



تحلیل

درس ریاضی

کنکور ریاضی ۱۴۰۵

۱- مقدار عبارت گویای $A = \frac{x^3 - 3\sqrt[3]{2}x^2 + 3\sqrt[3]{4}x - 1}{x^3 - 3\sqrt[3]{3}x^2 + 3\sqrt[3]{9}x - 1}$ به ازای $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ کدام است؟ مقدار عبارت گویای

(۱) ۰٫۲ (۲) ۰٫۴ (۳) ۰٫۶ (۴) ۰٫۸

$$x^3 - 3\sqrt[3]{2}x^2 + 3\sqrt[3]{4}x - 1 = (x - \sqrt[3]{2})^3 + 1$$

$$x^3 - 3\sqrt[3]{3}x^2 + 3\sqrt[3]{9}x - 1 = (x - \sqrt[3]{3})^3 + 3$$

$$A = \frac{(x - \sqrt[3]{2})^3 + 1}{(x - \sqrt[3]{3})^3 + 3}$$

$$x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$$

$$A = \frac{(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})^3 + 1}{(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3})^3 + 3} = \frac{1 + 1}{1 + 3} = \frac{2}{4} = 0.5$$



۲- اگر $۳a+۲$ ، ۱۱ و $a-۴$ ، به ترتیب جملات چهارم، هفتم و نهم یک الگوی خطی باشند، چند جمله از این الگو مثبت است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

$$t_4 = a_1 + 3d = 3a + 2$$

$$t_7 = a_1 + 6d = 11$$

$$t_9 = a_1 + 8d = a - 4$$

$$\Rightarrow 3d = 3a - 9 \Rightarrow d = a - 3$$

$$\Rightarrow 2d = a - 15 \Rightarrow d = \frac{a - 15}{2}$$

$$\Rightarrow a - 3 = \frac{a - 15}{2} \Rightarrow a = 7$$

$$d = -4$$

$$a_1 = 35$$

$$\Rightarrow t_n = a_1 + (n-1)d = 35 - 4(n-1) > 0 \Rightarrow n < \frac{39}{4}$$



محمد زنگنه

دبیر ریاضی و هندسه

۳- به ازای چند مقدار از a ، معادله درجه دوم $(x-2)^2 + 2a(x+1)^2 = a$ دارای یک ریشه مضاعف است؟ www.konkur.in



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\Delta = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 2ax^2 + 4ax + a = 0$$

$$\Rightarrow (1+2a)x^2 + (4a-4)x + (a+4) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta' = 0 \Rightarrow 4(a-1)^2 = (2a+1)(a+4)$$

$$2a^2 - 17a = 0 \quad \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{17}{2} \end{cases}$$



محمد زنگنه

دبیر ریاضی و هندسه

۴- به چند طریق می توان از بین ۳ ریاضی دان، ۳ فیزیک دان و ۳ شیمی دان، یک کمیته علمی دو نفره انتخاب کرد به طوری که دو نفر انتخابی هم رشته نباشند؟

(۱) ۲۷

(۲) ۳۳

(۳) ۵۴

(۴) ۶۶

یک نفر ریاضی و یک نفر فیزیک یا یک نفر ریاضی و یک نفر شیمی یا یک نفر فیزیک و یک نفر شیمی

$$3 \times \left[\binom{3}{1} \times \binom{3}{1} \right] = 27$$



محمد زنگنه

دبیر ریاضی و هندسه

۵- نقیض گزاره سوری $\forall x \in \mathbb{R}; \sim (x \leq 0) \vee (x + \frac{1}{x} \leq 2)$ کدام است؟ خودش یه خود

$$\exists x \in \mathbb{R}; (x \geq 0) \wedge (x + \frac{1}{x} \leq 2) \quad (2)$$

$$\exists x \in \mathbb{R}; (x \geq 0) \vee (x + \frac{1}{x} \geq 2) \quad (1) \quad \times$$

$$\exists x \in \mathbb{R}; (x > 0) \wedge (x + \frac{1}{x} \leq 2) \quad (4)$$

$$\exists x \in \mathbb{R}; (x > 0) \vee (x + \frac{1}{x} > 2) \quad (3) \quad \times$$

نقیض

نکته: قواعد مورگان حساب گزاره

$$\sim (P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$$

$$\sim (P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$$



محمد زنگنه

دبیر ریاضی و هندسه

۶- اگر α و β دو عدد حقیقی و متمایز باشند به طوری که $\alpha^2 = \alpha + 3$ و $\beta^2 = \beta + 3$ باشد، مقدار $\alpha^5 + \beta^5$ کدام است؟

(۴) ۷۹

(۳) ۷۳

(۲) ۶۷

(۱) ۶۱

* حتماً معادله آن بفهم $x^2 - x - 3 = 0$ بوده است

$$\alpha^5 + \beta^5 = S^5 - 5PS^3 + 5P^2S$$

$S = 1$
 $P = -3$

$$= (1)^5 - 5(-3)(1) + 5(-3)^2(1)$$

$$= 61$$

نکته مهم:



محمد زنگنه

دبیر ریاضی و هندسه

۷- نمودار تابع $y = mx^2 - 3x + 4$ محور x ها را در دو طرف $x=2$ قطع می کند. اگر حدود تغییرات m بازه (a,b) باشد، مقدار $a+2b$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) ۲

سهمی را طوری جابجایی کنیم که مرکز از کفها + دیگری - باشد. در این حالت ضرب آنها $\ominus$ می شود بدین منظور $x \mapsto x+2$

$$f(x) = m(x+2)^2 - 3(x+2) + 4$$

$$= mx^2 + (4m-3)x + (4m-2)$$

سهمی را طوری جابجایی کنیم که مرکز از کفها + دیگری - باشد. در این حالت ضرب آنها $\ominus$ می شود بدین منظور $x \mapsto x+2$

$$\Rightarrow \frac{4m}{4m-2} < 0$$

$$\Rightarrow m \in (0, \frac{2}{4})$$

$$a=0$$

$$b=\frac{2}{4}$$

$$a+2b=1$$



۸- برای $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ اگر $f^{-1}(6-2x) \leq f^{-1}(2-x)$ باشد، حدود x شامل چند عدد صحیح مثبت است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$6-2x > 0$$

$$x < 3$$

$$2-x > 0$$

$$x < 2$$

چون f نزولی است پس
دارون آن نیز نزولی است.

$$6-2x \geq 2-x$$

$$4 \geq x$$

از اشتراک این شروط فقط $x=1$ است.



محمد زنگنه

دبیر ریاضی و هندسه

۹- اگر $75^x = 27^y$ باشد، حاصل $125^{\frac{x}{3y-x}}$ کدام است؟ ($x \neq 0$)

$3\sqrt{3}$ (۴)

$5\sqrt{5}$ (۳)

$\sqrt{3}$ (۲)

$\sqrt{5}$ (۱)

$$(5^2 \times 3)^x = (3^3)^y \Rightarrow 5^{2x} \times 3^x = 3^{3y} \div 3^x \rightarrow 5^{2x} = 3^{3y-x}$$

$$5^{\frac{2x}{3y-x}} = 3$$

$$\left(5^{\frac{x}{3y-x}}\right)^2 = 3$$

$$5^{\frac{x}{3y-x}} = \sqrt{3}$$

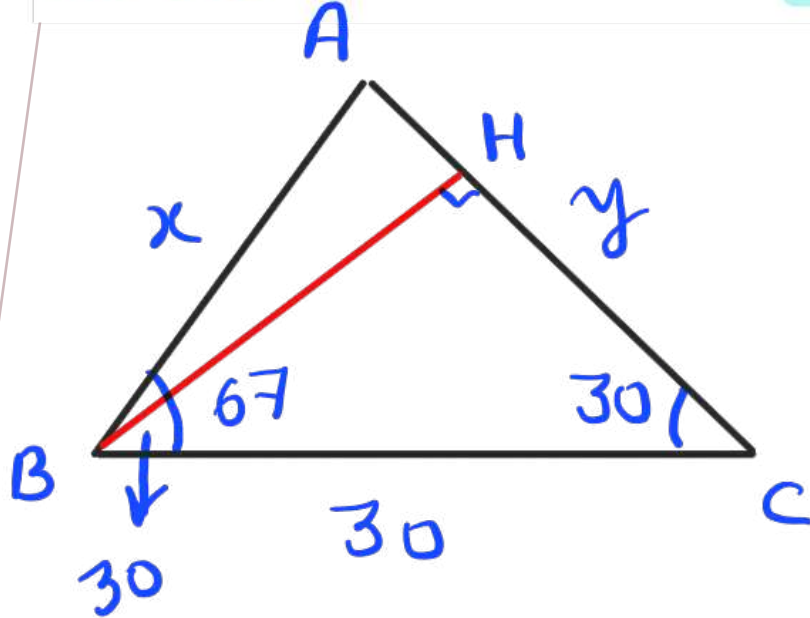


محمد زنگنه

دبیر ریاضی و هندسه

۱۰- اگر طول یک ضلع مثلثی 30 و اندازه دو زاویه مجاور آن ضلع 60° و 67° باشد، محیط مثلث کدام است؟ ($\cos 53^\circ = 0.6$)

$\sin 53^\circ = 0.8$ $45 + 40\sqrt{3}$ (۴) $45 + 30\sqrt{3}$ (۳) $30 + 40\sqrt{3}$ (۲) $30 + 30\sqrt{3}$ (۱)



$$CH \xrightarrow[30^\circ \text{ زاویه}]{\text{ضلع روبرو}} \frac{1}{2} BC \Rightarrow CH = 15$$

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow BH = 15\sqrt{3}$$

$$\frac{BH}{AB} = \frac{8}{10} \Rightarrow AB = \frac{75}{4}\sqrt{3}$$

$$AH = AB \cos 53^\circ \Rightarrow AH = \frac{45}{3}\sqrt{3}$$

$$P = \frac{75}{4}\sqrt{3} + \frac{45}{3}\sqrt{3} + 30 + 15 = 45 + 30\sqrt{3}$$



محمد زنگنه

دبیر ریاضی و هندسه

-۱۱

اگر $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار داشته باشد،

چون علامت $\cos$ در این دو ربع متفاوت است انتهای $\alpha + \beta$ در ربع سوم و چهارم

انتهای زاویه‌های $\alpha + \beta$ و 2β به ترتیب در کدام ربع‌ها قرار دارند؟

(۳) دوم و چهارم

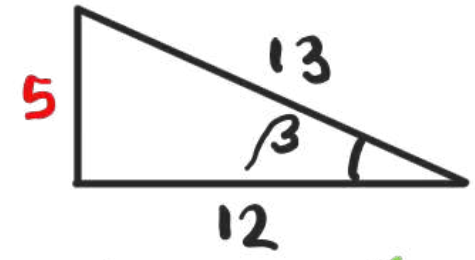
(۲) سوم و سوم

(۱) دوم و سوم

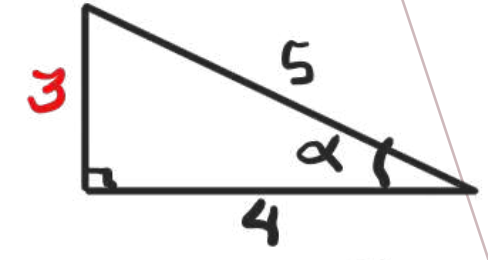
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{3}{5} \times \frac{-12}{13} + \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} < 0$$

← گزینه‌های اول و دوم حذف

$$\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \frac{144}{169} - \frac{25}{169} > 0$$



$$\sin \beta = \frac{5}{13}$$



$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$



۱۲- معادله مثلثاتی $\frac{\sqrt{3} + \tan x}{1 + \sqrt{3} \cot x} = \tan 4x$ چند جواب در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ دارد؟

۱۳ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۴ (۱)

$$\frac{\sqrt{3} + \tan x}{\tan x \cot x + \sqrt{3} \cot x} = \frac{(\sqrt{3} + \tan x)}{\cot x (\tan x + \sqrt{3})} = \frac{1}{\cot x} = \tan x$$

$$\tan x = \tan 4x \Rightarrow x = 4x + k\pi$$

$$-3x = k\pi$$

$$x = \frac{k\pi}{3} \Rightarrow \text{در هر شاوَب دو جواب دارد}$$

این بازه طول ۴ دوره شاوَب

است پس ۴ جواب دارد.



محمد زنگنه

دبیر ریاضی و هندسه

۱۳- اگر $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ و $g(x) = [1 - x]$ باشد، به ازای چند مقدار صحیح a ، $\lim_{x \rightarrow a^+} \log(x) = 1 + a$ است؟

$$x \rightarrow a^+$$

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(g(x)) \xrightarrow[\text{باظرافت}]{\text{حدود}} \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} [1 - x] = 1 - a^+ - 1 = -a^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -a^+} f(x) = 1 - \sqrt{-a^+} = 1 + a$$

$$-\sqrt{-a} = a \begin{cases} a=0 \\ a=-1 \end{cases}$$



محمد زنگنه

دبیر ریاضی و هندسه

۱۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cos 2\pi x - 1}{x + 2\sqrt{-x} - 1}$ کدام است؟

$4\pi^2$ (۴)

$2\pi^2$ (۳)

$2\pi^2$ (۲)

(۱) صفر

Hop $\rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2\pi \sin 2\pi x}{1 + \frac{-2}{2\sqrt{-x}}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-4\pi^2 \cos 2\pi x}{\frac{1}{2\sqrt{-x}} - x} = 8\pi^2$

$\hookrightarrow \frac{1}{\sqrt{-x}} = \frac{0 - 1(\frac{1}{2\sqrt{x}})}{-x}$



محمد زنگنه

دبیر ریاضی و هندسه

۱۵- برای تابع $f(x) = \frac{1-2x}{6x^2+x+a}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ موجود و مخالف صفر باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{3x+2}{|x-a|} \times f(x)$ کدام است؟

(۱) صفر
(۲) $\frac{3}{4}$
(۳) $-\frac{3}{4}$
(۴) وجود ندارد

↓
است، $x = \frac{1}{2}$ به صورت
حاصل حد ∞ ندهد

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{3x+2}{|x+2|} \times \frac{-1}{3x+2} = \frac{-1}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

است پس $x = \frac{1}{2}$ به خرج است

$$6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) + a = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$\hookrightarrow f(x) = \frac{(1-2x)}{(1-2x)(-3x+a)} = \frac{-1}{3x+2}$$



۱۶- اگر $f(x) = a(1-x)(x+1) - bx^2$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه صفر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{xf(x)}{x+b}$ کدام است؟

(۴) وجود ندارد

تابع ثابت
(۲) $+\infty$
(۳) صفر
(۴) وجود ندارد

(۱) $-\infty$

$$a - ax^2 - bx^2$$

$$(-a-b)x^2 + a \Rightarrow f(x) = a$$

$$= 0 \Rightarrow a = -b$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{ax}{x-a} = \frac{a^2}{a-a} = \frac{a^2}{0^-} \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \rightarrow -\infty$$



محمد زنگنه

دبیر ریاضی و هندسه

۱۷- اگر حد چپ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + b|x|}$ در $x = a$ برابر $-\infty$ باشد، تابع f چند مجانب قائم دارد؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۲

(۱) ۳

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{|x|(|x|+1)}{|x|(|x|+b)} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{(|x|+1)}{(|x|+b)} = -\infty$$

$\therefore |x|+b < 0$

پس باید متنی باشد و در این حالت منجر دوری دارد

با مقدار حدی که گفته : $|x|+b > 0 \rightarrow b > 0$ اگر
تناقض پیدا می کند



محمد زنگنه

دبیر ریاضی و هندسه

یعنی در نقطه غیر $x=a$ از f برهم منطبق هستند $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty, f(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq a \\ g(a) & x = a \end{cases}$$

۱۸- نمودار تابع $y = g(x)$ در زیر رسم شده است. برای تابع f با ضابطه

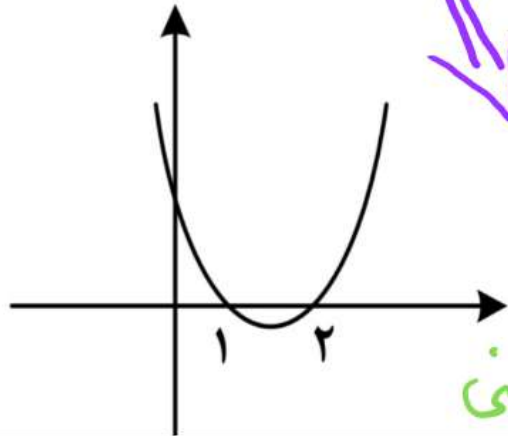
است. اگر بازه (b, c) حدود تغییرات a باشد، $b + c$ کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)



معرج صفر است و حاصل

$-\infty$ پس باید صورت عدد

غیر صفر و منفی باشد یعنی

$$f(a) - g(a) < 0$$

$$f(a) < g(a) \rightarrow a \in (1, 2) \rightarrow 1 + 2 = 3$$



محمد زنگنه

دبیر ریاضی و هندسه

۱۹- اگر زاویه خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ در نقطه $(-1, -1)$ با جهت مثبت محور x ها باشد، حاصل عبارت

$$A = 3\sin\alpha + 4\cos\alpha \quad \text{کدام است؟}$$

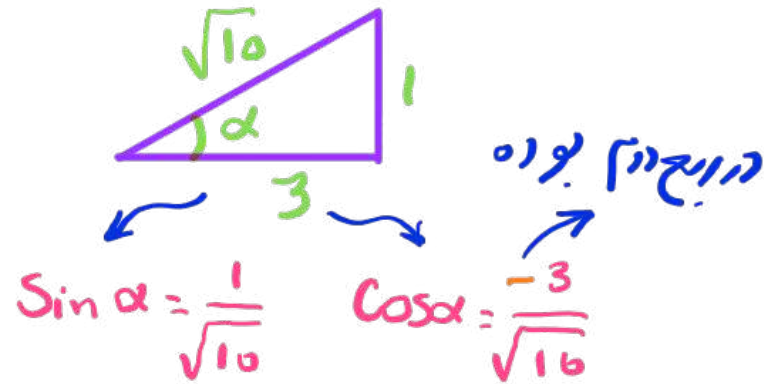
$$\tan\alpha = f'(-1) \Rightarrow \frac{1}{3} = \tan\alpha$$

$$(4) \quad -0,3\sqrt{10}$$

$$(3) \quad -0,9\sqrt{10}$$

$$(2) \quad 0,3\sqrt{10}$$

$$(1) \quad 0,9\sqrt{10}$$



$$\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{12}{\sqrt{10}} = \frac{-9}{\sqrt{10}}$$

$$= -0,9\sqrt{10}$$



محمد زنگنه

دبیر ریاضی و هندسه

۲۰- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 1 \\ x^3+1 & x < 1 \end{cases}$ داده شده است. کدام مورد درخصوص مشتقات یک طرفه f در $x=1$ ، درست است؟

(۴) $f'_+(1) = +\infty$

(۳) $f'_+(1) = -\infty$

(۲) $f'_-(1) = +\infty$

(۱) $f'_-(1) = 3$

تابع f در این نقطه ناپیوسته و درجهای مشتق ناپذیر است ولی

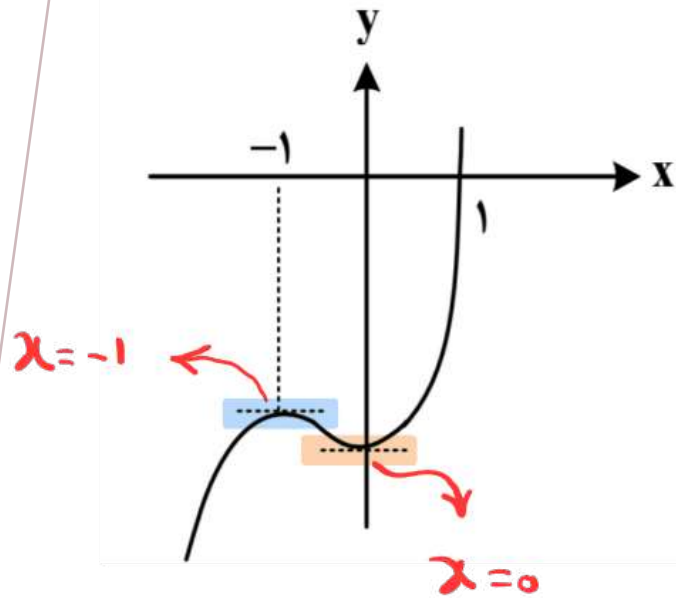
$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1 - 4}{x - 1} = \frac{-4}{0^-} = -\infty$$



محمد زنگنه

دبیر ریاضی و هندسه

۲۱- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 5$ در زیر رسم شده است. عرض نقطه ماکزیمم نسبی تابع f ، کدام است؟



$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c - 5 = 0$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c = 0$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ 3a - 2b = 0 \end{cases}$$

$$a = 2, b = 3$$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$$

$$\Rightarrow f(-1) = -2 + 3 - 5 = -4$$

$$-4 \quad (1)$$

$$-3 \quad (2)$$

$$-\frac{5}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{7}{2} \quad (4)$$



۲۲- در نقطه A از نمودار سهمی $y = 2 - x^2$ واقع در ناحیه اول، مماسی رسم می‌کنیم که مماس رسم شده همراه با محورهای مختصات، مثلثی با مساحت مینیمم می‌سازد. عرض نقطه A کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{4} \quad (۱)$$

$$S = \frac{1}{2} \times (\alpha^2 + 2) \left(\frac{\alpha^2 + 2}{2\alpha} \right) = \frac{(\alpha^2 + 2)^2}{4\alpha}$$

$$S' = \frac{2 \times 2\alpha(\alpha^2 + 2) \times 4\alpha - 4(\alpha^2 + 2)^2}{(4\alpha)^2} = 0$$

$$\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow 2 - \alpha^2 = 2 - \frac{2}{3}$$

الف) فرم نقطه A: $(\alpha, 2 - \alpha^2)$

ب) فرم خط مماس: $\alpha > 0$

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

$$y - (2 - \alpha^2) = (-2\alpha)(x - \alpha)$$

$$y = -2\alpha x + \alpha^2 + 2$$

$$B(0, \alpha^2 + 2), C\left(\frac{\alpha^2 + 2}{2\alpha}, 0\right)$$



محمد زنگنه

دبیر ریاضی و هندسه