

* متقاضی گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول زیر، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود را با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سوالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچه سوالات تأیید می‌نمایم.

امضا:

۱- مقدار عبارت گویای $A = \frac{x^3 - 3\sqrt[3]{2}x^2 + 3\sqrt[3]{4}x - 1}{x^3 - 3\sqrt[3]{3}x^2 + 3\sqrt[3]{9}x}$ به ازای $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ کدام است؟

- (۱) ۲/۰ (۲) ۴/۰ (۳) ۶/۰ (۴) ۸/۰

$$A = \frac{x^3 - 3\sqrt[3]{2}x^2 + 3\sqrt[3]{4}x - 1}{x^3 - 3\sqrt[3]{3}x^2 + 3\sqrt[3]{9}x} \xrightarrow{\text{اتحاد مکعب}} A = \frac{(x - \sqrt[3]{2})^3 + 2 - 1}{(x - \sqrt[3]{3})^3 + 3} = \frac{(x - \sqrt[3]{2})^3 + 1}{(x - \sqrt[3]{3})^3 + 3}$$

$$x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} \rightarrow A = \frac{(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})^3 + 1}{(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3})^3 + 3} = \frac{(\sqrt[3]{3})^3 + 1}{(\sqrt[3]{2})^3 + 3} = \frac{4}{8} = 0.5$$

گزینه ۴

۲- اگر $2a+3$ ، 11 و $a-4$ ، به ترتیب جملات چهارم، هفتم و نهم یک الگوی خطی باشند، چند جمله از این الگو مثبت است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

$$\begin{cases} t_4 = t_1 + 3d \\ t_7 = t_1 + 6d \\ t_{11} = t_1 + 10d \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری جملات}} \begin{cases} 3a + 2 = t_1 + 3d \\ 11 = t_1 + 6d \\ a - 4 = t_1 + 10d \end{cases} \xrightarrow{t_1 = 11 - 6d} \begin{cases} 3a + 2 = 11 - 3d \\ a - 4 = 11 + 2d \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله ۲ مجهول}} \begin{cases} d = -4 \\ t_1 = 35 \end{cases} \rightarrow t_n = 35 - 4n \xrightarrow{\text{جایگذاری}} t_9 > 0, \quad t_{10} < 0$$

گزینه ۲

۳- به ازای چند مقدار از a ، معادله درجه دوم $a(x-2)^2 + 2a(x+1)^2 = a$ دارای یک ریشه مضاعف است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

$$\Delta = 0 \leftrightarrow \text{ریشه مضاعف}$$

معادله را مرتب می‌کنیم:

$$(x-2)^2 + 2a(x+1)^2 = a$$

$$x^2 - 4x + 4 + 2a(x^2 + 2x + 1) - a = 0$$

$$(1 + 2a)x^2 + (4a - 4)x + 4 + a = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (4a - 4)^2 - 4(1 + 2a)(4 + a) \\ &= 16a^2 - 32a + 16 - 16 - 32a - 4a - 8a^2 \\ &= 8a^2 - 68a = 0 \rightarrow a(8a - 68) = 0 \rightarrow \\ a &= 0, a = \frac{17}{2} \leftrightarrow \text{معادله دو جواب دارد} \end{aligned}$$

گزینه ۲

۴- به چند طریق می توان از بین ۳ ریاضی دان، ۳ فیزیک دان و ۳ شیمی دان، یک کمیته علمی دو نفره انتخاب کرد به طوری که دو نفر انتخابی هم رشته نباشند؟

$${}^{66}C_2 \quad {}^{54}C_2 \quad {}^{33}C_2 \quad {}^{27}C_2$$

: $C(n, r)$ ترتیب انتخاب مهم نیست

$${}^{27}C_2 + {}^{33}C_2 + {}^{54}C_2 = 9 + 9 + 9 = 27$$

گزینه ۱

۶- اگر α و β دو عدد حقیقی و متمایز باشند به طوری که $\alpha^2 = \alpha + 3$ و $\beta^2 = \beta + 3$ باشد، مقدار $\alpha^5 + \beta^5$ کدام است؟

$${}^{61}C_1 \quad {}^{67}C_2 \quad {}^{73}C_3 \quad {}^{79}C_4$$

$$\begin{cases} \alpha^2 = \alpha + 3 \\ \beta^2 = \beta + 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{مرتب میکنیم}} \begin{cases} \alpha^2 - \alpha - 3 = 0 \\ \beta^2 - \beta - 3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\Delta} \alpha, \beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{حاصلجمع و حاصلضرب}} \alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -3$$

یا از آنجا که هر دو معادله در واقع یکی هستند میتوانیم از فرمولهای حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه های معادله درجه ۲ استفاده کنیم:

$$(\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 1, \alpha\beta = ac = -3)$$

$$\begin{aligned} \alpha^5 + \beta^5 &= (\alpha + \beta)(\alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4) = \alpha^4 + 3\alpha^2 + (-3)^2 + 3\beta^2 + \beta^4 \\ &= \alpha^4 + \beta^4 + 3(\alpha^2 + \beta^2) + 9 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 + 3(\alpha^2 + \beta^2) + 9 \end{aligned}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{13} + 13) + \frac{1}{4}(1 - 2\sqrt{13} + 13) = \frac{1}{4}(14 + 14) = 7$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \alpha^5 + \beta^5 = 49 - 18 + 21 + 9 = 61$$

گزینه ۱

۷- نمودار تابع $y = mx^2 - 3x + 4$ محور x ها را در دو طرف $x=2$ قطع می کند. اگر حدود تغییرات m بازه (a, b) باشد، مقدار $a+2b$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) صفر

$\Delta > 0 \leftrightarrow$ دو ریشه

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 16m > 0 \rightarrow 9 > 16m \rightarrow m < \frac{9}{16} \quad (I)$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16m}}{2m}$$

$$x_1 > 2 \rightarrow \frac{3 + \sqrt{9 - 16m}}{2m} > 2 \rightarrow 3 + \sqrt{9 - 16m} > 4m$$

$$\rightarrow \sqrt{9 - 16m} > 4m - 3 \rightarrow 9 - 16m > 16m^2 - 24m + 9$$

$$\rightarrow 16m^2 - 8m < 0 \rightarrow 8(2m - 1) < 0$$

m	.	$\frac{1}{2}$
$16m^2 - 8m$	+	-
	+	+

(II)

$$x_2 < 2 \rightarrow \frac{3 - \sqrt{9 - 16m}}{2m} < 2 \rightarrow 3 - \sqrt{9 - 16m} < 4m \rightarrow 3 - 4m < \sqrt{9 - 16m} \rightarrow \text{بازه مشابه}$$

$$(I), (II) \rightarrow 0 < m < \frac{1}{2} \rightarrow a = 0, b = \frac{1}{2} \rightarrow a + 2b = 1$$

گزینه ۳

۸- برای $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ اگر $f^{-1}(6-2x) \leq f^{-1}(2-x)$ باشد، حدود x شامل چند عدد صحیح مثبت است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \rightarrow f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{3}} x \quad x > 0 \quad (I)$$

$$f^{-1}(6-2x) \leq f^{-1}(2-x)$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(6-2x) \leq \log_{\frac{1}{3}}(2-x)$$

$$\text{از طرفی، } \begin{cases} 2-x > 0 \rightarrow x < 2 \\ 6-2x > 0 \rightarrow x < 3 \end{cases} \quad (II)$$

$$(I), (II) \rightarrow 0 < x < 2 \rightarrow x = 1$$

گزینه ۱

۹- اگر $75^x = 27^y$ باشد، حاصل $125^{\frac{x}{3y-x}}$ کدام است؟ ($x \neq 0$)

(۱) $\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $5\sqrt{5}$ (۴) $3\sqrt{3}$

$$75^x = 27^y \rightarrow (25 \times 3)^x = 3^3y \rightarrow 25^x \times 3^x = 3^3y \rightarrow 25^x = \frac{3^3y}{3^x} = 3^{3y-x} \rightarrow 25^x = 3^{3y-x}$$

طرفین را به توان $\frac{x}{3y-x}$ می‌رسانیم $\rightarrow 25 = 3^{\frac{3y-x}{x}} \rightarrow 25^{\frac{x}{3y-x}} = 3$ (I)

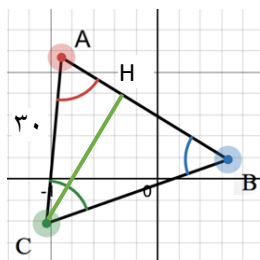
اگر از طرفین رادیکال بگیریم $\rightarrow 5^{\frac{x}{3y-x}} = \sqrt{3}$ (II)

$$(I), (II) \rightarrow 25^{\frac{x}{3y-x}} \times 5^{\frac{x}{3y-x}} = 125^{\frac{x}{3y-x}} = 3\sqrt{3}$$

گزینه ۴

۱۰- اگر طول یک ضلع مثلثی ۳۰ و اندازه دو زاویه مجاور آن ضلع ۶۰° و ۶۷° باشد، محیط مثلث کدام است؟ ($\cos 53^\circ = 0.6$)

(۱) $30 + 30\sqrt{3}$ (۲) $30 + 40\sqrt{3}$ (۳) $45 + 30\sqrt{3}$ (۴) $45 + 40\sqrt{3}$



$$A = 60^\circ, B = 53^\circ, C = 67^\circ$$

$$\cos A = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{AH}{AC} \rightarrow AH = \frac{30}{2} = 15$$

$$CH = AC \sin 60^\circ = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = 0.6 \rightarrow \sin 53^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 53^\circ} = 0.8$$

$$\rightarrow \sin 53^\circ = \frac{CH}{BC} \rightarrow BC = 15\sqrt{3} \times 0.8 = \frac{15 \cdot \sqrt{3}}{1}$$

$$BH = BC \cos 53^\circ = \frac{15 \cdot \sqrt{3}}{1} \times 0.6 = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{1}$$

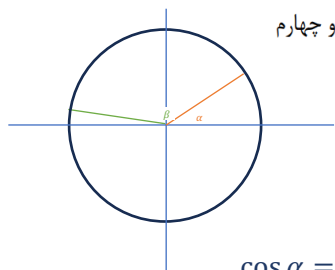
$$\text{محیط مثلث} = AC + BC + BH + AH = 30 + \frac{15 \cdot \sqrt{3}}{1} + \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{1} + 15 = 45 + \frac{24 \cdot \sqrt{3}}{1} = 45 + 24\sqrt{3}$$

گزینه ۳

۱۱- اگر $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار داشته باشد،

انتهای زاویه‌های $\alpha + \beta$ و 2β به ترتیب در کدام ربع‌ها قرار دارند؟

(۱) دوم و سوم (۲) سوم و سوم (۳) دوم و چهارم (۴) سوم و چهارم



با ترسیم حدودی α, β از روی مقادیر کسینوس پاسخ صحیح مشخص میشود:

ولی برای یافتن پاسخ دقیق باید علامت سینوس و کسینوس زوایا مشخص شود:

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{3}{5},$$

$$\cos \beta = -\frac{12}{13} \rightarrow \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{5}{13}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \times -\frac{12}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{-36 + 20}{5 \times 13} = -\frac{16}{65} < 0$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} - \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{-48 - 15}{5 \times 13} = -\frac{63}{65} < 0$$

$\rightarrow \tan(\alpha + \beta) > 0 \rightarrow \alpha + \beta$ در ربع سوم قرار دارد

$$\sin(2\beta) = 2 \sin \beta \cos \beta = 2\left(\frac{5}{13}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) < 0$$

$$\cos(2\beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \frac{144}{169} - \frac{25}{169} = \frac{119}{169} > 0$$

$\rightarrow \tan(2\beta) < 0 \rightarrow 2\beta$ در ربع چهارم قرار دارد

گزینه ۴

۱۲- معادله مثلثاتی $\frac{\sqrt{3} + \tan x}{1 + \sqrt{3} \cot x} = \tan 4x$ چند جواب در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ دارد؟

۱۳ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۴ (۱)

$$\frac{\sqrt{3} + \tan x}{1 + \sqrt{3} \cot x} = \frac{\sqrt{3} + \tan x}{1 + \frac{\sqrt{3}}{\tan x}} = \frac{\sqrt{3} + \tan x}{\frac{\tan x + \sqrt{3}}{\tan x}} = \tan x \xrightarrow{\text{صورت سوال}} \tan x = \tan 4x \rightarrow \begin{cases} 4x = x + k\pi \\ 3x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{3} \end{cases}$$

بازه داده شده $\leftarrow k = -6, -5, \dots, 5, 6$ (۱۳ جواب)

از طرفی دامنه تابع:

$$1 + \sqrt{3} \cot x \neq 0 \rightarrow \cot x \neq -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x \neq \begin{cases} 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \rightarrow k \neq -4, -1, 2, 5$$

پس جوابهای قابل قبول $9 = 13 - 4$ عدد هستند که داخل گزینه ها نیست.

گزینه درست وجود ندارد.

۱۳- اگر $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ و $g(x) = [1 - x]$ باشد، به ازای چند مقدار صحیح a ، $\lim_{x \rightarrow a^+} f \circ g(x) = 1 + a$ است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f \circ g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow a^+} (1 - \sqrt{[1 - x]}) = 1 + a \xrightarrow{\sqrt{[1-x]} > 0} a \leq 0 \quad (I)$$

$$\rightarrow [1 - a^+] = a^+ \rightarrow a^+ \leq 1 - a^+ < a^+ + 1$$

$$\xrightarrow{(I)} a = -1, 0$$

گزینه ۲

۱۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cos 2\pi x - 1}{x + 2\sqrt{-x} - 1}$ کدام است؟

$8\pi^2$ (۴)

$4\pi^2$ (۳)

$2\pi^2$ (۲)

صفر (۱)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cos \sqrt[3]{\pi x - 1}}{x + \sqrt[3]{-x - 1}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هویتال}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-\sqrt[3]{\pi} \sin \sqrt[3]{\pi x}}{1 - (-x)^{-2/3}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هویتال}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-\sqrt[3]{\pi} \cos \sqrt[3]{\pi x}}{-\frac{1}{\sqrt[3]{x}} (-x)^{-2/3}} = \frac{-\sqrt[3]{\pi} \times 1}{-\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \times 1} = \sqrt[3]{\pi}$$

گزینه ۴

۱۵- برای تابع $f(x) = \frac{1-2x}{6x^2+x+a}$ اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{6}} f(x)$ موجود و مخالف صفر باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{3x+2}{|x-a|} \times f(x)$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) وجود ندارد

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{1-2x}{6x^2+x+a} = l \neq \frac{0}{0}, \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} (1-2x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} f(x) = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} 6x^2+x+a = 0 \rightarrow 6\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + a = 0 \rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{3x+2}{|x-a|} \times f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{3x+2}{x+\frac{2}{3}} \times \frac{1-2x}{6x^2+x-\frac{2}{3}} = \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{3x+2}{x+\frac{2}{3}} \times \frac{1-2x}{\frac{1}{3}(3x+2)(x-\frac{1}{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{1-2x}{(x+\frac{2}{3})(x-\frac{1}{3})} = \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{-1}{x+\frac{2}{3}} = \frac{-1}{-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

گزینه ۳

۱۶- اگر $f(x) = a(1-x)(x+1) - bx^2$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه صفر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{xf(x)}{x+b}$ کدام است؟

(۱) $-\infty$ (۲) $+\infty$ (۳) صفر (۴) وجود ندارد

$$f(x) = a(1-x)(x+1) - bx^2 = a(1-x^2) - bx^2 = a - ax^2 - bx^2 = a - (a+b)x^2$$

$\rightarrow a+b = 0 \rightarrow b = -a, f(x) = a$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{xf(x)}{x+b} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{a^2}{a^- - a} = \frac{a^2}{0^-} = -\infty$$

گزینه ۱

۱۷- اگر حد چپ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+b|x|}$ در $x=a$ برابر $-\infty$ باشد، تابع f چند مجانب قائم دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x^2+|x|}{x^2+b|x|} = -\infty$$

$$x^+ + |x| > \cdot \rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} x^+ + b|x| < \cdot \rightarrow b < \cdot$$

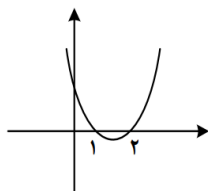
$$f(x) = \frac{x^+ + |x|}{x^+ + b|x|} = \begin{cases} \frac{x^+ + x}{x^+ + bx} = \frac{x + 1}{x + b} & x > \cdot \quad b < \cdot \\ \frac{x^+ - x}{x^+ - bx} = \frac{x - 1}{x - b} & x < \cdot \end{cases} \rightarrow x = -b, x = b \text{ مجانبهای قائم}$$

گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty, f(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq a \\ g(a) & x = a \end{cases}$$

۱۸- نمودار تابع $y = g(x)$ در زیر رسم شده است. برای تابع f با ضابطه

است. اگر بازه (b, c) حدود تغییرات a باشد، $b + c$ کدام است؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

$$y = g(x) = (x - 1)(x - 2) \\ = x^2 - 3x + 2 \rightarrow g(\cdot) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x^2 - 3x + 2 - 2}{x - a} \\ = \frac{a^2 - 3a}{a^+ - a} = \frac{a^2 - 3a}{\cdot} = -\infty \\ \rightarrow a^2 - 3a < \cdot \rightarrow a(a - 3) < \cdot$$

a	$\cdot$	3
$a^2 - 3a$	$+$	$-$

$\rightarrow (b, c) = (\cdot, 3) \rightarrow b + c = 3$

گزینه ۳

۱۹- اگر α زاویه خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ در نقطه $(-1, -1)$ با جهت مثبت محور x ها باشد، حاصل عبارت

$$A = 3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha \text{ کدام است؟}$$

$-0.3\sqrt{10}$ (۴)

$-0.9\sqrt{10}$ (۳)

$0.3\sqrt{10}$ (۲)

$0.9\sqrt{10}$ (۱)

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}} \rightarrow y' = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}}$$

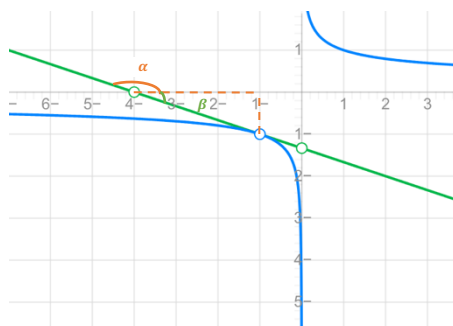
شیب معادله خط مماس در نقطه $(-1, -1)$:

$$m = y'(-1) = -\frac{1}{3}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\rightarrow y + 1 = -\frac{1}{3}(x + 1)$$

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \rightarrow y = \cdot, x = -4$$



$$X = -1 - (-4) = 3$$

$$Y = 0 - (-1) = 1$$

$$\text{وتر} = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \rightarrow \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\beta = \pi - \alpha: \begin{cases} \sin \alpha = \sin(\pi - \alpha) = \sin \beta \\ \cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha) = -\cos \beta \end{cases}$$

$$A = 3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha = 3 \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \right) + 4 \left(-\frac{3}{\sqrt{10}} \right) = -\frac{9}{\sqrt{10}} = -0.9\sqrt{10}$$

گزینه ۳

۲۰- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 1 \\ x^2+1 & x < 1 \end{cases}$ داده شده است. کدام مورد در خصوص مشتقات یک طرفه f در $x=1$ ، درست است؟

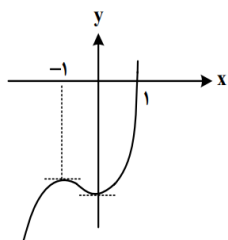
$f'_+(1) = +\infty$ (۴) $f'_+(1) = -\infty$ (۳) $f'_-(1) = +\infty$ (۲) $f'_-(1) = 3$ (۱)

$$f'_+(1) = 3$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3}{x - 1} = \frac{-2}{-1} = +\infty$$

گزینه ۲

۲۱- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 5$ در زیر رسم شده است. عرض نقطه ماکزیمم نسبی تابع f ، کدام است؟



- (۱) -۴
- (۲) -۳
- (۳) $-\frac{5}{2}$
- (۴) $-\frac{7}{2}$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 5 \rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\text{نمودار: } \begin{cases} f'(\cdot) = 0 \rightarrow c = 0 \rightarrow f(x) = ax^3 + bx^2 - 5 \\ f'(-1) = 0 \rightarrow 3a - 2b = 0 \\ f(1) = 0 \rightarrow a + b = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ a + b = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$f(-1) = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 5 = -2 + 3 - 5 = -4$$

گزینه ۱

۲۲- در نقطه A از نمودار سهمی $y = 2 - x^2$ واقع در ناحیه اول، مماسی رسم می‌کنیم که مماس رسم‌شده همراه با محورهای مختصات، مثلثی با مساحت مینیمم می‌سازد. عرض نقطه A کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

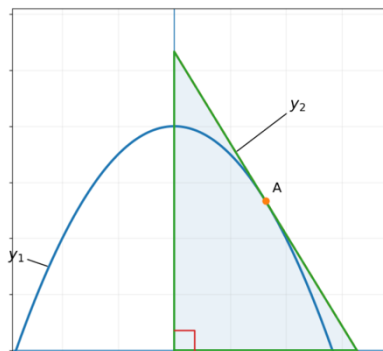
$$\text{مساحت مثلث} = S = \frac{1}{2}XY, S' = \frac{dS}{dx_A} = 0 \rightarrow \min$$

$$y_1 = 2 - x^2 \rightarrow y'_1 = -2x$$

$$y_2 = ax + b \xrightarrow{a=y'_1|_{x=x_A}} y_2 = -2x_A x + b$$

$$\xrightarrow{y_1|_{x=x_A} = y_2|_{x=x_A}} 2 - x_A^2 = -2x_A(x_A) + b$$

$$\rightarrow b = 2 + x_A^2 \rightarrow y_2 = -2x_A x + 2 + x_A^2$$



$$y_2 = -2x_A x + 2 + x_A^2 \xrightarrow{\substack{x=0 \rightarrow Y \\ y=0 \rightarrow X}} \begin{cases} Y = 2 + x_A^2 \\ X = \frac{2 + x_A^2}{2x_A} \end{cases} \rightarrow S = \frac{1}{2}XY = \frac{1}{2} \left(\frac{2 + x_A^2}{2x_A} \right) (2 + x_A^2)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(2 + x_A^2)^2}{x_A} \rightarrow S' = \frac{1}{4} \frac{2(x_A^2 + 2)(2x_A) - (2 + x_A^2)^2}{x_A^2} = 0$$

$$\rightarrow 4x_A^2 - x_A^2 - 2 = 0 \rightarrow x_A^2 = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{ناحیه اول}} x_A = \sqrt{\frac{2}{3}} \rightarrow y_A = 2 - \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 = \frac{4}{3}$$

گزینه ۳

صبا ثابتی، مدرس دروس ریاضی و حسابان، فیزیک، هندسه، گسسته

۰۹۱۲۴۲۴۳۱۹۶