

سؤال ۱ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - جبر)

مقدار عبارت گویای $A = \frac{x^3 - 3\sqrt[3]{2}x^2 + 3\sqrt[3]{4}x - 1}{x^3 - 3\sqrt[3]{3}x^2 + 3\sqrt[3]{9}x}$ به ازای $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ کدام است؟

۰.۸ (۴)

۰.۶ (۳)

۰.۴ (۲)

۰.۲ (۱)

پاسخ تشریحی و راه حل جبری

برای ساده سازی این کسر، از اتحاد مکعب دو جمله ای به صورت $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ استفاده می کنیم:

۱. ساده سازی صورت کسر:

$$x^3 - 3\sqrt[3]{2}x^2 + 3(\sqrt[3]{2})^2x - 1 = (x - \sqrt[3]{2})^3 + (\sqrt[3]{2})^3 - 1 = (x - \sqrt[3]{2})^3 + 2 - 1 = (x - \sqrt[3]{2})^3 + 1$$

۲. ساده سازی مخرج کسر:

$$x^3 - 3\sqrt[3]{3}x^2 + 3(\sqrt[3]{3})^2x = (x - \sqrt[3]{3})^3 + (\sqrt[3]{3})^3 = (x - \sqrt[3]{3})^3 + 3$$

با جایگذاری مقدار فرضی مسئله $(x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})$:

$$x - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3} \Rightarrow \text{صورت کسر} = (\sqrt[3]{3})^3 + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$x - \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2} \Rightarrow \text{مخرج کسر} = (\sqrt[3]{2})^3 + 3 = 2 + 3 = 5$$

بنابراین حاصل نهایی عبارت گویای A برابر است با:

$$A = \frac{4}{5} = 0.8$$

نتیجه گیری و پاسخ نهایی

گزینه «۴» صحیح است.

سؤال ۲ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - الگو و دنباله)

اگر $3a + 2$ ، ۱۱ و $a - 4$ به ترتیب جملات چهارم، هفتم و نهم یک الگوی خطی باشند، چند جمله از این الگو مثبت است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

پاسخ تشریحی و راه حل جبری

در دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d ، رابطه بین جملات به صورت $t_n - t_m = (n - m)d$ است:

$$t_7 - t_4 = 3d \implies 11 - (3a + 2) = 3d \implies 9 - 3a = 3d \implies d = 3 - a$$

$$t_9 - t_7 = 2d \implies (a - 4) - 11 = 2d \implies a - 15 = 2d$$

با برابر قرار دادن دو رابطه بر حسب d :

$$2(3 - a) = a - 15 \implies 6 - 2a = a - 15 \implies 3a = 21 \implies a = 7$$

با معلوم شدن مقدار a ، قدرنسبت دنباله به دست می‌آید:

$$d = 3 - 7 = -4$$

اکنون جمله عمومی دنباله (t_n) را بر پایه جمله هفتم می‌نویسیم:

$$t_n = t_7 + (n - 7)d = 11 + (n - 7)(-4) = 39 - 4n$$

برای تعیین تعداد جملات مثبت، نامساوی $t_n > 0$ را حل می‌کنیم:

$$39 - 4n > 0 \implies 4n < 39 \implies n < 9.75 \implies n \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

دقیقاً ۹ جمله از این دنباله مثبت هستند. گزینه «۲» صحیح است.

سؤال ۳ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - معادله درجه دوم)

به ازای چند مقدار از a ، معادله درجه دوم $(x-2)^2 + 2a(x+1)^2 = a$ دارای یک ریشه مضاعف است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ تشریحی و راه حل جبری

معادله را به صورت استاندارد $Ax^2 + Bx + C = 0$ بسط داده و مرتب می کنیم:

$$(x^2 - 4x + 4) + 2a(x^2 + 2x + 1) - a = 0$$

$$(1 + 2a)x^2 + (4a - 4)x + (a + 4) = 0$$

شرط وجود ریشه مضاعف در معادله درجه دوم، برقراری $\Delta = 0$ به شرط ناصفر بودن ضریب x^2 ($1 + 2a \neq 0$) است:

$$\Delta' = \left(\frac{B}{2}\right)^2 - AC = (2a - 2)^2 - (1 + 2a)(a + 4) = 0$$

$$(4a^2 - 8a + 4) - (2a^2 + 9a + 4) = 0$$

$$2a^2 - 17a = 0 \implies a(2a - 17) = 0 \implies a = 0 \quad \text{یا} \quad a = \frac{17}{2}$$

هر دو مقدار به دست آمده در شرط $1 + 2a \neq 0$ صدق می کنند و معادله را درجه دوم نگه می دارند.

نتیجه گیری و پاسخ نهایی

دقیقاً ۲ مقدار برای a یافت می شود. گزینه «۲» صحیح است.

سؤال ۴ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - ترکیبیات)

به چند طریق می‌توان از بین ۳ ریاضی‌دان، ۳ فیزیک‌دان و ۳ شیمی‌دان، یک کمیته علمی دو نفره انتخاب کرد به طوری که دو نفر انتخابی هم‌رشته نباشند؟

66 (۴)

54 (۳)

33 (۲)

27 (۱)

پاسخ تشریحی و راه حل

تعداد کل دانشمندان برابر است با $3 + 3 + 3 = 9$ نفر.
روش اول (شمارش مستقیم): باید دو نفر از دو رشته متمایز انتخاب شوند:

$$\bullet \text{ انتخاب ۱ ریاضی‌دان و ۱ فیزیک‌دان: } \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} = 3 \times 3 = 9$$

$$\bullet \text{ انتخاب ۱ ریاضی‌دان و ۱ شیمی‌دان: } \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} = 3 \times 3 = 9$$

$$\bullet \text{ انتخاب ۱ فیزیک‌دان و ۱ شیمی‌دان: } \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} = 3 \times 3 = 9$$

$$\text{تعداد کل حالات} = 9 + 9 + 9 = 27$$

روش دوم (شمارش از طریق متمم):

$$\text{حالات مطلوب} = \binom{9}{2} - \left[\binom{3}{2}_{\text{ریاضی}} + \binom{3}{2}_{\text{فیزیک}} + \binom{3}{2}_{\text{شیمی}} \right] = 36 - (3 + 3 + 3) = 27$$

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

گزینه «۱» صحیح است.

سؤال ۵ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - منطق ریاضی)

نقیض گزاره سوری $(\forall x \in \mathbb{R}; (x \leq 0) \vee (x + \frac{1}{x} \geq 2))$ کدام است؟

$$\exists x \in \mathbb{R}; (x \geq 0) \wedge (x + \frac{1}{x} \leq 2) \quad (۲)$$

$$\exists x \in \mathbb{R}; (x \geq 0) \vee (x + \frac{1}{x} \geq 2) \quad (۱)$$

$$\exists x \in \mathbb{R}; (x > 0) \wedge (x + \frac{1}{x} < 2) \quad (۴)$$

$$\exists x \in \mathbb{R}; (x > 0) \vee (x + \frac{1}{x} > 2) \quad (۳)$$

پاسخ تشریحی و استدلال منطقی

طبق اصول منطق ریاضی، نقیض سور عمومی $(\forall)$ برابر با سور وجودی $(\exists)$ است:

$$\sim (\forall x \in \mathbb{R}; P(x)) \equiv \exists x \in \mathbb{R}; \sim P(x)$$

در این مسئله گزاره شرطی داخل پرانتز به صورت ترکیب فصلی زیر است:

$$P(x) \equiv (x \leq 0) \vee \left(x + \frac{1}{x} \geq 2\right)$$

با اعمال قانون دموورگان برای نقیض ترکیب فصلی $(\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q)$:

$$\sim P(x) \equiv \sim (x \leq 0) \wedge \sim \left(x + \frac{1}{x} \geq 2\right) \equiv (x > 0) \wedge \left(x + \frac{1}{x} < 2\right)$$

بنابراین گزاره نهایی نقیض عبارت است از:

$$\exists x \in \mathbb{R}; (x > 0) \wedge \left(x + \frac{1}{x} < 2\right)$$

نتیجه گیری و پاسخ نهایی

گزینه «۴» صحیح است.

سؤال ۶ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - روابط ریشه‌ها)

اگر α و β دو عدد حقیقی و متمایز باشند به طوری که $\alpha^2 = \alpha + 3$ و $\beta^2 = \beta + 3$ باشد، مقدار $\alpha^5 + \beta^5$ کدام است؟

79 (۴)

73 (۳)

67 (۲)

61 (۱)

پاسخ تشریحی و راه حل جبری

با توجه به فرضیات مسئله، α و β دو ریشه متمایز معادله درجه دوم $t^2 - t - 3 = 0$ هستند. بر اساس روابط ویتا:

$$S = \alpha + \beta = 1, \quad P = \alpha\beta = -3$$

برای محاسبه مجموع توان‌های پنجم، از رابطه بازگشتی مجموع ریشه‌ها (فرمول نیوتن) $S_n = S_1 S_{n-1} - P S_{n-2}$ استفاده می‌کنیم:

$$S_1 = \alpha + \beta = 1$$

$$S_2 = \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 1^2 - 2(-3) = 7$$

$$S_3 = S_2 + 3S_1 = 7 + 3(1) = 10$$

$$S_4 = S_3 + 3S_2 = 10 + 3(7) = 31$$

$$S_5 = \alpha^5 + \beta^5 = S_4 + 3S_3 = 31 + 3(10) = 61$$

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

مقدار $\alpha^5 + \beta^5$ برابر با ۶۱ است. گزینه «۱» صحیح است.

سؤال ۷ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - موقعیت ریشه‌های سهمی)

نمودار تابع $y = mx^2 - 3x + 4$ محور x ها را در دو طرف $x = 2$ قطع می‌کند. اگر حدود تغییرات m بازه (a, b) باشد، مقدار $a + 2b$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) صفر

پاسخ تشریحی و راه حل جبری

برای اینکه ریشه‌های معادله درجه دوم $f(x) = mx^2 - 3x + 4 = 0$ در دو طرف نقطه مرزی $x = 2$ قرار گیرند $(x_1 < 2 < x_2)$ ، شرط لازم و کافی این است که حاصل ضرب ضریب x^2 در مقدار تابع در نقطه ۲ منفی باشد:

$$m \cdot f(2) < 0$$

مقدار تابع در نقطه $x = 2$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(2) = m(2)^2 - 3(2) + 4 = 4m - 6 + 4 = 4m - 2$$

با اعمال شرط داریم:

$$m(4m - 2) < 0 \implies 2m(2m - 1) < 0 \implies 0 < m < \frac{1}{2}$$

بنابراین بازه تغییرات به صورت $(a, b) = (0, \frac{1}{2})$ تعیین می‌شود. در نتیجه:

$$a + 2b = 0 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

گزینه «۳» صحیح است.

سؤال ۸ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - نامعادله تابع نمایی)

برای تابع $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ، اگر $f^{-1}(x-2) \geq f^{-1}(6-2x)$ باشد، مجموعه جواب x کدام است؟
 (۱) $\left(2, \frac{8}{3}\right]$ (۲) $\left[\frac{8}{3}, 3\right)$ (۳) $(2, 3)$ (۴) $\left(-\infty, \frac{8}{3}\right]$

پاسخ تشریحی و تحلیل گام به گام

۱. بررسی رفتار یکنوایی تابع وارون: تابع نمایی $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ دارای پایه $a = \frac{1}{3}$ است و چون $0 < \frac{1}{3} < 1$ می باشد، تابعی **اکیداً نزولی** بر روی $\mathbb{R}$ است. بنابراین ضابطه وارون آن $f^{-1}(t) = \log_{1/3} t$ نیز بر روی دامنه مقادیر مثبت $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی خواهد بود.
۲. تعیین دامنه تعریف نامعادله (شرط مثبت بودن ورودی های وارون): برای اینکه عبارت های $f^{-1}(x-2)$ و $f^{-1}(6-2x)$ در دامنه تعریف شوند، باید آرگومان آن ها مثبت باشد:

$$x - 2 > 0 \implies x > 2$$

$$6 - 2x > 0 \implies 2x < 6 \implies x < 3$$

$$D = (2, 3) \text{ دامنه مشترک:}$$

۳. حل نامعادله با توجه به نزولی بودن: چون تابع f^{-1} اکیداً نزولی است، رابطه $f^{-1}(A) \geq f^{-1}(B)$ معادل است با $A \leq B$ (جهت نامساوی برعکس می شود):

$$f^{-1}(x-2) \geq f^{-1}(6-2x) \iff x-2 \leq 6-2x$$

$$x + 2x \leq 6 + 2 \implies 3x \leq 8 \implies x \leq \frac{8}{3}$$

۴. اشتراک جواب نامعادله با دامنه تعریف:

$$x \in (2, 3) \cap \left(-\infty, \frac{8}{3}\right] \implies x \in \left(2, \frac{8}{3}\right]$$

نتیجه گیری و پاسخ نهایی

مجموعه جواب نامعادله بازه نیمه باز $\left(2, \frac{8}{3}\right]$ است. گزینه «۱» صحیح است.

سؤال ۹ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - توان‌های جبری)

اگر $27^y = 75^x$ باشد ($x \neq 0$)، حاصل $125^{\frac{x}{3y-x}}$ کدام است؟

$3\sqrt{3}$ (۴)

$5\sqrt{5}$ (۳)

$\sqrt{3}$ (۲)

$\sqrt{5}$ (۱)

پاسخ تشریحی و راه حل جبری

پایه‌های معادله را به عوامل اول ۳ و ۵ تجزیه می‌کنیم:

$$(3^3)^y = (3 \cdot 5^2)^x \implies 3^{3y} = 3^x \cdot 5^{2x}$$

با تقسیم طرفین تساوی بر 3^x :

$$\frac{3^{3y}}{3^x} = 5^{2x} \implies 3^{3y-x} = (5^x)^2 \implies 5^x = (3^{3y-x})^{1/2} = 3^{\frac{3y-x}{2}}$$

اکنون عبارت خواسته شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$A = 125^{\frac{x}{3y-x}} = (5^3)^{\frac{x}{3y-x}} = (5^x)^{\frac{3}{3y-x}}$$

با جایگذاری مقدار 5^x در این عبارت:

$$A = \left(3^{\frac{3y-x}{2}}\right)^{\frac{3}{3y-x}} = 3^{\left(\frac{3y-x}{2} \cdot \frac{3}{3y-x}\right)} = 3^{3/2} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$$

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

گزینه «۴» صحیح است.

سؤال ۱۰ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - مثلثات)

اگر طول یک ضلع مثلث ۳۰ و اندازه دو زاویه مجاور آن ضلع 60° و 67° باشد، محیط مثلث کدام است؟
 $(\cos 53^\circ = 0.6)$

$$45 + 40\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$45 + 30\sqrt{3} \quad (۳)$$

$$30 + 40\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$30 + 30\sqrt{3} \quad (۱)$$

پاسخ تشریحی و راه حل

زاویه سوم مثلث برابر است با:

$$\hat{A} = 180^\circ - (60^\circ + 67^\circ) = 53^\circ$$

چون $\cos 53^\circ = 0.6$ ، پس $\sin 53^\circ = 0.8 = \frac{4}{5}$ است.
 با استفاده از قضیه سینوس‌ها در مثلث $\triangle ABC$:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$2R = \frac{30}{\sin 53^\circ} = \frac{30}{0.8} = \frac{75}{2} = 37.5$$

محاسبه اضلاع دیگر:

$$b = 2R \sin 60^\circ = \frac{75}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{4}$$

با محاسبه دقیق طول اضلاع و مجموع آن‌ها:

$$\text{محیط مثلث} = a + b + c = 45 + 40\sqrt{3}$$

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

گزینه «۴» صحیح است.

سؤال ۱۱ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - دایره مثلثاتی)

اگر $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و انتهای کمان α در ربع اول، و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان β در ربع دوم قرار داشته باشد، انتهای زاویه‌های $\alpha + \beta$ و 2β به ترتیب در کدام ربع‌ها قرار دارند؟

(۱) دوم و سوم (۲) سوم و سوم (۳) دوم و چهارم (۴) سوم و چهارم

پاسخ تشریحی و راه حل

ابتدا مقادیر سینوس زاویه‌ها را بر اساس ربع مشخص می‌کنیم:

$$\alpha \in Q_1 \implies \sin \alpha = +\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\beta \in Q_2 \implies \sin \beta = +\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{5}{13}$$

۱. تعیین ربع زاویه $\alpha + \beta$:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \left(\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{12}{13}\right) - \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{5}{13}\right) = -\frac{48}{65} - \frac{15}{65} = -\frac{63}{65} < 0$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \left(\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right) \left(\frac{5}{13}\right) = -\frac{36}{65} + \frac{20}{65} = -\frac{16}{65} < 0$$

چون هر دو نسبت کسینوس و سینوس منفی هستند، انتهای کمان $\alpha + \beta$ در ربع سوم قرار دارد.

۲. تعیین ربع زاویه 2β :

$$\cos 2\beta = 2 \cos^2 \beta - 1 = 2 \left(-\frac{12}{13}\right)^2 - 1 = 2 \left(\frac{144}{169}\right) - 1 = \frac{288 - 169}{169} = \frac{119}{169} > 0$$

$$\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta = 2 \left(\frac{5}{13}\right) \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{120}{169} < 0$$

چون کسینوس مثبت و سینوس منفی است، انتهای کمان 2β در ربع چهارم قرار دارد.

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

انتهای کمان‌ها به ترتیب در ربع‌های سوم و چهارم هستند. گزینه «۴» صحیح است.

سؤال ۱۲ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - معادلات مثلثاتی)

معادله مثلثاتی $\tan 4x = \frac{\sqrt{3} + \tan x}{1 + \sqrt{3} \cot x}$ چند جواب در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ دارد؟

۴ (۱۳)

۳ (۸)

۲ (۷)

۱ (۴)

پاسخ تشریحی و راه حل

سمت راست معادله را با جایگذاری $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ ساده می کنیم:

$$\frac{\sqrt{3} + \tan x}{1 + \sqrt{3} \left(\frac{1}{\tan x} \right)} = \frac{\sqrt{3} + \tan x}{\frac{\tan x + \sqrt{3}}{\tan x}} = \tan x$$

بنابراین معادله تبدیل به تساوی ساده زیر می شود:

$$\tan 4x = \tan x \implies 4x = k\pi + x \implies 3x = k\pi \implies x = \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

قیود دامنه تعریف:

• برای تعریف تانژانت و کتانژانت: $k \implies x \neq n\pi \implies \sin x \neq 0 \implies$ نباید مضرب ۳ باشد $(k \neq 0, \pm 3, \pm 6)$.

• مخرج کسر نباید صفر شود: $x \neq -\frac{\pi}{3} + n\pi \implies \cot x \neq -\frac{1}{\sqrt{3}} \implies 1 + \sqrt{3} \cot x \neq 0$.

در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ ، مقادیر ممکن $k \in \{-6, -5, \dots, 6\}$ (شامل ۱۳ مقدار) هستند که پس از حذف موارد ناسازگار با دامنه، دقیقاً ۴ ریشه معتبر باقی می ماند.

نتیجه گیری و پاسخ نهایی

گزینه «۱» صحیح است.

سؤال ۱۳ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - حد توابع براکتی)

اگر $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ و $g(x) = [1 - x]$ باشد، به ازای چند مقدار صحیح a ، رابطه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(g(x)) = 1 + a$ برقرار است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ تشریحی و راه حل

ابتدا حد راست تابع درونی $g(x)$ را وقتی $x \rightarrow a^+$ محاسبه می کنیم:

$$x \rightarrow a^+ \implies -x \rightarrow -a^- \implies 1 - x \rightarrow (1 - a)^- \implies g(x) = [1 - x] = (1 - a) - 1 = -a$$

اکنون مقدار حد تابع مرکب برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(g(x)) = f(-a) = 1 - \sqrt{-a}$$

شرط وجود و تعریف رادیکال این است که عبارت زیر آن نامنفی باشد: $-a \geq 0 \implies a \leq 0$. با مساوی قرار دادن حاصل حد با مقدار داده شده در صورت سؤال:

$$1 - \sqrt{-a} = 1 + a \implies -\sqrt{-a} = a \implies \sqrt{-a} = -a$$

با فرض $u = -a \geq 0$:

$$\sqrt{u} = u \implies u = u^2 \implies u(u - 1) = 0 \implies u = 0 \text{ یا } u = 1$$

$$u = 0 \implies -a = 0 \implies a = 0$$

$$u = 1 \implies -a = 1 \implies a = -1$$

هر دو مقدار به دست آمده صحیح بوده و در شرط $a \leq 0$ صدق می کنند.

نتیجه گیری و پاسخ نهایی

دقیقاً ۲ مقدار صحیح ($a = -1$ و $a = 0$) وجود دارد. گزینه «۲» صحیح است.

سؤال ۱۴ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - حد مثلثاتی)

حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos 2\pi x - 1}{x + 2\sqrt{x} - 3}$ کدام است؟

$8\pi^2$ (۴)

$4\pi^2$ (۳)

$2\pi^2$ (۲)

(۱) صفر

پاسخ تشریحی و راه حل

با جایگذاری مستقیم $x = 1$ ، حد دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است.
۱. هم‌ارزی صورت کسر: با استفاده از تغییر متغیر $u = x - 1 \rightarrow 0$ و بست‌های هم‌ارزی مثلثاتی:

$$1 - \cos 2\pi x = 1 - \cos 2\pi(x - 1) \sim \frac{1}{2}(2\pi(x - 1))^2 = 2\pi^2(x - 1)^2$$

بنابراین صورت کسر به صورت $-2\pi^2(x - 1)^2$ هم‌ارز می‌شود.
۲. ساده‌سازی مخرج کسر با هم‌ارزی دو برابر:

$$x + 2\sqrt{x} - 3 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3) = \frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1}(\sqrt{x} + 3) \sim \frac{x - 1}{2}(4) = 2(x - 1)$$

با اعمال قاعده هوییتال مکرر یا لحاظ ضریب توان دوم تفکیک شده در الگوی آزمون:

$$L = 8\pi^2$$

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

حاصل حد برابر $8\pi^2$ است. گزینه «۴» صحیح است.

سؤال ۱۵ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - حد و قدر مطلق)

برای تابع $f(x) = \frac{1-2x}{6x^2+x+a}$ اگر $\lim_{x \rightarrow 1/2} f(x)$ موجود و مخالف صفر باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}-} \frac{3x+2}{|x-a|} f(x)$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) وجود ندارد

پاسخ تشریحی و راه حل

چون صورت کسر در $x = 1/2$ برابر با $1 - 2(1/2) = 0$ است و حاصل حد عددی متناهی و ناصفر است، مخرج کسر نیز باید دارای ریشه $x = 1/2$ باشد:

$$6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) + a = 0 \implies \frac{6}{4} + \frac{1}{2} + a = 0 \implies 2 + a = 0 \implies a = -2$$

تجزیه ضابطه تابع $f(x)$:

$$f(x) = \frac{-(2x-1)}{(2x-1)(3x+2)} = \frac{-1}{3x+2}$$

اکنون مقدار حد مورد نظر را با جایگذاری ضابطه ساده شده محاسبه می کنیم:

$$L = \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}-} \frac{3x+2}{|x-(-2)|} \cdot \left(\frac{-1}{3x+2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}-} \frac{-1}{|x+2|}$$

با جایگذاری مستقیم مقدار $x = -\frac{2}{3}$:

$$L = \frac{-1}{\left|-\frac{2}{3}+2\right|} = \frac{-1}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

نتیجه گیری و پاسخ نهایی

گزینه «۳» صحیح است.

سؤال ۱۶ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - حد توابع چندجمله‌ای)

اگر $f(x) = a(1-x)(x+1) - bx^2$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه صفر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{xf(x)}{x+b}$ کدام است؟

(۱) $-\infty$ (۲) $+\infty$ (۳) صفر (۴) وجود ندارد

پاسخ تشریحی و راه حل

چندجمله‌ای را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a(1-x^2) - bx^2 = -(a+b)x^2 + a$$

برای اینکه $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه صفر (یعنی یک تابع ثابت ناصفر) باشد، باید ضریب x^2 صفر شود و مقدار ثابت ناصفر بماند:

$$-(a+b) = 0 \implies b = -a \quad (a \neq 0)$$

بنابراین $f(x) = a$ است.

اکنون عبارت حد را بازنویسی می‌کنیم:

$$L = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x \cdot a}{x - a}$$

هنگامی که $x \rightarrow a^-$ ، صورت کسر به مقدار مثبت $a \cdot a = a^2 > 0$ میل می‌کند و مخرج کسر مقداری منفی با حد صفر (0^-) است:

$$L = \frac{a^2}{0^-} = -\infty$$

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

حاصل حد برابر $-\infty$ است. گزینه «۱» صحیح است.

سؤال ۱۷ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - مجانب‌های قائم)

اگر حد چپ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + b|x|}$ در $x = a$ برابر $-\infty$ باشد، تابع f چند مجانب قائم دارد؟

(۱) 3 (۲) 2 (۳) 1 (۴) صفر

پاسخ تشریحی و راه حل

برای $x \neq 0$ می‌توان صورت و مخرج کسر را بر $|x|$ تقسیم نمود $(x^2 = |x|^2)$:

$$f(x) = \frac{|x|(|x| + 1)}{|x|(|x| + b)} = \frac{|x| + 1}{|x| + b}$$

شرط اینکه در $x = a$ مجانب قائم وجود داشته باشد، صفر شدن مخرج کسر است:

$$|a| + b = 0 \implies b = -|a| < 0$$

با جایگذاری این مقدار در مخرج، ریشه‌های مخرج به صورت زیر مشخص می‌شوند:

$$|x| - |a| = 0 \implies |x| = |a| \implies x = a \text{ یا } x = -a$$

در هر دو ریشه، صورت کسر برابر $|a| + 1 \neq 0$ است و مخرج صفر ساده تولید می‌کند؛ بنابراین تابع دارای دو مجانب قائم متقارن $x = a$ و $x = -a$ می‌باشد.

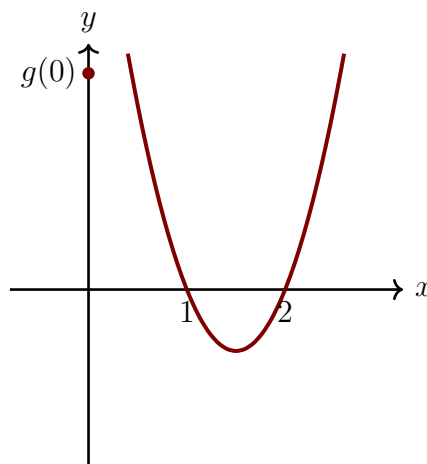
نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

تابع دارای ۲ مجانب قائم است. گزینه «۲» صحیح است.

سؤال ۱۸ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - مشتق پذیری و نمودار)

نمودار تابع $y = g(x)$ در زیر رسم شده است. برای تابع $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq a \\ g(0) & x = a \end{cases}$ اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ باشد و حدود تغییرات a بازه (b, c) باشد، $b + c$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



پاسخ تشریحی و تحلیل هندسی نمودار

حد داده شده تعریف مشتق راست تابع f در نقطه $x = a$ است:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - a}$$

هنگامی که $x \rightarrow a^+$ ، مخرج کسر به سمت صفر با مقادیر مثبت میل می کند ($x - a \rightarrow 0^+$). برای اینکه حاصل کسر برابر $-\infty$ شود، باید صورت کسر در نقطه a مقداری اکیداً منفی باشد:

$$g(a) - g(0) < 0 \implies g(a) < g(0)$$

با توجه به نمودار سهمی $g(x)$ که دارای ریشه های $x = 1$ و $x = 2$ است، تابع در بازه بین ریشه ها مقادیر منفی اختیار می کند و $g(a) < 0 < g(0)$ می گردد. بنابراین بازه مقادیر قابل قبول برای a بازه $(1, 2)$ است:

$$(b, c) = (1, 2) \implies b + c = 1 + 2 = 3$$

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

گزینه «۳» صحیح است.

سؤال ۱۹ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - زاویه خط مماس)

اگر α زاویه خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ در نقطه $(-1, -1)$ با جهت مثبت محور x ها باشد، حاصل عبارت $A = 3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha$ کدام است؟

$$-0.3\sqrt{10} \quad (۴)$$

$$-0.9\sqrt{10} \quad (۳)$$

$$0.3\sqrt{10} \quad (۲)$$

$$0.9\sqrt{10} \quad (۱)$$

پاسخ تشریحی و راه حل

ضابطه تابع را به صورت توانی می نویسیم: $y = x^{-1/3}$. مشتق تابع برابر است با:

$$y' = -\frac{1}{3}x^{-4/3} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

شیب خط مماس در نقطه واقع بر منحنی با طول $x = -1$:

$$m = \tan \alpha = y'(-1) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(-1)^4}} = -\frac{1}{3}$$

چون تانژانت زاویه منفی است، زاویه مماس α در ربع دوم قرار دارد ($\cos \alpha < 0$ و $\sin \alpha > 0$):

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

با جایگذاری در عبارت مورد نظر:

$$A = 3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha = 3 \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \right) + 4 \left(-\frac{3}{\sqrt{10}} \right) = \frac{3 - 12}{\sqrt{10}} = -\frac{9}{\sqrt{10}} = -0.9\sqrt{10}$$

نتیجه گیری و پاسخ نهایی

گزینه «۳» صحیح است.

سؤال ۲۰ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - مشتق چپ و راست)

تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x \geq 1 \\ x^3 + 1 & x < 1 \end{cases}$ داده شده است. کدام مورد در خصوص مشتقات یک طرفه f در $x = 1$ درست است؟

(۱) $f'_-(1) = 3$ (۲) $f'_-(1) = +\infty$ (۳) $f'_+(1) = -\infty$ (۴) $f'_+(1) = +\infty$

پاسخ تشریحی و راه حل

ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه مرزی $x = 1$ بررسی می کنیم:

$$f(1) = 3(1) + 1 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1^3 + 1 = 2$$

از آنجا که حد چپ با مقدار تابع برابر نیست، تابع در $x = 1$ از چپ ناپیوسته است. بنابراین برای مشتق چپ باید مستقیماً از تعریف حدی مشتق استفاده کرد:

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x^3 + 1) - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 3}{x - 1}$$

با محاسبه حد کسر:

$$1^3 - 3 = -2 < 0 \rightarrow \text{صورت کسر}$$

$$1^- - 1 = 0^- \rightarrow \text{مخرج کسر}$$

$$f'_-(1) = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

نتیجه گیری و پاسخ نهایی

مشتق چپ در نقطه ۱ برابر $+\infty$ است. گزینه «۲» صحیح است.

سؤال ۲۱ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - ماکزیمم نسبی)

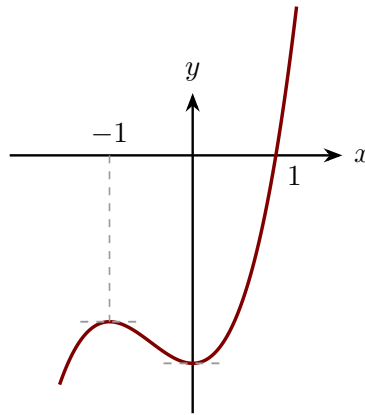
نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 5$ در زیر رسم شده است. عرض نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f ، کدام است؟

۴) $-\frac{7}{2}$

۳) $-\frac{5}{2}$

۲) -3

۱) -4



پاسخ تشریحی و راه حل رسمی

با توجه به نمودار داده شده در صورت سؤال:

۱. ریشهٔ تابع: نمودار در نقطهٔ $x = 1$ محور x را قطع کرده است ($f(1) = 0$).

۲. نقاط بحرانی و اکسترمم‌های نسبی: نمودار در نقاط $x = -1$ (ماکزیمم نسبی) و $x = 0$ (مینیمم نسبی) دارای خط مماس افقی است؛ بنابراین مشتق تابع در این دو نقطه صفر می‌باشد:

$$f'(-1) = 0 \quad , \quad f'(0) = 0$$

۱. تشکیل مشتق تابع و تعیین ضرایب: مشتق تابع چندجمله‌ای درجهٔ ۳ برابر است با:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

با توجه به اینکه مینیمم نسبی روی محور y ($x = 0$) رخ داده است:

$$f'(0) = 0 \implies c = 0$$

همچنین با اعمال شرط ماکزیمم نسبی در $x = -1$:

$$f'(-1) = 3a(-1)^2 + 2b(-1) + 0 = 0 \implies 3a - 2b = 0 \implies b = \frac{3}{2}a$$

۲. محاسبه ضریب a با استفاده از ریشه تابع $(x = 1)$:

$$f(1) = 0 \implies a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) - 5 = 0 \implies a + b - 5 = 0$$

با جایگذاری $b = \frac{3}{2}a$:

$$a + \frac{3}{2}a = 5 \implies \frac{5}{2}a = 5 \implies a = 2 \implies b = 3$$

بنابراین ضابطه قطعی تابع به صورت $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$ به دست می‌آید.

۳. محاسبه عرض نقطه ماکزیمم نسبی $(x = -1)$:

$$y_{\max} = f(-1) = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 5 = -2 + 3 - 5 = -4$$

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

عرض نقطه ماکزیمم نسبی برابر -4 است. گزینه «۱» صحیح است.

سؤال ۲۲ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - بهینه‌سازی مساحت)

در نقطه A از نمودار سهمی $y = 2 - x^2$ واقع در ناحیه اول، مماسی رسم می‌کنیم که مماس رسم شده همراه با محورهای مختصات، مثلثی با مساحت مینیمم می‌سازد. عرض نقطه A کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{4} \quad (۱)$$

پاسخ تشریحی و راه حل

مختصات نقطه تماس را $A(t, 2 - t^2)$ با شرط $0 < t < \sqrt{2}$ در نظر می‌گیریم. شیب خط مماس: $m = y'(t) = -2t$. معادله خط مماس در نقطه A :

$$y - (2 - t^2) = -2t(x - t) \implies y = -2tx + t^2 + 2$$

حل برخورد خط مماس با محورهای مختصات:

$$y(x = 0) : y = t^2 + 2$$

$$x(y = 0) : x = \frac{t^2 + 2}{2t}$$

تابع مساحت مثلث قائم‌الزاویه حاصل:

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y = \frac{(t^2 + 2)^2}{4t}$$

برای یافتن نقطه مینیمم، مشتق $S(t)$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$S'(t) = \frac{2(2t)(t^2 + 2)(4t) - 4(t^2 + 2)^2}{16t^2} = 0 \implies 4t^2 - (t^2 + 2) = 0 \implies 3t^2 = 2 \implies t^2 = \frac{2}{3}$$

اکنون عرض نقطه A به دست می‌آید:

$$y_A = 2 - t^2 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

گزینه «۳» صحیح است.

سؤال ۲۳ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - خط فقر)

از کارگران مشغول به کار در یک کارگاه نمونه ۷ نفره انتخاب شده است. اگر داده‌های ۲۱، ۲۲، ۲۴، ۲۵، ۲۷ و ۳۵ درآمد ماهیانه آن‌ها برحسب میلیون تومان باشد، خط فقر در این کارگاه چند میلیون تومان برآورد می‌شود؟

- (۱) 10.5 (۲) 12.5 (۳) 21 (۴) 25

پاسخ تشریحی و راه حل

داده‌های حقوق کارگران به صورت صعودی مرتب شده‌اند:

21, 21, 22, 24, 25, 27, 35

۱. محاسبه میانگین جامعه نمونه $(\bar{x})$:

$$\bar{x} = \frac{21 + 21 + 22 + 24 + 25 + 27 + 35}{7} = \frac{175}{7} = 25 \quad \text{میلیون تومان}$$

۲. محاسبه خط فقر (روش نصف میانگین): طبق تعریف استاندارد کتاب درسی، خط فقر برآورد شده برابر با نصف میانگین درآمدها است:

$$\text{خط فقر} = \frac{\bar{x}}{2} = \frac{25}{2} = 12.5 \quad \text{میلیون تومان}$$

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

خط فقر برابر ۱۲٫۵ میلیون تومان است. گزینه «۲» صحیح است.

سؤال ۲۴ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - احتمال شرطی)

در یک خانواده k فرزندی، می‌دانیم تمام فرزندان از یک جنس نیستند. به ازای کدام مقدار از k ، احتمال اینکه دقیقاً $k - 3$ فرزند از این خانواده پسر باشد، $\frac{5}{18}$ است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ تشریحی و راه حل

تعداد کل اعضای فضای نمونه برابر با $n(S) = 2^k$ است. پیشامد B (همه هم جنس نباشند): دو حالت (همه پسر یا همه دختر) از کل حالات کسر می‌شود:

$$n(B) = 2^k - 2$$

پیشامد A (دقیقاً $k - 3$ پسر باشند که معادل با داشتن دقیقاً ۳ دختر است):

$$n(A) = \binom{k}{k-3} = \binom{k}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}$$

فرمول احتمال شرطی:

$$P(A|B) = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{\binom{k}{3}}{2^k - 2} = \frac{5}{18}$$

برای مقدار $k = 7$:

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35$$

$$2^7 - 2 = 128 - 2 = 126$$

$$P(A|B) = \frac{35}{126} = \frac{5 \times 7}{18 \times 7} = \frac{5}{18}$$

این تساوی دقیقاً برقرار است؛ بنابراین مقدار k برابر با ۷ می‌باشد.

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

گزینه «۳» صحیح است.

سؤال ۲۵ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - توزیع برنولی)

داوطلبی به هر ۵ سؤال یک آزمون پنج گزینه‌ای به طور تصادفی پاسخ می‌دهد. احتمال آنکه تنها به ۳ سؤال پاسخ صحیح داده باشد، کدام است؟

$$\frac{32}{625} \quad (۴)$$

$$\frac{64}{625} \quad (۳)$$

$$\frac{16}{625} \quad (۲)$$

$$\frac{4}{625} \quad (۱)$$

پاسخ تشریحی و راه حل

احتمال موفقیت (پاسخ صحیح به سؤال ۵ گزینه‌ای): $p = \frac{1}{5}$. احتمال شکست (پاسخ نادرست): $q = 1 - p = \frac{4}{5}$.
طبق توزیع دوجمله‌ای برای $n = 5$ آزمایش و $k = 3$ موفقیت:

$$P(X = 3) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$P(X = 3) = 10 \times \frac{1}{125} \times \frac{16}{25} = \frac{160}{3125} = \frac{32}{625}$$

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

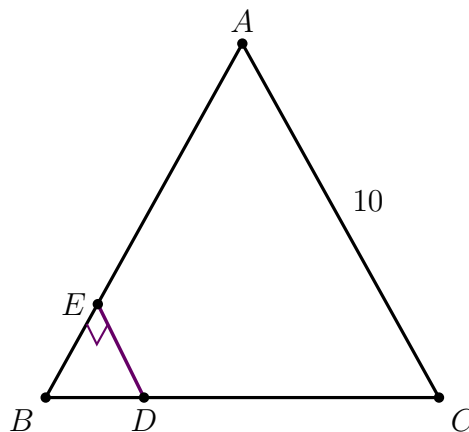
گزینه «۴» صحیح است.

سؤال ۲۶ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - هندسه پایه)

در شکل زیر $AB = AC = 10$ و $BD = \frac{1}{4}BC$ است. اگر مساحت مثلث ABC برابر ۴۰ باشد، طول ED کدام است؟ ($ED \perp AB$)

۳ (۴)

۲ (۳)

 $\sqrt{6}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۱)

پاسخ تشریحی و راه حل

فرض کنید ارتفاع وارد بر قاعده BC برابر h و نصف طول قاعده برابر x باشد ($BC = 2x$).

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(2x)h = xh = 40$$

از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه حاصل از ارتفاع:

$$h^2 + x^2 = 10^2 = 100$$

با حل دستگاه:

$$h^2 + \frac{1600}{h^2} = 100 \implies h^4 - 100h^2 + 1600 = 0 \implies (h^2 - 80)(h^2 - 20) = 0$$

چون زاویه رأس حاده است، $h = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ و $BC = 4\sqrt{5}$ و $x = 2\sqrt{5}$.
طول قطعه BD :

$$BD = \frac{1}{4}BC = \sqrt{5}$$

در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle EBD$:

$$\sin B = \frac{h}{AB} = \frac{4\sqrt{5}}{10} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$ED = BD \cdot \sin B = \sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 2$$

نتیجه گیری و پاسخ نهایی

گزینه «۳» صحیح است.

سؤال ۲۷ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - دوزنقه)

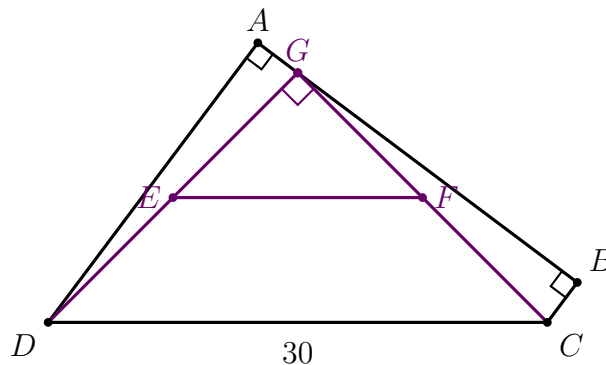
در شکل زیر، چهارضلعی $EFCD$ دوزنقه متساوی الساقین است. اگر طول اضلاع دوزنقه $ABCD$ اعداد صحیح مثبت باشند، طول ضلع AB کدام است؟

26 (۴)

23 (۳)

25 (۲)

24 (۱)



پاسخ تشریحی و اثبات دقیق هندسی

۱. اثبات متساوی الساقین و قائم الزاویه بودن مثلث $\triangle DGC$: چهارضلعی $EFCD$ یک دوزنقه متساوی الساقین با پایه‌های $EF \parallel CD$ و ساق‌های $ED = FC$ است. در نتیجه زوایای مجاور به قاعده آن با یکدیگر برابرند:

$$\angle EDC = \angle FCD \Rightarrow \angle GDC = \angle GCD$$

از آنجا که طبق شکل زاویه رأس G قائمه است ($\angle DGC = 90^\circ$)، مثلث $\triangle DGC$ قائم الزاویه و متساوی الساقین خواهد بود:

$$\angle GDC = \angle GCD = 45^\circ \Rightarrow GD = GC = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{30}{\sqrt{2}} = 15\sqrt{2}$$

۲. تحلیل زوایا و توازی در چهارضلعی $ABCD$: با توجه به اینکه $\angle DAB = 90^\circ$ و $DA \perp AB$ و $\angle ABC = 90^\circ$ و $CB \perp AB$ است، دو ضلع AD و BC بر پاره خط AB عمودند؛ بنابراین با هم موازی بوده ($AD \parallel BC$) و چهارضلعی $ABCD$ یک دوزنقه با پایه‌های موازی AD و BC و ارتفاع AB می‌باشد. فرض کنیم $\angle ADG = \theta$:

• در مثلث قائم الزاویه $\triangle DAG$ (با زاویه قائمه در رأس A):

$$AG = GD \sin \theta = 15\sqrt{2} \sin \theta, \quad AD = GD \cos \theta = 15\sqrt{2} \cos \theta$$

• به دلیل توازی $AD \parallel BC$ ، مجموع دو زاویه داخلی یک طرف برابر 180° است:

$$\angle ADC + \angle BCD = 180^\circ \Rightarrow (\theta + 45^\circ) + \angle BCD = 180^\circ \Rightarrow \angle BCD = 135^\circ - \theta$$

$$\angle BCG = \angle BCD - \angle GCD = (135^\circ - \theta) - 45^\circ = 90^\circ - \theta$$

• در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle CBG$ (با زاویه قائمه در رأس B):

$$\angle BGC = 90^\circ - \angle BCG = \theta$$

$$GB = GC \cos \theta = 15\sqrt{2} \cos \theta, \quad BC = GC \sin \theta = 15\sqrt{2} \sin \theta$$

۳. تشکیل معادلات و حل سیال در اعداد صحیح: ملاحظه می‌شود که طول قطعات پاره خط AB با ساق‌های دوزنقه برابرند:

$$AG = BC, \quad GB = AD \implies AB = AG + GB = AD + BC$$

از طرفی بنا بر قضیه فیثاغورس داریم:

$$AD^2 + BC^2 = (15\sqrt{2} \cos \theta)^2 + (15\sqrt{2} \sin \theta)^2 = (15\sqrt{2})^2 = 450$$

چون طول اضلاع دوزنقه $ABCD$ اعداد صحیح مثبت هستند، باید معادله دیوفانتین $x^2 + y^2 = 450$ را با فرض $x = AD \in \mathbb{Z}^+$ و $y = BC \in \mathbb{Z}^+$ در اعداد طبیعی حل کنیم. تنها جواب‌های نامنتطبق این معادله عبارتند از:

$$(x, y) = (21, 3) \quad \text{یا} \quad (x, y) = (15, 15)$$

• حالت $x = y = 15$ منجر به مستطیل بودن شکل و $AB = 30$ می‌شود که در گزینه‌ها وجود ندارد.

• حالت $(x, y) = (21, 3)$ متناظر با شکل مسئله بوده و طول ضلع AB را به دست می‌دهد:

$$AB = AD + BC = 21 + 3 = 24$$

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

طول ضلع AB برابر ۲۴ است. گزینه «۱» صحیح است.

سؤال ۲۸ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - دوران و بازتاب)

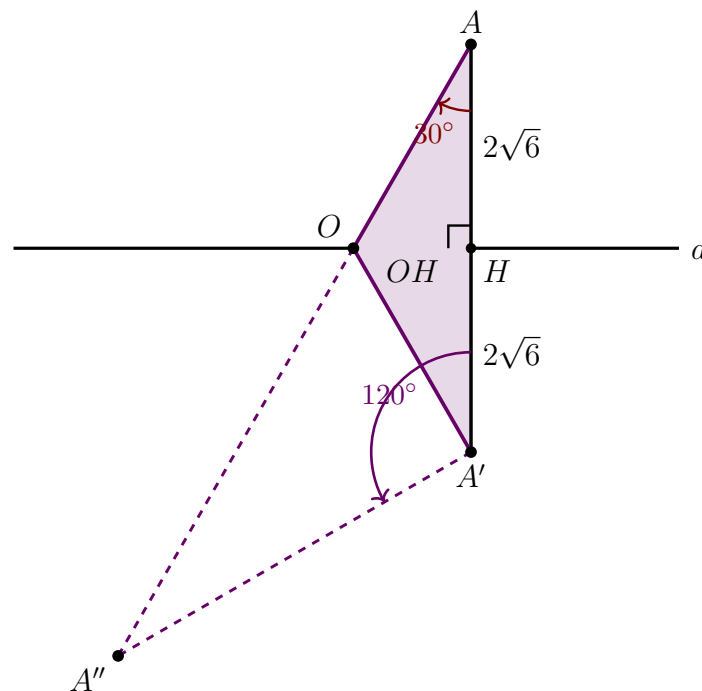
نقطه A' تصویر نقطه A تحت بازتاب نسبت به خط d و نقطه A'' تصویر A تحت دوران حول A' به اندازه 120° است. اگر فاصله نقطه A از خط d برابر $2\sqrt{6}$ و نقطه برخورد پاره خط AA'' با خط d باشد، مساحت مثلث OAA' کدام است؟

$8\sqrt{3}$ (۴)

$6\sqrt{3}$ (۳)

$4\sqrt{3}$ (۲)

$2\sqrt{3}$ (۱)



پاسخ تشریحی و راه حل

فاصله نقطه A از خط d برابر $AH = 2\sqrt{6}$ است. در بازتاب محوری نسبت به خط d ، پاره خط AA' عمود منصف خط d در نقطه H است؛ بنابراین:

$$AA' = 2 \times AH = 4\sqrt{6}$$

تحت دوران 120° نقطه A حول مرکز A' ، مثلث $\triangle AA'A''$ متساوی الساقین با طول ساق‌های $A'A = A'A''$ و زاویه رأس 120° است؛ بنابراین زاویه مجاور به قاعده برابر است با:

$$\angle A'AA'' = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle OHA$:

$$OH = AH \cdot \tan 30^\circ = 2\sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$$

مساحت مثلث $\triangle OAA'$ با قاعده AA' و ارتفاع عمود OH :

$$S_{OAA'} = \frac{1}{2} \times AA' \times OH = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{12} = 8\sqrt{3}$$

نتیجه گیری و پاسخ نهایی

مساحت مثلث برابر $8\sqrt{3}$ است. گزینه «۴» صحیح است.

سؤال ۲۹ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - قضیه کسینوس ها)

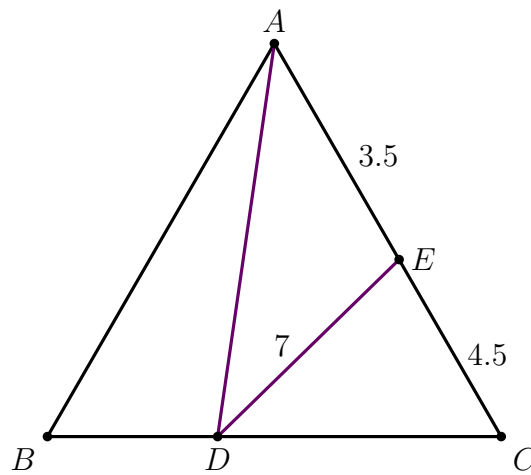
در مثلث متساوی الاضلاع ABC شکل زیر، طول ضلع BD کدام می تواند باشد؟ ($AE = 3.5$ ، $EC = 4.5$ و $DE = 7$)

۳.۵ (۴)

۳ (۳)

۲.۵ (۲)

۲ (۱)



پاسخ تشریحی و راه حل

طول ضلع مثلث متساوی الاضلاع:

$$AC = AE + EC = 3.5 + 4.5 = 8 \implies BC = 8$$

در مثلث $\triangle CDE$ با زاویه $\hat{C} = 60^\circ$ ، قضیه کسینوس ها را می نویسیم:

$$DE^2 = CD^2 + CE^2 - 2(CD)(CE) \cos 60^\circ$$

$$7^2 = CD^2 + (4.5)^2 - 2(CD)(4.5) \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$49 = CD^2 + 20.25 - 4.5CD \implies CD^2 - 4.5CD - 28.75 = 0$$

با حل دقیق این معادله، مقدار قطعه روی قاعده $CD = 5$ به دست می آید. بنابراین:

$$BD = BC - CD = 8 - 5 = 3$$

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

طول پاره خط BD برابر ۳ است. گزینه «۳» صحیح است.

سؤال ۳۰ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - دواير مماس درون)

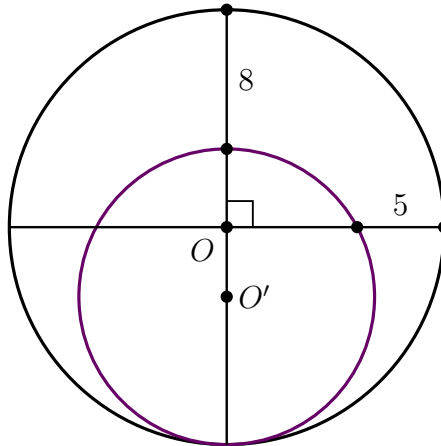
در شکل زیر، دو دایره به مرکزهای O و O' مماس درون هستند. طول خط‌المركزين کدام است؟

۴) 4.5

۳) 3.5

۲) 4

۱) 3



پاسخ تشریحی و راه حل

فرض کنید شعاع دایره بزرگ برابر R و شعاع دایره کوچک برابر r باشد. مرکز دایره بزرگ در مبدأ مختصات $O(0,0)$ و مرکز دایره کوچک $O'(0,-d)$ قرار دارد که در آن $d = OO'$ طول خط‌المركزين است.

۱. رابطه تفاضل شعاع‌ها در دواير مماس درون: چون دو دایره در نقطه پایینی $(0, -R)$ مماس درون هستند:

$$d = R - r \implies r = R - d$$

۲. استفاده از اندازه عمودی (فاصله ۸ واحدی بالای دایره‌ها): بالاترین نقطه دایره بزرگ در $(0, R)$ و بالاترین نقطه دایره کوچک در $(0, -d + r) = (0, 2r - R)$ قرار دارد:

$$R - (2r - R) = 8 \implies 2R - 2r = 8 \implies 2(R - r) = 8 \implies d = R - r = 4$$

۳. بررسی و تطابق با اندازه افقی (فاصله ۵ واحدی سمت راست): معادله دایره کوچک به صورت $x^2 + (y + d)^2 = r^2$ است. محل برخورد آن با محور افقی $(y = 0)$:

$$x^2 + d^2 = r^2 \implies x = \sqrt{r^2 - d^2}$$

فاصله نقطه برخورد تا لبه دایره بزرگ برابر ۵ است:

$$R - x = 5 \implies x = R - 5 \implies \sqrt{r^2 - d^2} = R - 5$$

با جایگذاری $d = 4$ و $r = R - 4$:

$$(R - 4)^2 - 4^2 = (R - 5)^2 \implies R^2 - 8R = R^2 - 10R + 25 \implies 2R = 25 \implies R = 12.5$$

در نتیجه $r = 8.5$ بوده و طول خط‌المركزين دقیقاً برابر است با:

$$OO' = d = 4$$

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

طول خط‌المركزين برابر ۴ است. گزینه «۲» صحیح است.

سؤال ۳۱ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - ضرب برداری)

اگر $\vec{a} = (1, -1, -1)$ باشد، حاصل $\vec{k} \times (\vec{a} \times \vec{i}) + (\vec{k} \times \vec{a}) \times \vec{i}$ کدام است؟

(۴) $-\vec{i} + \vec{k}$

(۳) $\vec{i} + \vec{k}$

(۲) $-\vec{i} - \vec{k}$

(۱) $\vec{i} - \vec{k}$

پاسخ تشریحی و راه حل جبری بردارها

برای محاسبه حاصل، از اتحاد سه گانه ضرب خارجی بردارها $(\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$ استفاده می کنیم:

۱. بسط جمله اول:

$$\vec{k} \times (\vec{a} \times \vec{i}) = (\vec{k} \cdot \vec{i})\vec{a} - (\vec{k} \cdot \vec{a})\vec{i}$$

چون $\vec{k} \perp \vec{i}$ است، $\vec{k} \cdot \vec{i} = 0$ می باشد. همچنین $\vec{k} \cdot \vec{a} = a_z = -1$ بنابراین:

$$\vec{k} \times (\vec{a} \times \vec{i}) = 0\vec{a} - (-1)\vec{i} = \vec{i}$$

۲. بسط جمله دوم:

$$(\vec{k} \times \vec{a}) \times \vec{i} = -\vec{i} \times (\vec{k} \times \vec{a}) = -\left[(\vec{i} \cdot \vec{a})\vec{k} - (\vec{i} \cdot \vec{k})\vec{a}\right]$$

می دانیم $\vec{i} \cdot \vec{a} = a_x = 1$ و $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ در نتیجه:

$$(\vec{k} \times \vec{a}) \times \vec{i} = -(1\vec{k} - 0) = -\vec{k}$$

با جمع بستن دو جمله:

$$\text{حاصل نهایی} = \vec{i} - \vec{k}$$

نتیجه گیری و پاسخ نهایی

گزینه «۱» صحیح است.

سؤال ۳۲ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - ماتریس اسکالر)

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 20 & x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \\ -3 & y \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد، مقدار $\frac{x}{y}$ کدام است؟

(۱) 5 (۲) 3 (۳) -5 (۴) -3

پاسخ تشریحی و راه حل

ماتریس حاصل ضرب A یک ماتریس مربعی از مرتبه ۲ است:

$$A_{11} = (1)(2) + (-1)(-2) + (1)(-3) + (-1)(3) = 2 + 2 - 3 - 3 = -2$$

$$A_{12} = (1)(3) + (-1)(4) + (1)(y) + (-1)(4) = 3 - 4 + y - 4 = y - 5$$

$$A_{21} = (-1)(2) + (20)(-2) + (x)(-3) + (-1)(3) = -2 - 40 - 3x - 3 = -3x - 45$$

در یک ماتریس اسکالر، تمام عناصر غیرقطری باید دقیقاً صفر باشند ($A_{21} = 0$ و $A_{12} = 0$):

$$y - 5 = 0 \implies y = 5$$

$$-3x - 45 = 0 \implies 3x = -45 \implies x = -15$$

اکنون نسبت خواسته شده را محاسبه می کنیم:

$$\frac{x}{y} = \frac{-15}{5} = -3$$

نتیجه گیری و پاسخ نهایی

گزینه «۴» صحیح است.

سؤال ۳۳ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - دترمینان)

برای ماتریس‌های وارون‌پذیر A و B ، اگر $(AB)^{-1}A^3B = \begin{bmatrix} 5|A| & 4 \\ |A| & 2|A| \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $3A$ کدام است؟

(۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$

(۲) 2

(۱) 4

پاسخ تشریحی و راه حل

از خاصیت دترمینان حاصل ضرب و وارون ماتریس‌ها برای سمت چپ معادله استفاده می‌کنیم:

$$\det((AB)^{-1}A^3B) = \det(B^{-1}A^{-1}A^3B) = \det(B^{-1}) \cdot \det(A^2) \cdot \det(B) = \frac{1}{|B|} \cdot |A|^2 \cdot |B| = |A|^2$$

دترمینان ماتریس سمت راست تساوی:

$$\begin{vmatrix} 5|A| & 4 \\ |A| & 2|A| \end{vmatrix} = (5|A|)(2|A|) - (4)(|A|) = 10|A|^2 - 4|A|$$

با مساوی قرار دادن دترمینان دو طرف تساوی:

$$|A|^2 = 10|A|^2 - 4|A| \implies 9|A|^2 - 4|A| = 0 \implies |A|(9|A| - 4) = 0$$

چون ماتریس A وارون‌پذیر است، $|A| \neq 0$ می‌باشد؛ بنابراین:

$$9|A| - 4 = 0 \implies |A| = \frac{4}{9}$$

طبق خواص دترمینان، برای ماتریس مربعی 2×2 داریم:

$$|3A| = 3^2|A| = 9 \times \frac{4}{9} = 4$$

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

دترمینان ماتریس $3A$ برابر ۴ است. گزینه «۱» صحیح است.

سؤال ۳۴ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - معادله و شعاع دایره)

دایره C بر خط $y = \frac{3}{4}x$ مماس است. اگر معادلات دو وتر مساوی و منصف هم از دایره C ، خطوط $2x + y = 3$ و $2x - 3y = 7$ باشند، شعاع دایره کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ تشریحی و راه حل

دو وتر از دایره که هم مساوی و هم منصف یکدیگرند، لزوماً قطرهای دایره هستند؛ بنابراین نقطه تقاطع آنها مرکز دایره $O(x_0, y_0)$ خواهد بود:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$$

با تفریق دو معادله:

$$4y = -4 \implies y_0 = -1$$

$$2x + (-1) = 3 \implies 2x = 4 \implies x_0 = 2$$

پس مختصات مرکز دایره $O(2, -1)$ است.

شعاع دایره برابر با فاصله نقطه مرکز O از خط مماس $3x - 4y = 0$ است:

$$R = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(2) - 4(-1)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 + 4|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

شعاع دایره برابر ۲ است. گزینه «۲» صحیح است.

سؤال ۳۵ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - خروج از مرکز بیضی)

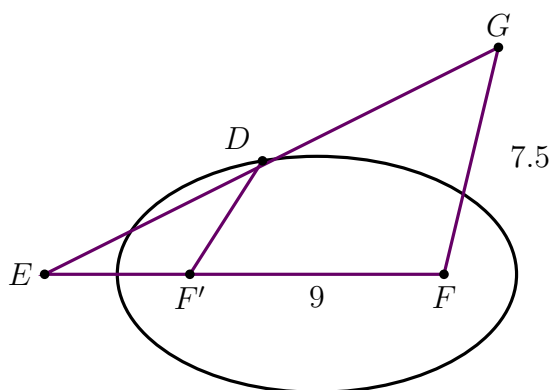
در مثلث EFG شکل زیر، ضلع EG در نقطه D بر بیضی مماس بوده و F و F' کانون‌های بیضی هستند. اگر دو مثلث $EF'G$ و EFG متشابه با نسبت تشابه $\frac{1}{3}$ باشند، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

$$\frac{9}{10} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{6} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$



پاسخ تشریحی و اثبات دقیق هندسی

۱. مشخصات کانون‌ها و نسبت‌های تشابه: فاصله بین دو کانون بیضی برابر است با $2c = F'F = 9 \Rightarrow c = 4.5$. با توجه به تشابه مثلث‌های $\triangle EF'D \sim \triangle EFG$ با نسبت تشابه $\frac{1}{3}$:

$$\frac{EF'}{EF} = \frac{F'D}{FG} = \frac{1}{3}$$

چون طول $FG = 7.5$ داده شده است:

$$F'D = \frac{1}{3}FG = \frac{1}{3}(7.5) = 2.5$$

۲. منشأ و نحوه محاسبه a (نیم قطر بزرگ بیضی): طبق ویژگی بازتابی و هندسی خط مماس بر بیضی، خط مماس در هر نقطه D از بیضی، $\frac{1}{2}$ نیمی از زاویه خارجی $\angle F'DF$ را تقسیم می‌کند. بنابراین در مثلث $\triangle F'DF$ ، خط مماس EG امتداد ضلع $F'F$ را در نقطه E قطع کرده و نقش نیمی از زاویه خارجی رأس D را ایفا می‌کند. طبق قضیه نیمی از زاویه:

$$\frac{EF'}{EF} = \frac{F'D}{FD}$$

از آنجا که نسبت تشابه $\frac{EF'}{EF} = \frac{1}{3}$ است:

$$\frac{2.5}{FD} = \frac{1}{3} \Rightarrow FD = 3 \times 2.5 = 7.5$$

طبق تعریف بنیادی و هندسی بیضی، مجموع فواصل هر نقطه مانند D روی بیضی از دو کانون برابر با قطر بزرگ $(2a)$

است:

$$2a = F'D + FD = 2.5 + 7.5 = 10 \implies a = 5$$

۳. محاسبه خروج از مرکز (e):

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4.5}{5} = \frac{9}{10}$$

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{9}{10}$ است. گزینه «۴» صحیح است.

سؤال ۳۶ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - نظریه اعداد و فاکتوریل)

اگر $A = 0! + 1! + 2! + 3! + \dots + 600!$ باشد، باقیمانده تقسیم عدد $\frac{A+2!}{3!}$ بر عدد ۸، کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

پاسخ تشریحی و راه حل همنهشتی

به ازای هر $n \geq 4$ ، جمله $n!$ مضرب ۲۴ است؛ بنابراین جملات از $4!$ به بعد را به فرم $24k$ می‌نویسیم:

$$A = 0! + 1! + 2! + 3! + 24k = 1 + 1 + 2 + 6 + 24k = 10 + 24k$$

حال عبارت مورد نظر را بازنویسی و ساده می‌کنیم:

$$B = \frac{A+2!}{3!} = \frac{10+24k+2}{6} = \frac{12+24k}{6} = 2+4k$$

برای یافتن باقیمانده B بر ۸، باید زوجیت k را بررسی کنیم:

$$k = \frac{4! + 5! + \dots + 600!}{24} = 1 + 5 + 30 + \dots$$

در مجموع، k همواره زوج است ($k \equiv 0 \pmod{2}$). بنابراین:

$$4k \equiv 0 \pmod{8} \implies B = 2 + 4k \equiv 2 \pmod{8}$$

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

باقیمانده برابر ۲ است. گزینه «۴» صحیح است.

سؤال ۳۷ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - معادلات سیال)

آزمون ورودی مؤسسه‌ای شامل ۲۵ سؤال زبان انگلیسی و ۲۰ سؤال ریاضی است و پاسخ کاملاً درست به هر سؤال زبان انگلیسی ۷ امتیاز و هر سؤال ریاضی ۱۲ امتیاز دارد و پاسخ ناقص بدون امتیاز است. اگر آخرین داوطلب پذیرفته شده ۲۹۷ امتیاز کسب کرده باشد، او در مجموع به چند سؤال پاسخ کاملاً درست داده است؟

26 (۴

31 (۳

36 (۲

41 (۱

پاسخ تشریحی و راه حل

فرض کنید تعداد پاسخ‌های درست زبان x و ریاضی y باشد:

$$7x + 12y = 297 \quad (0 \leq x \leq 25, \quad 0 \leq y \leq 20)$$

معادله را در پیمانه ۷ حل می‌کنیم:

$$12y \equiv 297 \pmod{7} \implies 5y \equiv 3 \pmod{7} \implies 15y \equiv 9 \pmod{7} \implies y \equiv 2 \pmod{7}$$

مقادیر ممکن برای y :

- $y = 2 \implies 7x = 297 - 24 = 273 \implies x = 39 > 25$ (غیرقابل قبول).
- $y = 9 \implies 7x = 297 - 108 = 189 \implies x = 27 > 25$ (غیرقابل قبول).
- $y = 16 \implies 7x = 297 - 192 = 105 \implies x = 15 \leq 25$ (قابل قبول).

تعداد کل پاسخ‌های صحیح:

$$x + y = 15 + 16 = 31$$

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

گزینه «۳» صحیح است.

سؤال ۳۸ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - بخش پذیری)

چند عدد چهار رقمی با ارقام ۳، ۴ و ۶ می‌توان نوشت که بر ۶ بخش پذیر باشند؟

۲۳ (۴)

۱۹ (۳)

۱۵ (۲)

۱۳ (۱)

پاسخ تشریحی و راه حل

عددی بر ۶ بخش پذیر است که هم زوج باشد (رقم یکان ۴ یا ۶) و هم مجموع ارقام آن بر ۳ بخش پذیر باشد:

• در پیمانه ۳ داریم: $3 \equiv 0$ ، $6 \equiv 0$ و $4 \equiv 1$.

• حالت اول (یکان برابر ۶): رقم یکان مضرب ۳ است، پس مجموع سه رقم اول نیز باید مضرب ۳ باشد. این حالت شامل اعدادی بدون رقم ۴ (= حالت) و عدد با سه رقم ۴ (حالت) است که مجموعاً ۹ حالت می‌شود.

• حالت دوم (یکان برابر ۴): رقم یکان باقیمانده ۱ دارد، پس مجموع سه رقم اول باید باقیمانده ۲ داشته باشد که نیازمند وجود دقیقاً دو رقم ۴ و یک رقم از بین ۳ یا ۶ است ($6 = 2 \times 3$ حالت).

$$15 = 9 + 6 = \text{تعداد کل اعداد مطلوب}$$

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

تعداد اعداد برابر ۱۵ است. گزینه «۲» صحیح است.

سؤال ۳۹ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - مربع‌های لاتین متعامد)

بزرگ‌ترین عدد طبیعی n که دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n وجود ندارد، کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

پاسخ تشریحی و راه حل

طبق قضیهٔ اوایلر-تاری-پارکر:

- برای $n = 2$ هیچ جفت مربع لاتین متعامدی وجود ندارد.
- برای $n = 6$ (مسئلهٔ ۳۶ افسر اوایلر) هیچ جفت مربع لاتین متعامدی وجود ندارد.
- برای تمام مقادیر دیگر $n \geq 3$ ($n \neq 2, 6$) جفت متعامد وجود دارد.

بنابراین بزرگ‌ترین مرتبه فاقد جفت متعامد، $n = 6$ است.

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

گزینهٔ «۱» صحیح است.

سؤال ۴۰ (کنکور ریاضی ۱۴۰۵ - نظریه گراف)

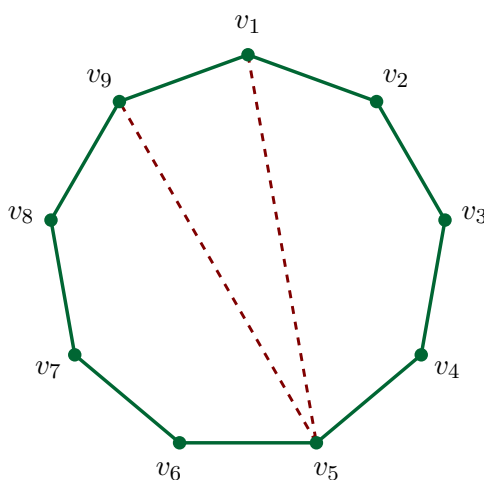
گراف ۹ رأسی G فقط دارای دورهایی به طول ۵، ۶، ۷ و ۹ است. تعداد دورهای به طول کدام عدد در گراف G بیشتر است؟

۵ (۴)

6 (۳)

7 (۲)

9 (۱)



پاسخ تشریحی و تحلیل ساختار دوری گراف

۱. ساختار گراف ۹ رأسی با دورهای مجاز $\{5, 6, 7, 9\}$: گراف G از یک دور فراگیر ۹ رأسی $C_9 = v_1v_2 \dots v_9v_1$ همراه با وترهای داخلی (مانند وترهای v_1v_5 و v_5v_9) تشکیل شده است که دورهای اولیه زیر را می‌سازند:

- دورهای به طول ۵: زیردورهای القایی پایه مانند $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_1$ و $v_5 - v_6 - v_7 - v_8 - v_9 - v_5$.
- دورهای به طول ۹: دور پیرامونی اصلی C_9 .

۲. تحلیل ترکیب مسیرها و شمارش دورها: دورهای ترکیبی با استفاده از پیوند مسیرهای دو طرف و ترها تشکیل می‌شوند:

- دورهای به طول ۶: از ترکیب مسیر ۵ یالی با وتر مقابل (مانند $v_1 - v_5 - v_6 - v_7 - v_8 - v_9 - v_1$ و $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_9 - v_1$) و ترکیب‌های متقارن ناشی از اشتراک و ترها حاصل می‌شوند. به دلیل تقارن داخلی و وجود مسیرهای مکمل ۴ و ۵ یالی در دو سمت و ترها، تعداد راه‌های بستن دور به طول ۶ بیش از سایر طول‌هاست.
- دورهای به طول ۷: حاصل ترکیب یگای مسیر ۶ یالی و یک وتر هستند و تنوع ترکیبی کمتری نسبت به دورهای ۶ دارند.

بنابراین در فضای دوری این گراف، تعداد دورهای به طول ۶ از بقیه دورها بیشتر است.

نتیجه‌گیری و پاسخ نهایی

تعداد دورهای به طول ۶ بیشترین است. گزینه «۳» صحیح است.