

۱- مقدار عبارت گویای $A = \frac{x^3 - 3\sqrt[3]{2}x^2 + 3\sqrt[3]{4}x - 1}{x^3 - 3\sqrt[3]{3}x^2 + 3\sqrt[3]{9}x - 3 + 3}$ به ازای $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ کدام است؟

۰٫۸ (۴) ✓

۰٫۶ (۳)

۰٫۴ (۲)

۰٫۲ (۱)

$$A = \frac{\overbrace{x^3 - 3\sqrt[3]{2}x^2 + 3\sqrt[3]{4}x - 1}^{(x - \sqrt[3]{2})^3}}{\underbrace{x^3 - 3\sqrt[3]{3}x^2 + 3\sqrt[3]{9}x - 3 + 3}_{(x - \sqrt[3]{3})^3}} = \frac{(x - \sqrt[3]{2})^3 + 1}{(x - \sqrt[3]{3})^3 + 3} = \frac{\sqrt[3]{2+1}}{\sqrt[3]{3+3}} = 0.8$$

۲- اگر $3a+2$ ، 11 و $a-4$ ، به ترتیب جملات چهارم، هفتم و نهم یک الگوی خطی باشند، چند جمله از این الگو مثبت است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲) ✓

۸ (۱)

$$a_v - a_f = 2d \Rightarrow 11 - (3a+2) = 2d \Rightarrow 9 - 3a = 2d \Rightarrow \div 3 \Rightarrow 3 - a = d \Rightarrow d = -2$$

$$a_9 - a_v = 2d \Rightarrow a - 3 - 11 = 2d \Rightarrow a - 14 = 2d \Rightarrow a - 14 = 2(-2) \Rightarrow 3a = 10 \Rightarrow a = \frac{10}{3}$$

$$a_v = 11 \Rightarrow a_1 + 4d = 11 \Rightarrow a_1 = 15 \Rightarrow a_n = -2n + 15 \Rightarrow a_n > 0$$

$$\Rightarrow 15 > 2n \Rightarrow n < \frac{15}{2} \Rightarrow \text{جمله ۷}$$

۳- به ازای چند مقدار از a ، معادله درجه دوم $(x-2)^2 + 2a(x+1)^2 = a$ دارای یک ریشه مضاعف است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲) ✓

۱ (۱)

$$x^2 - 4x + 4 + 2ax^2 + 4ax + 2a - a = 0 \Rightarrow (2a+1)x^2 + (4a-4)x + 4+a = 0$$

$$\neq 0 \Rightarrow a \neq -\frac{1}{2}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow \frac{(4a-4)^2}{12(a-1)^2} - 4 \frac{(2a+1)(4a-4)}{2a^2+4a+4} = 0 \Rightarrow \div 4 \Rightarrow \frac{4(a-1)^2}{2a^2+4a+4} - 2a^2 - 9a - 4 = 0 \Rightarrow 2a^2 - 17a = 0$$

$$\Rightarrow a(2a-17) = 0 \Rightarrow a = 0, a = 8.5$$

۴- به چند طریق می توان از بین ۳ ریاضی دان، ۳ فیزیک دان و ۳ شیمی دان، یک کمیته علمی دو نفره انتخاب کرد

به طوری که دو نفر انتخابی هم رشته نباشند؟

۶۶ (۴)

۵۴ (۳)

۳۳ (۲)

۲۷ (۱) ✓

$$(3) \times (3) + (3) \times (3) + (3) \times (3) = 27$$

شیمی فیزیک شیمی ریاضی فیزیک ریاضی

۶- اگر α و β دو عدد حقیقی و متمایز باشند به طوری که $\alpha^2 = \alpha + 1$ و $\beta^2 = \beta + 3$ باشد، مقدار $\alpha^5 + \beta^5$ کدام است؟

۷۹ (۴)

۷۳ (۳)

۶۷ (۲)

۶۱ (۱) ✓

$$\alpha^2 = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha^3 = \alpha^2 + \alpha = 2\alpha + 1 \Rightarrow \alpha^4 = \alpha^3 + \alpha^2 = 3\alpha + 2 \Rightarrow \alpha^5 = \alpha^4 + \alpha^3 = 5\alpha + 3$$

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 1$$

$$\alpha^5 + \beta^5 = 5(\alpha + \beta) + 3 = 8$$

۷- نمودار تابع $y = mx^2 - 3x + 4$ محور x ها را در دو طرف $x = 2$ قطع می کند. اگر حدود تغییرات m بازه (a, b) باشد، مقدار $a + 2b$ کدام است؟

صفر (۴)

۱ (۳) ✓

$\frac{1}{2}$ (۲)

۲ (۱)

$$m \times f(2) < 0 \Rightarrow m \times (4m - 2) < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < m < \infty$$

۸- برای $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ اگر $f^{-1}(6 - 2x) \leq f^{-1}(2 - x)$ باشد، حدود x شامل چند عدد صحیح مثبت است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱) ✓

$$f^{-1}(6 - 2x) \leq f^{-1}(2 - x) \Rightarrow 6 - 2x \geq 2 - x \Rightarrow x \leq 4$$

$$\begin{cases} 2 - x > 0 \Rightarrow x < 2 \\ 6 - 2x > 0 \Rightarrow x < 3 \end{cases} \Rightarrow x < 2$$

$$x < 2 \Rightarrow x = 1$$

۹- اگر $75^x = 27^y$ باشد، حاصل $125^{\frac{x}{3y-x}}$ کدام است؟ ($x \neq 0$)

$3\sqrt{3}$ (۴) ✓

$5\sqrt{5}$ (۳)

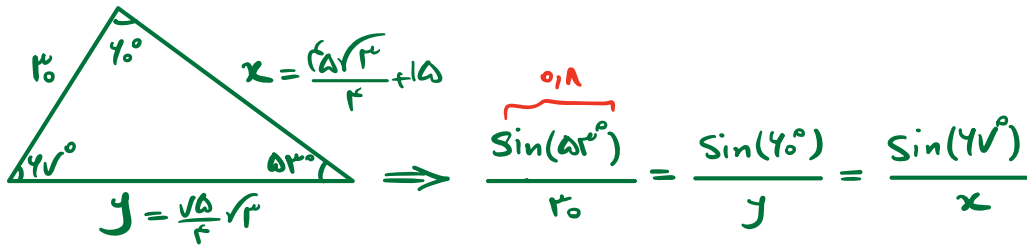
$\sqrt{3}$ (۲)

$\sqrt{5}$ (۱)

$$75^x = (3 \times 5^2)^x = 3^x \times 5^{2x} \Rightarrow 3^x \times 5^{2x} = 3^y \times 5^{2y} \Rightarrow \frac{x}{y-x} = \frac{y}{y-x} \Rightarrow \frac{x}{y-x} = 1 \Rightarrow x = y-x \Rightarrow x = \frac{y}{2}$$

۱۰- اگر طول یک ضلع مثلثی ۳۰ و اندازه دو زاویه مجاور آن ضلع ۶۰ و ۷۰ باشد، محیط مثلث کدام است؟ ($\cos 53^\circ = 0.6$)

(۱) $30 + 30\sqrt{3}$ (۲) $30 + 40\sqrt{3}$ (۳) $45 + 30\sqrt{3}$ (۴) $45 + 40\sqrt{3}$ (✓)



$$\sin(110^\circ) = \sin(180^\circ - 53^\circ) = \sin 180^\circ \times \cos 53^\circ - \cos 180^\circ \times \sin 53^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} = \frac{3\sqrt{3}}{10} + \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow y = \frac{30 \times \sin(40^\circ)}{\sin(53^\circ)} = \frac{30 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{0.8} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \text{محیط} = x + y + 30 = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 45$$

$$x = \frac{30 \times \sin(110^\circ)}{\sin(53^\circ)} = \frac{30 \times (\frac{3\sqrt{3}}{10} + \frac{3}{10})}{0.8} = \frac{3(3\sqrt{3} + 3)}{8} = \frac{15}{4}(3\sqrt{3} + 3) = \frac{45\sqrt{3}}{4} + 15$$

۱۱- اگر $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار داشته باشد،

انتهای زاویه‌های $\alpha + \beta$ و 2β به ترتیب در کدام ربع‌ها قرار دارند؟

(۱) دوم و سوم (۲) سوم و سوم (۳) دوم و چهارم (۴) سوم و چهارم (✓)

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \beta = -\frac{12}{13} \Rightarrow \sin \beta = \frac{5}{13}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \times -\frac{12}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{-12}{65} < 0$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \times -\frac{12}{13} - \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{-24}{65} < 0$$

$\alpha + \beta \Rightarrow$ در ناحیه سوم

$$\sin(2\beta) = 2 \sin \beta \cos \beta = 2 \times \frac{5}{13} \times -\frac{12}{13} = \frac{-120}{169} < 0, \quad \cos(2\beta) = 2 \cos^2 \beta - 1 = 2 \left(-\frac{12}{13}\right)^2 - 1 = \frac{119}{169} > 0 \Rightarrow \text{ناحیه دوم}$$

۱۲- معادله مثلثاتی $\frac{\sqrt{3} + \tan x}{1 + \sqrt{3} \cot x} = \tan 4x$ چند جواب در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ دارد؟

(۱) ۴ (✓) (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۱۳

$$\frac{\sqrt{3} + \tan x}{1 + \frac{\sqrt{3}}{\tan x}} = \tan x \Rightarrow \frac{\sqrt{3} + \tan x}{\frac{\tan x + \sqrt{3}}{\tan x}} = \tan x \Rightarrow \tan x = \tan 4x \Rightarrow 4x = k\pi + x \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$$

$$x = -2\pi, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$$

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{\tan x} = 0 \Rightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\tan x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

این ریشه‌ها باید حذف شوند.

۱۳- اگر $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ و $g(x) = [1-x]$ باشد، به ازای چند مقدار صحیح a ، $\lim_{x \rightarrow a^+} f(g(x)) = 1+a$ است؟

$\begin{matrix} a \text{ صحیح} \\ \uparrow \\ [1-a^+] = -a \end{matrix}$
 $\begin{matrix} x \rightarrow a^+ \\ 4 \text{ (4)} \quad 3 \text{ (3)} \quad 2 \text{ (2)} \checkmark \quad 1 \text{ (1)} \end{matrix}$

$$\underbrace{f(g(a^+))}_{1-\sqrt{-a}} \Rightarrow 1-\sqrt{-a} = 1+a \Rightarrow a = -\sqrt{-a} \Rightarrow a = 0, a = -1$$

۱۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cos^2 \pi x - 1}{x + 2\sqrt{-x} - 1}$ کدام است؟

$\begin{matrix} 8\pi^2 \text{ (4)} \checkmark & 4\pi^2 \text{ (3)} & 2\pi^2 \text{ (2)} & \text{صفر (1)} \end{matrix}$

$$\frac{0}{0} \Rightarrow \text{KOP} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2\pi \sin 2\pi x}{1 + \frac{-1}{\sqrt{-x}}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{KOP} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-4\pi^2 \cos 2\pi x}{\frac{-1}{2\sqrt{-x}}} = \frac{-4\pi^2}{\frac{-1}{2}} = 8\pi^2$$

۱۵- برای تابع $f(x) = \frac{1-2x}{6x^2+x+a}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ موجود و مخالف صفر باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{3x+2}{|x-a|} \times f(x)$ کدام است؟

$\begin{matrix} \frac{3}{4} \text{ (2)} & -\frac{3}{4} \text{ (3)} \checkmark & \text{وجود ندارد (4)} & \text{صفر (1)} \end{matrix}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \frac{0}{0} \Rightarrow 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + a = 0 \Rightarrow 2 + a = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{3x+2}{|x+2|} \times \frac{1-2x}{4x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{\frac{V}{r}}{\frac{V}{r}} \times \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{\frac{0}{0} \Rightarrow \text{KOP}}{\frac{V}{r}} = \frac{V}{r} \times \frac{-r}{V} = \frac{-r}{r}$$

۱۶- اگر $f(x) = a(1-x)(x+1) - bx^2$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه صفر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{xf(x)}{x+b}$ کدام است؟

$\begin{matrix} -\infty \text{ (1)} \checkmark & +\infty \text{ (2)} & \text{صفر (3)} & \text{وجود ندارد (4)} \end{matrix}$

$$f(x) = a(1-x^2) - bx^2 = (-a-b)x^2 + a \Rightarrow \text{تابع درجه صفر} \Rightarrow \text{تابع ثابت} \Rightarrow f(x) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{\overbrace{xf(x)}^a}{\underbrace{x+b}_{a^- - a}} = \frac{a^r}{\frac{a^- - a}{0^-}} = -\infty$$

۱۷- اگر حد چپ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + b|x|}$ در $x = a$ برابر $-\infty$ باشد، تابع f چند مجانب قائم دارد؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۲ ✓

(۱) ۳

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + b|x|} \Rightarrow \div |x| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \frac{\overbrace{|x|+1}^{\text{مثبت}}}{\underbrace{|x|+b}} = -\infty$$

$$\Rightarrow |x| = -b \Rightarrow x = \pm b \quad \text{ریشه منفی داشته}$$

۱۸- نمودار تابع $y = g(x)$ در زیر رسم شده است. برای تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq a \\ g(a) & x = a \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$

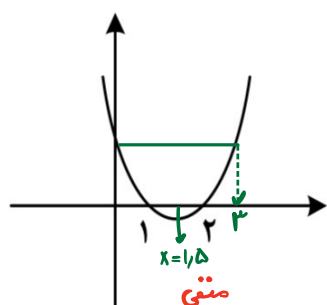
است. اگر بازه (b, c) حدود تغییرات a باشد، $b + c$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳ ✓

(۴) ۴



$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty \Rightarrow f(a^+) < f(a) \Rightarrow (0, 2) = a \Rightarrow b + c = 3$$

۱۹- اگر زاویه خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ در نقطه $(-1, -1)$ با جهت مثبت محور x ها باشد، حاصل عبارت

$A = 3\sin\alpha + 4\cos\alpha$ کدام است؟

(۴) $-\frac{3}{10}\sqrt{10}$

(۳) $-\frac{9}{10}\sqrt{10}$ ✓

(۲) $\frac{3}{10}\sqrt{10}$

(۱) $\frac{9}{10}\sqrt{10}$

$$y = x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y' = -\frac{1}{3} \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

چون سینوس در ناحیه دوم مثبت و کسینوس منفی می شود.

$$A = 3\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + 4\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{-9}{\sqrt{10}} = -\frac{9}{10}\sqrt{10}$$

۲۰- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 1 \\ x^3+1 & x < 1 \end{cases}$ داده شده است. کدام مورد در خصوص مشتقات یک طرفه f در $x=1$ ، درست است؟

(۴) $f'_+(1) = +\infty$

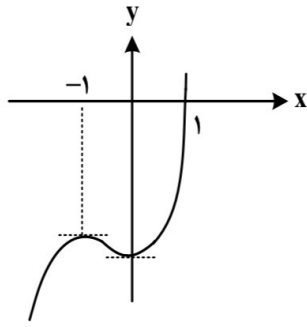
(۳) $f'_+(1) = -\infty$

(۲) $f'_-(1) = +\infty$ ✓

(۱) $f'_-(1) = 3$

$$f(1) = 4 \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1-4}{x-1} = \frac{3(x-1)}{x-1} = 3 \\ f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3+1-4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3-3}{x-1} = \frac{-2}{-} = +\infty \end{cases}$$

۲۱- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx - 5$ در زیر رسم شده است. عرض نقطه ماکزیمم نسبی تابع f ، کدام است؟



(۱) -۴ ✓

(۲) -۳

(۳) $-\frac{5}{2}$

(۴) $-\frac{7}{2}$

$$f'(x) = 2ax + 2bx + c \Rightarrow \text{ریشه‌های مشتق } 0, -1 \Rightarrow \begin{cases} S = -1 = \frac{-2b}{2a} \Rightarrow b = \frac{1}{2}a \\ p = 0 = \frac{c}{2a} \Rightarrow c = 0 \end{cases}$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c - 5 = 0 \Rightarrow a + b + \overset{\frac{1}{2}a}{c} = 5 \Rightarrow \frac{3}{2}a = 5 \Rightarrow a = \frac{10}{3}, b = \frac{5}{3}$$

$$f(x) = \frac{10}{3}x^2 + \frac{5}{3}x^2 - 5 \Rightarrow f(-1) = -\frac{10}{3} + \frac{5}{3} - 5 = -\frac{20}{3}$$

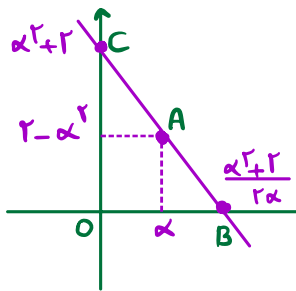
۲۲- در نقطه A از نمودار سهمی $y = 2 - x^2$ واقع در ناحیه اول، مماسی رسم می‌کنیم که مماس رسم شده همراه با محورهای مختصات، مثلثی با مساحت مینیمم می‌سازد. عرض نقطه A کدام است؟

(۴) $\frac{2}{3}$

(۳) ✓ $\frac{4}{3}$

(۲) $\frac{3}{4}$

(۱) $\frac{5}{4}$



$$\boxed{-2\alpha = \text{مشتق در } \alpha = \text{شیب خط}}$$

$$\Rightarrow y + \alpha^2 - 2 = -2\alpha(x - \alpha) \Rightarrow y = -2\alpha x + \alpha^2 + 2$$

عرض از مبدا

$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = \frac{\alpha^2 + 2}{2\alpha} \Rightarrow S = \text{مساحت مثلث } OBC = \frac{1}{2} \times \frac{\alpha^2 + 2}{2\alpha} \times \alpha^2 + 2 = \frac{(\alpha^2 + 2)^2}{4\alpha}$$

$$S' = 0 \Rightarrow \frac{2(\alpha^2 + 2)(2\alpha) - (\alpha^2 + 2)^2}{16\alpha^2} = 0 \Rightarrow 4\alpha(\alpha^2 + 2) - (\alpha^2 + 2)^2 = 0 \Rightarrow 4\alpha^2 - 2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_A = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$