

۱۱۱- رأس سهمی $y = -8x^2 + ax + 1$ و صفرهای آن، رئوس مثلثی با مساحت $\frac{27}{64}$ است. اگر بخش بزرگ تری از مساحت

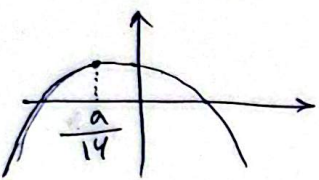
مثلث در ناحیه دوم باشد، مقدار a کدام است؟

$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ $\xrightarrow{-2\sqrt{2} \text{ (۴)}} |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{a^2 + 32}}{8}$ $\xrightarrow{2 \text{ (۳)}} S = \frac{1}{2} \frac{(a^2 + 32)^{\frac{3}{2}}}{32 \times 8} = \frac{27}{64}$

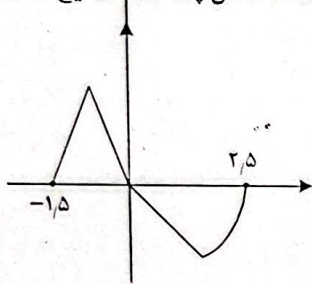
$y_R = -\frac{a^2}{32} + \frac{a^2}{16} + 1 = \frac{a^2}{32} + 1$ $\rightarrow S = \frac{1}{2} \frac{(a^2 + 32)^{\frac{3}{2}}}{32 \times 8} = \frac{27}{64}$

$(a^2 + 32)^{\frac{3}{2}} = 27 \times 8 \Rightarrow a^2 + 32 = 34$
 $a = \pm 2$

$a < 0$ ✓



۱۱۲- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده و $g(x) = -f(x + \frac{1}{2})$ است. اگر $h = \frac{f}{g}$ باشد، دامنه h شامل چند عدد صحیح است؟



$D_f = [-1.5, 2.5]$

$D_g = [-2, 2]$

$D_h = (D_f \cap D_g) - (g=0) = [-1.5, 2]$

$g = -f(x + \frac{1}{2}) = 0 \rightarrow x = -2, 2, -\frac{1}{2}$

- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳) ✓
۴ (۴)

$[-1.5, 2]$ ✓

۱۱۳- هر کدام از ریشه‌های معادله‌ای $x^2 + 1.35x - 1.3 = 0$ واحد از یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + 1.35x - 1.3 = 0$ کمتر است. حاصل ضرب

ریشه‌های آن معادله کدام است؟

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -1.35$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -1.3$

معادله: $x_1 - 0.5$, $x_2 - 0.5 \rightarrow P = x_1 x_2 - 0.5(x_1 + x_2) + 0.25 = -1.05 + 0.675 = -0.375$

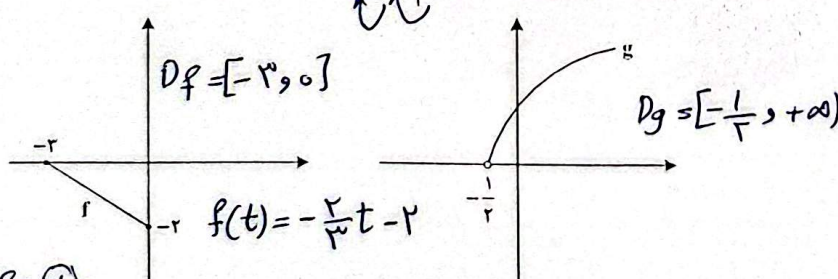
-1.375 (۴)

-1.3 (۳)

-0.3 (۲)

-0.375 (۱) ✓

۱۱۴- نمودارهای توابع f و g به صورت زیر رسم شده‌اند. اگر بازه I ، دامنه $\text{gof}(\frac{x}{2})$ باشد، طول بازه I کدام است؟



- ۰.۵ (۱)
۱ (۲)
۱.۵ (۳) ✓
۲ (۴)

$\text{gof}(\frac{x}{2})$
 $-3 \leq \frac{x}{2} \leq 0 \rightarrow -4 \leq x \leq 0$

$f(\frac{x}{2}) > -\frac{1}{2} \rightarrow f(\frac{x}{2}) = -\frac{x}{3} - 2 > -\frac{1}{2} \rightarrow \frac{x}{3} < -\frac{3}{2} \rightarrow x < -\frac{9}{2}$

۱۱۵- اگر $\sqrt{\tan x} - \sqrt{\cot x} = \frac{2}{\sqrt{v}}$ و x در ربع سوم باشد، حاصل $\sin x - \cos x$ کدام است؟

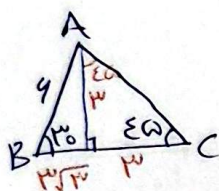
$$a - \frac{1}{a} = \frac{2}{\sqrt{v}} \xrightarrow{\text{تکثیر}} a^2 + \frac{1}{a^2} = \frac{11}{v} \rightarrow \tan x + \cot x = \frac{11}{v} \rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{11}{v}$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x = \frac{v}{11} \rightarrow \sin x - \cos x = \pm \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{11}}$$

$$\sqrt{\tan x} - \sqrt{\cot x} > 0 \rightarrow \tan x > \cot x \rightarrow \tan x > 1 \mid x > \pi + \frac{\pi}{4}$$


 $\sin x < \cos x < 0$

۱۱۶- در مثلث ABC اندازه زوایای $\hat{A}CB$ و $\hat{ABC}$ به ترتیب ۴۵ و ۳۰ درجه است. اگر $AB = 6$ باشد، طول ضلع BC کدام است؟



$4(1 + \sqrt{3})$ (۴)

$4(1 + \sqrt{2})$ (۳)

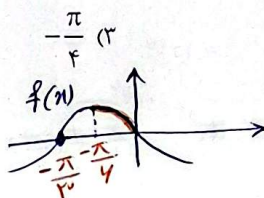
$2(1 + \sqrt{3})$ (۲) ✓

$2(1 + \sqrt{2})$ (۱)

۱۱۷- تابع $f(x) = -\frac{1}{2} \cos(\frac{3\pi}{2} + 3x)$ روی بازه $[a, 0]$ اکیدا نزولی است. کمترین مقدار a کدام است؟

$$f(x) = -\frac{1}{2} \sin(3x)$$

$$T = \frac{2\pi}{3}$$

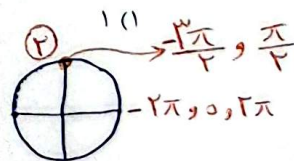


$-\frac{\pi}{8}$ (۲)

$-\frac{\pi}{12}$ (۱)

۱۱۸- تعداد جواب‌های معادله $\sin(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{2} + x) + 1 = 2 \sin(\pi - x)$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ کدام است؟

$$\sin^2 x + 1 = 2 \sin x \rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0 \rightarrow \sin x = 1$$



10 رو:

$$1 - \log_{\frac{1}{\varepsilon}} 10 = 1 - \frac{1}{0.14} = -\frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{14} = 2.5$$

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1 - \log_{\frac{1}{\varepsilon}} 10} = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1 - (-1)} = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 = \frac{10}{\varepsilon} = \frac{10}{2.5} = 4$$

حاصل $1 - \log_{\frac{1}{\varepsilon}} 10$ کدام است؟

۱۲۰- اگر اعداد a و b به داده‌های زیر اضافه شوند، چارک اول و سوم داده‌ها تغییر نمی‌کند. میانگین a و b کدام است؟

۴۵، ۱۲، ۱۵، ۲۳، ۱۴، ۱۶، ۳۴، ۱۸، ۴۲، ۲۵، ۱۰

$$10, 12, 14, 15, 16, 18, 23, 25, 34, 42, 45$$

Q_1 Q_2 Q_3

$$Q_1 = \frac{C_3 + C_4}{2} = 14$$

$$Q_2 = \frac{C_{10} + C_{11}}{2} = 34$$

$$a = 14, b = 34$$

۱۲۱- نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x+a}$ در دو نقطه نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند. اگر اختلاف طول این نقاط $2\sqrt{10}$ باشد.

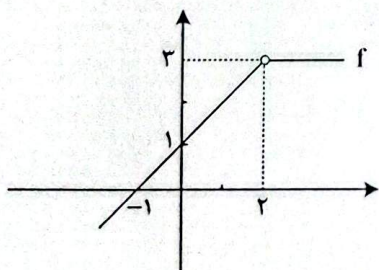
$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

کدام مورد می‌تواند مقدار a باشد؟ ($a \neq 0$)

$$f = f^{-1} \xrightarrow{f(x)=\frac{1}{x+a}} f(a) = \frac{1}{a+a} = \frac{1}{2a} = x \rightarrow x^2 + ax - 1 = 0 \rightarrow \sqrt{a^2 + 4} = 2\sqrt{10}$$

$$a^2 + 4 = 40$$

$$a = \pm 4$$

۱۲۲- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3-f(x)}{x^2-4}$ کدام است؟

$$\frac{3 - f(2)}{2^2 - 4} = \frac{0}{0} \quad (H)$$

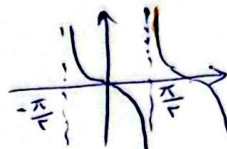
$$f(x) = x+1; x < 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3 - x - 1}{x^2 - 4} = \frac{0}{0}$$

$$(H) \rightarrow \frac{-1}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{4} \quad (1) \\ &-\frac{1}{2} \quad (2) \\ &-\frac{1}{5} \quad (3) \\ &-\frac{1}{3} \quad (4) \end{aligned}$$

۱۲۳- اگر $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x-|x||}{x^2+2x} = a$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \tan(x)$ کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x-|x||}{x^2+2x} = a \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{x^2+2x} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{صفر (۲)} \rightarrow \frac{-2}{2x+2} = \boxed{-1 = a}$$



۱۲۴- تابع f با ضابطه $f(x) = 1 + \frac{2x}{a}$ است. اگر تابع $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq -1 \\ f^{-1}(x) & x < -1 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد و محور x ها را در

سمت مثبت محور قطع کند، مقدار $g(-1)$ کدام است؟

$$f(x) : x \rightarrow x \frac{2}{a} \rightarrow +1 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-1) \frac{a}{2}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2x}{a} + 1 & x \geq -1 \\ \frac{ax}{2} - \frac{a}{2} & x < -1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{2}{a} + 1 = -a \rightarrow a = -1 \text{ یا } a = -2$$

$$g(-1) = f(-1) = -(-1) + 1 = 2$$

۱۲۵- اختلاف شیب نیم مماس های چپ و راست بر منحنی $y = |x^2 - 4|$ در $x = 2$ کدام است؟

$$x \rightarrow 2^- : y = -x^2 + 4 \rightarrow y'_2 = -2x = -4$$

$$x \rightarrow 2^+ : y = x^2 - 4 \rightarrow y'_2 = 2x = 4$$

۱۲۶- یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \frac{9t+3}{\sqrt{t}}$ گرم است. آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه

$$m(t) = 9\sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}}$$

$$m'(t) = \frac{9}{2\sqrt{t}} - \frac{3}{2} t^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow m'(1) = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3$$

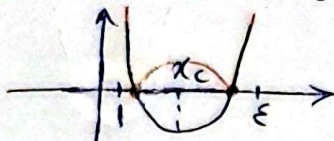
۱۲۷- برای چند مقدار طبیعی a ، تابع $f(x) = |2x^2 - 9x + a|$ در بازه $[1, 4]$ دارای دو مینیمم نسبی است؟

۲ (۱)

۳ (۲) ✓

۴ (۳)

۵ (۴)



$$g(x) = 2x^2 - 9x + a$$

$$x_c = \frac{9}{4}$$

$$\begin{cases} g(x_c) < 0 \rightarrow \frac{81}{8} - \frac{81}{4} + a < 0 \rightarrow a < \frac{81}{8} = 10.125 \\ g(1) > 0 \rightarrow -7 + a > 0 \rightarrow a > 7 \\ g(4) > 0 \rightarrow -20 + a > 0 \rightarrow a > 20 \end{cases}$$

$$a > 7 \text{ and } a > 20 \rightarrow a > 20$$

$$a < \frac{81}{8} \rightarrow a < 10.125$$

۱۲۸- خطی در نقطه (a, a) بر نمودار تابع $y = \sqrt{2-x}$ مماس شده و محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند.

مساحت مثلث OAB کدام است؟

۴,۵ (۱)

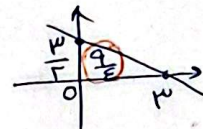
۳,۵ (۲)

۲,۲۵ (۳) ✓

۱,۷۵ (۴)

$$y = \sqrt{2-x} \rightarrow a = \sqrt{2-a} \rightarrow a = 1$$

$$y' = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} \xrightarrow{x=1} m = -\frac{1}{2} \text{ و } (1, 1) \Rightarrow h = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$



۱۲۹- یک رأس مستطیلی واقع بر منحنی $y = 4x^2 - 12x + 9$ بوده و سه رأس دیگر، روی محورهای مختصات است. اگر

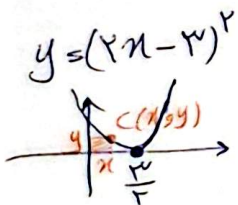
این مستطیل بین محورها و نمودار منحنی محاط باشد، بیشترین مساحت این مستطیل کدام است؟

۲ (۱)

۳ (۲)

۲√۲ (۳)

۳√۲ (۴)



$$S = xy = x(4x^2 - 12x + 9) \xrightarrow{S'=0} 12x^2 - 24x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ or } x = \frac{3}{2}$$

$$3(2x-3)(2x-1) = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \rightarrow y = 9 \Rightarrow S = 4.5$$

۱۳۰- ۷ نفر در خط شروع یک مسابقه ایستاده‌اند. به چند طریق ممکن است ۳ نفری که اشتباه در خط شروع ایستاده‌اند،

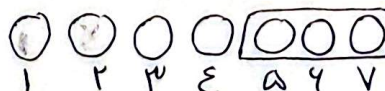
مجاور هم باشند؟

۴۲ (۱)

۳۵ (۲)

۱۲ (۳)

۱۰ (۴) ✓



$$\begin{matrix} 1, 2, 3 \\ 2, 3, 4 \\ 3, 4, 5 \\ 4, 5, 6 \\ 5, 6, 7 \end{matrix} \rightarrow \text{حالت‌ها} \rightarrow 10$$

۱۳۱- دو دانش آموز، هر کدام تابلوهایی با شماره‌های ۱ تا ۸ در اختیار دارند. هر کدام به تصادف یک تابلو را انتخاب کرده و به هم نشان می‌دهند. اگر عدد روی تابلوی یکی، مضرب دیگری باشد، هر دو برنده جایزه می‌شوند. چند درصد احتمال دارد که آنها برنده شوند؟

۷۲٫۵ (۴)

۵۰ (۲) ✓

۶۲٫۵ (۲)

۴۰ (۱)

$$n(S) = 8 \times 8 = 64$$

حالت‌ها: $(1,1), (2,2), \dots, (8,8) : 8$ حالت
 عدد ۱ با ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ : $7 \times 1 = 7$ حالت
 عدد ۲ با ۲، ۴، ۶، ۸ : $3 \times 2 = 6$ حالت
 عدد ۳ با ۳، ۶ : $1 \times 2 = 2$ حالت
 عدد ۴ با ۴ : $1 \times 1 = 1$ حالت

$$\Rightarrow 32 \text{ حالت}$$

$$P = \frac{32}{64} \times 100 = 50\%$$

۱۳۲- هر یک از اعداد ۱ تا ۹ روی یک کارت نوشته شده است. سه کارت به تصادف انتخاب می‌شود. با کدام احتمال هر سه

عدد روی کارت فرد هستند به طوری که می‌دانیم مجموع آنها نیز فرد است؟

$$\{2, 4, 6, 8\}$$

$$\{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$\frac{1}{5} (۴)$$

$$\frac{1}{3} (۲)$$

$$\frac{1}{4} (۲) \checkmark$$

$$\frac{1}{2} (۱)$$

(یک فرد و دو زوج) یا (هر سه فرد باشد) = مجموع فرد

$$\hookrightarrow \binom{5}{3} = 10 \quad \hookrightarrow \binom{5}{1} \times \binom{4}{2} = 30$$

$$\frac{10}{10+30} = \frac{1}{4}$$

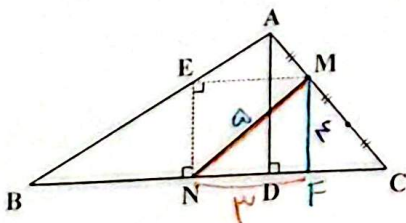
۱۳۳- در شکل زیر، $AD=6$ و $BC=9$ است. طول MN چقدر است؟

$$3,5\sqrt{2} (۱)$$

$$2\sqrt{2} (۲)$$

$$4,5 (۳)$$

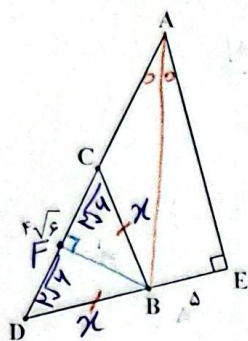
$$5 (۴) \checkmark$$



$$\triangle ADC : \frac{CM}{CA} = \frac{MF}{AD} = \frac{1}{3} \rightarrow MF = 2$$

$$EM \parallel BC : \triangle ABC : \frac{ME}{BC} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{3} \rightarrow ME = 3 \Rightarrow ME = NF = 3$$

۱۳۴- در شکل زیر، $BC = BD$ و B روی نیمساز زاویه A قرار دارد. طول BD چند برابر طول ارتفاع وارد بر DC است؟



$$BF = BE = \omega$$

$$1,2 \quad (1)$$

$$1,2 \quad (2)$$

$$1,4 \quad (3)$$

$$1,5 \quad (4)$$

$$(BF)^2 + (\sqrt{2})^2 = x^2 \rightarrow \boxed{x = \sqrt{2}}$$

$$\frac{BD}{BF} = \frac{\sqrt{2}}{\omega} = 1,4$$

۱۳۵- قطرهای یک بیضی روی خطوط $y = x + 3$ و $ay - 2x = -2$ قرار دارند. اگر مرکز بیضی و محل برخورد قطرهای

بیضی با محور x ها، رئوس یک مثلث باشند، مساحت این مثلث کدام است؟

$$y = x + 3 \quad 2,5 \quad (4)$$

$$y = \frac{2x}{a} - \frac{2}{a} = -x + 1 \quad 4,5 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

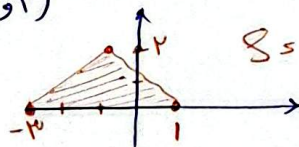
$$y \leq 0 \quad 4 \quad (1)$$

$$m_1 \perp m_2 \Rightarrow \frac{y}{a} = -1 \Rightarrow a = -2$$

$$x + 3 = -x + 1 \Rightarrow x = -1, y = 2 \Rightarrow O(-1, 2)$$

$$-x + 1 = 0 \rightarrow A(1, 0)$$

$$x + 3 = 0 \rightarrow B(-3, 0)$$



$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

۱۳۶- در نقطه‌ای واقع در ناحیه چهارم، دایره C به مرکز (α, α) و شعاع ۴ با دایره $x^2 + y^2 - 2x - y = 1$ مماس درون است.

فاصله مرکز دایره C از مبدأ مختصات کدام است؟

$$2,5\sqrt{2} \quad (4)$$

$$2\sqrt{2} \quad (3)$$

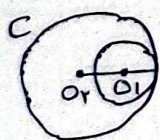
$$0,5\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{2} \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 - 2x - y = 1 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} \rightarrow O_1 = (1, \frac{1}{2}), R_1 = \frac{3}{2}$$

$$O_2 = (\alpha, \alpha), R_2 = 4 \rightarrow O_2 = (-1, -1)$$

$$\boxed{D = \sqrt{2}}$$



$$d = |R_2 - R_1| = 2,5$$

$$d^2 = (\alpha-1)^2 + (\alpha-\frac{1}{2})^2 = 2,5^2 \rightarrow 2\alpha^2 - 3\alpha - 5 = 0 \rightarrow \alpha = -1, 2,5$$

۱۳۷- به ازای چند مقدار طبیعی a ، عدد $\frac{1}{5}$ در بازه $\left[\frac{1}{3a+1}, \frac{1}{2a-3}\right)$ قرار دارد؟

$$\frac{1}{3a+1} \leq \frac{1}{5} < \frac{1}{2a-3} \quad \begin{matrix} 4(4) \\ 3(3) \\ 2(2) \end{matrix}$$

$$2a-3 < 5 \Rightarrow a < 4$$

$$3a+1 \geq 5 \Rightarrow a \geq \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3} \leq a < 4 \Rightarrow (2, 3)$$

۱۳۸- میانگین جملات دنباله حسابی $a, 12, b, c, \dots, 172$ برابر ۸۷ است. مجموع جملات این دنباله کدام است؟

۱۶۵۳ (۴)

۱۵۶۶ (۳)

۱۴۷۹ (۲)

۱۳۹۲ (۱)

$$\frac{a+172}{2} = 87 \Rightarrow a = 2$$

$$24 = a+b \Rightarrow b = 22$$

$$n = \frac{172-2}{10} + 1 = 18$$

$$S = \frac{18}{2} [2+172] = 9 \times 174$$

۱۳۹- اگر -2 یکی از ریشه‌های معادله $x(3x^2+x+a)=-2$ باشد، حاصل ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟

 $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{2}{4}$ (۱)

$$x_1 = -2 : -2(12-2+a) = -2 \Rightarrow a = -9$$

$$3x^3 + x^2 - 9x + 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(3x^2 - 5x + 1) = 0$$

$$p = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$$

۱۴۰- اگر $a + \sqrt{b} - c = 6$ و $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$ باشد، حاصل $\log_2 c$ کدام است؟

 -2 (۴) -1 (۳) 1 (۲) 2 (۱)

$$a + \sqrt{b} = 4 + c \Rightarrow \sqrt{4+c} + \sqrt{c} = 3 \xrightarrow[\text{بالاترین درجه}]{\text{حین زدن}} c = \frac{1}{4} \Rightarrow \log_2 \frac{1}{4} = -2$$

(محمد عباس زاده - دانشجوی مهندسی بروی دانشگاه تهران)