} + 15$$

۱۱- اگر $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار داشته باشد،

انتهای زاویه‌های $\alpha + \beta$ و 2β به ترتیب در کدام ربع‌ها قرار دارند؟

۱۲) :

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \alpha = 37^\circ$$

$$\cos \beta = -\frac{12}{13} \rightarrow \beta = 180^\circ - 23^\circ = 157^\circ$$

$$\alpha + \beta = 194^\circ$$

$$2\beta = 314^\circ$$

انتهای زاویه‌های $\alpha + \beta$ و 2β به ترتیب در کدام ربع‌ها قرار دارند؟

(۱) دوم و سوم (۲) سوم و سوم (۳) دوم و چهارم (۴) سوم و چهارم

۲) $\cos \beta = -1 \rightarrow \beta = 180^\circ$
 $\alpha = 37^\circ$

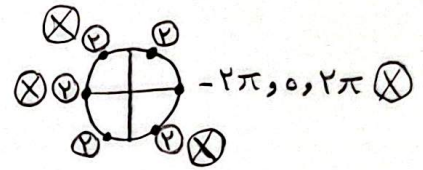
۱۵) $\sin 47^\circ = 0.13\sqrt{3} + 0.15 = 0.41 = \cos 23^\circ$

۱۲- معادله مثلثاتی $\frac{\sqrt{3} + \tan x}{1 + \sqrt{3} \cot x} = \tan 4x$ چند جواب در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ دارد؟

۱۳ (۴) ۸ (۳) ۷ (۲) ۴ (۱)

$$(1 + \sqrt{3} \cot x)(\tan x) = \sqrt{3} + \tan x$$

$$\tan x = \tan 4x \rightarrow 4x = k\pi + x \rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$$



۱۳- اگر $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ و $g(x) = [1 - x]$ باشد، به ازای چند مقدار صحیح a ، $\lim_{x \rightarrow a^+} f \circ g(x) = 1 + a$ است؟

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f \circ g(x) = 1 + a \rightarrow 1 - \sqrt{-a} = 1 + a \rightarrow \sqrt{-a} = -a \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 0 \end{cases}$$

$[1 - \bar{a}] = -a$

$$g(x) = [1 - \bar{a}] \xrightarrow{\text{if } a=1} g(x) = -1 \Rightarrow [1 - \bar{a}] = -a$$

۱۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cos 2\pi x - 1}{x + 2\sqrt{-x} - 1}$ کدام است؟

۱۳ (۴) ۴ (۳) ۲ (۲) صفر (۱)

$$\frac{0}{0} \rightarrow \frac{(-\sin 2\pi x) 2\pi}{1 - \frac{1}{\sqrt{-x}}} \rightarrow \frac{0}{0} \rightarrow \frac{-4\pi^2 \cos 2\pi x}{\frac{1}{-x} \times \frac{1}{2\sqrt{-x}}} = 8\pi^2$$

۱۵- برای تابع $f(x) = \frac{1-2x}{6x^2+x+2}$ اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ موجود و مخالف صفر باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x+2}{|x-a|} \times f(x)$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) وجود ندارد

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + a = 0 \rightarrow \boxed{a = -2}$$

$$\frac{2}{3} \times (3x+2) \times \frac{1-2x}{(2x-1)(3x+2)} = \frac{2}{3} \times \frac{1-2x}{2x-1} = \frac{2}{3} \times \frac{1-2x}{-(1-2x)} = -\frac{2}{3}$$

۱۶- اگر $f(x) = a(1-x)(x+1) - bx^2$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه صفر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{xf(x)}{x+b}$ کدام است؟

(۱) $-\infty$ (۲) $+\infty$ (۳) صفر (۴) وجود ندارد

$$f(x) = -ax^2 + a - bx^2 \rightarrow b = -a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{ax}{x-a} = \frac{a^2}{0} = -\infty$$

۱۷- اگر حد چپ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+b|x|}$ در $x=1$ برابر $-\infty$ باشد، تابع f چند مجانب قائم دارد؟

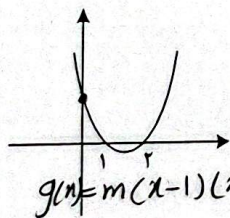
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

$$b = -1$$

$$|x|(|x|-1) = 0$$

$$x = 0 \text{ و } 1$$

۱۸- نمودار تابع $y = g(x)$ در زیر رسم شده است. برای تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq a \\ g(a) & x = a \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ کدام است؟



$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = -\infty$$

$$g(x) - g(a) < 0 \rightarrow g(x) < g(a)$$

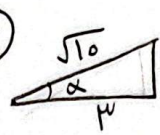
$$mx^2 - 3mx + 2m < 2m$$

$$mx(x-3) < 0$$

$$\boxed{0 < x < 3}$$

۱۹- اگر α زاویه خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ در نقطه $(-1, -1)$ با جهت مثبت محور x ها باشد، حاصل عبارت

$A = r \sin \alpha + r \cos \alpha$ کدام است؟

$y' = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}}$ $\rightarrow m = \tan \alpha = y'(-1) = -\frac{1}{3}$ 

$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$
 $\cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{10}}$

-۰,۲√۱۰ (۴)
 -۰,۹√۱۰ (۳) ✓
 ۰,۲√۱۰ (۲)
 ۰,۹√۱۰ (۱)

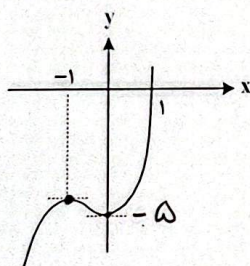
۲۰- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 1 \\ x^2+1 & x < 1 \end{cases}$ داده شده است. کدام مورد در خصوص مشتقات یک طرفه f در $x=1$ ، درست است؟

$f'_+(1) = 3$
 $f'_+(1) = +\infty$ (۴)
 $f'_+(1) = -\infty$ (۳)
 $f'_-(1) = +\infty$ (۲) ✓
 $f'_-(1) = 3$ (۱)

پیشی $\begin{cases} 4 \\ 3 \\ 2 \end{cases}$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+1-4}{x-1} = \frac{-2}{0} = +\infty$$

۲۱- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 5$ در زیر رسم شده است. عرض نقطه ماکزیمم نسبی تابع f ، کدام است؟



$f(-1) = -5$ (۴) ✓
 -3 (۲)
 $-\frac{5}{2}$ (۳)
 $-\frac{7}{2}$ (۱)

$(1, 5): a+b+c=5$
 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
 $f'(0) = 0 \rightarrow c=0$
 $f'(-1) = 0 \rightarrow 3a - 2b = 0$
 $a+b=5 \rightarrow a=2, b=3$

۲۲- در نقطه A از نمودار سهمی $y = 2 - x^2$ واقع در ناحیه اول، مماسی رسم می‌کنیم که مماس رسم شده همراه با

محورهای مختصات، مثلثی با مساحت مینیمم می‌سازد. عرض نقطه A کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)
 $\frac{4}{3}$ (۳) ✓
 $\frac{2}{4}$ (۲)
 $\frac{5}{4}$ (۱)

$A = (t, 2-t^2)$
 $m = y' = -2t$
 $y - 2 + t^2 = -2t(x - t) \rightarrow y = t^2 - 2tx + 2$
 $x=0 \rightarrow y = t^2 + 2$
 $y=0 \rightarrow x = \frac{t^2+2}{2t}$
 $S = \frac{(t^2+2)^2}{2t} \rightarrow S' = 0 \Rightarrow \frac{(2t^2+4)1t^2 - 2(t^2+2)^2}{4t^2} = 0$

محمد عباس زاده دانشجوی برق دانشگاه تهران

$$(t^2+2)(2t^2 - (t^2+2)) = 0$$

$$3t^2 = 2 \rightarrow t^2 = \frac{2}{3}$$

$$y = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$