

۱۱۱- رأس سهمی $y = -8x^2 + ax + 1$ و صفرهای آن، رئوس مثلثی با مساحت $\frac{27}{64}$ است. اگر بخش بزرگ تری از مساحت

مثلث در ناحیه دوم باشد، مقدار a کدام است؟

$-4\sqrt{2}$ (۴)

۲ (۳)

$4\sqrt{2}$ (۲)

-2 (۱) ✓

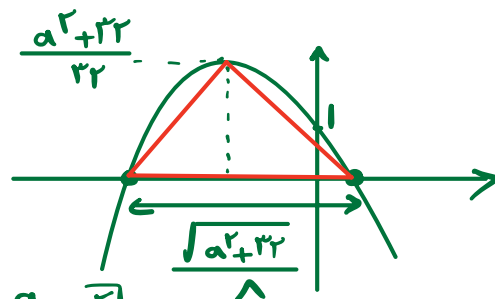
$$x_s = \frac{-a}{-16} = \frac{a}{16} \Rightarrow y_s = -8\left(\frac{a}{16}\right)^2 + a\left(\frac{a}{16}\right) + 1 = \frac{-a^2}{32} + \frac{a^2}{16} + 1 = \frac{a^2 + 32}{32}$$

$$\text{تفاضل ریشه‌ها} = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{a^2 + 32}}{8}$$

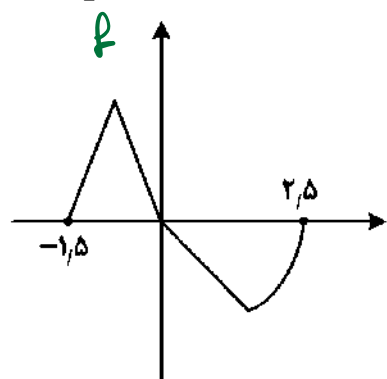
$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{a^2 + 32}{32}\right) \times \left(\frac{\sqrt{a^2 + 32}}{8}\right) = \frac{27}{64} \Rightarrow$$

$$(a^2 + 32)\sqrt{a^2 + 32} = 27 \times 8 \Rightarrow a^2 + 32 = 24 \Rightarrow a^2 = -8 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow a = -2\sqrt{2}$$

ریشه‌های x باید منفی شود.



۱۱۲- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده و $g(x) = -f(x + \frac{1}{4})$ است. اگر $h = \frac{f}{g}$ باشد، دامنه h شامل چند عدد صحیح است؟



$$h = \frac{f(x)}{-f(x + \frac{1}{4})} \Rightarrow \text{دامنه} = (-2, 2) - \{-1.5\}$$

$$\Rightarrow \text{دامنه} = (-2, 2) - \{-1.5\}$$

$$\Rightarrow \text{دامنه} = (-2, 2) - \{-1.5\} \Rightarrow \text{دامنه} = (-1.5, 2) \Rightarrow \text{دامنه} = \{-1, 0, 1\}$$

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳) ✓

۴ (۴)

$$D_g \Rightarrow -1.5 < x + \frac{1}{4} < 2.5 \Rightarrow -0.5 < x < 2 \Rightarrow (-2, 2) - \{-1.5\}$$

$$\text{حداکثر} \Rightarrow f(x + \frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \\ x + \frac{1}{4} = 2.5 \Rightarrow x = 2 \\ x + \frac{1}{4} = -1.5 \Rightarrow x = -1.75 \end{cases}$$

۱۱۳- هر کدام از ریشه‌های معادله‌ای $0.5x^2 + 1.35x - 1.3 = 0$ واحد از یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + 1.35x - 1.3 = 0$ کمتر است. حاصل ضرب

ریشه‌های آن معادله کدام است؟

-1.375 (۴)

-1.3 (۳)

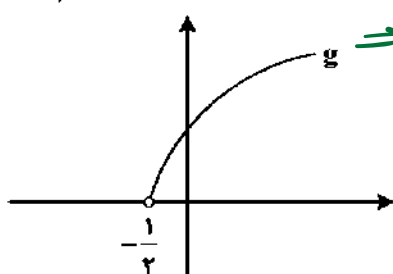
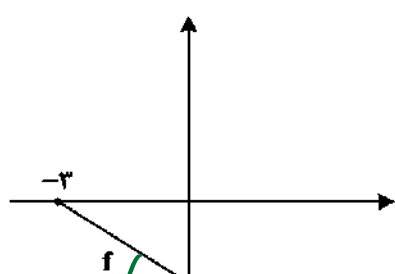
-0.3 (۲)

-0.375 (۱) ✓

$\alpha, \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = S = -1.35 \\ \alpha\beta = P = -1.3 \end{cases}$ ریشه‌های معادله

$\alpha', \beta' \Rightarrow \begin{cases} \alpha' = \alpha - 0.5 \\ \beta' = \beta - 0.5 \end{cases} \Rightarrow P' = (\alpha - 0.5)(\beta - 0.5) = \alpha\beta - 0.5(\alpha + \beta) + 0.25 = -1.3 - 0.5(-1.35) + 0.25 = -0.375$

۱۱۴- نمودارهای توابع f و g به صورت زیر رسم شده‌اند. اگر بازه I دامنه $\text{gof}(\frac{1}{4}x)$ باشد، طول بازه I کدام است؟



$D_g = x > -\frac{1}{4}$

0.5 (۱)

1 (۲)

1.5 (۳) ✓

3 (۴)

$f(x) = -\frac{2}{3}x - 2, D_f = [-3, 0] \Rightarrow f(\frac{x}{4}) = -\frac{x}{6} - 2, D = [-6, 0]$

$\text{طول بازه} = -6.5 + 2 = 4.5$

$D_{g \circ f(\frac{1}{4}x)} = \{x \in D_{f(\frac{1}{4}x)} \mid f(\frac{1}{4}x) \in D_g\} \Rightarrow D \cap D_g \Rightarrow [-6, -6.5]$

$[-6, 0] \xrightarrow{-\frac{x}{6} - 2 > -\frac{1}{4}} -\frac{x}{6} > \frac{15}{4} \Rightarrow x < -\frac{9}{2}$

۱۱۵- اگر $\sqrt{\tan x} - \sqrt{\cot x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ و x در ربع سوم باشد، حاصل $\sin x - \cos x$ کدام است؟

$-\frac{1}{3}\sqrt{2}$ (۴) ✓

$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (۳)

$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (۲)

$\frac{1}{3}\sqrt{2}$ (۱)

$\sqrt{\tan x} - \sqrt{\cot x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{طرفین به توان ۲} \Rightarrow \tan x + \cot x - 2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan x + \cot x = \frac{10}{3}$

$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{3}{10}$

$\sin x - \cos x = t \Rightarrow \text{طرفین به توان ۲} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = t^2 \Rightarrow 1 - \frac{6}{5} = t^2$

$\Rightarrow t = \pm \frac{\sqrt{4}}{5} \Rightarrow t = -\frac{2}{5}$ در نایب سوم جایی که $\tan$ از $\cot$ بیشتر و بزرگتر از 45° ترکیب ریشه در این قسمت $\sin$ از $\cos$ بزرگتر است

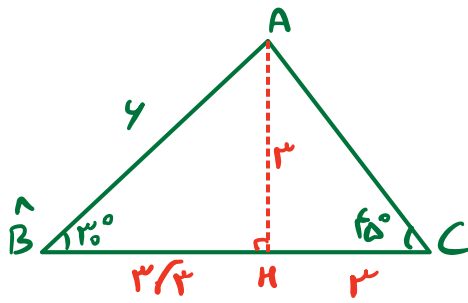
۱۱۶- در مثلث ABC اندازه زوایای $\hat{A}CB$ و $\hat{ABC}$ به ترتیب ۴۵ و ۳۰ درجه است. اگر $AB = 6$ باشد، طول ضلع BC کدام است؟

۴(۱+√۳) (۴)

۴(۱+√۲) (۳)

۳(۱+√۳) (۲✓)

۳(۱+√۲) (۱)



$$\sin \hat{B} = \frac{1}{2} = \frac{AH}{6} \Rightarrow AH = 3$$

$$\Rightarrow \tan \hat{B} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AH}{BH} \Rightarrow BH = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan \hat{C} = 1 \Rightarrow \frac{AH}{HC} = 1 \Rightarrow HC = 3$$

$$3\sqrt{3} + 3 = 3(\sqrt{3} + 1)$$

۱۱۷- تابع $f(x) = -\frac{1}{2} \cos(\frac{3\pi}{2} + 3x)$ روی بازه $[a, 0]$ اکیداً نزولی است. کمترین مقدار a کدام است؟

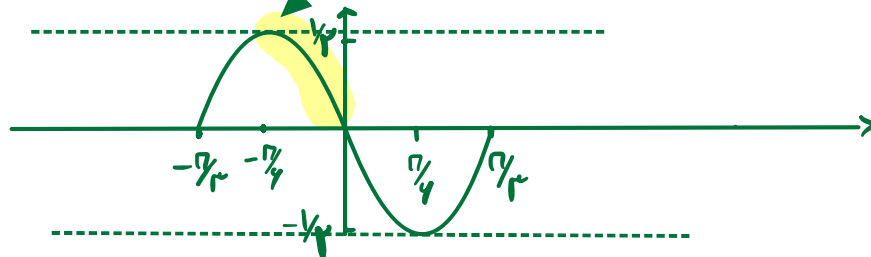
$-\frac{\pi}{6}$ (۴✓)

$-\frac{\pi}{4}$ (۳)

$-\frac{\pi}{8}$ (۲)

$-\frac{\pi}{12}$ (۱)

$$f(x) = -\frac{1}{2} \sin(3x)$$



۱۱۸- تعداد جواب‌های معادله $\sin(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{2} + x) + 1 = 2 \sin(\pi - x)$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ کدام است؟

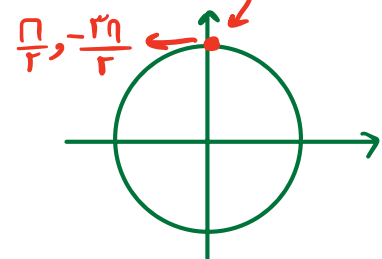
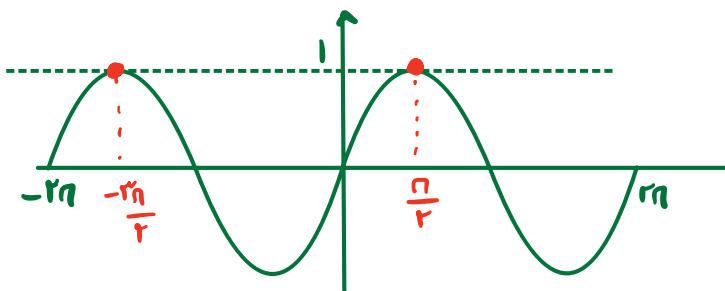
۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲✓)

۱ (۱)

$$\sin^2 x - \sin x + 1 = 2 \sin x \Rightarrow \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin x = 1$$



۰,۰۵ (۴)

۰,۲۵ (۳)

۰,۵ (۲)

۲,۵ (۱) ✓

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{1-\log_f 10} = \left(\frac{1}{f}\right)^{\log_f f - \log_f 10} = f^{\log_f 10 - 1} = f^{\log_f 10} \cdot f^{-1} = \frac{10}{f} = \frac{10}{2} = 5$$

۱۲۰ - اگر اعداد a و b به داده‌های زیر اضافه شوند، چارک اول و سوم داده‌ها تغییر نمی‌کند. میانگین a و b کدام است؟

۴۵, ۱۲, ۱۵, ۲۳, ۱۴, ۱۶, ۳۴, ۱۸, ۴۲, ۲۵, ۱۰

۲۰ (۴)

۲۴ (۳) ✓

۲۸ (۲)

۳۰ (۱)

۱۰ ۱۲ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۸ ۲۳ ۲۵ ۲۴ ۴۲ ۴۵

Q_1 Q_3

$$a = Q_1 = 14$$

$$b = Q_3 = 24$$

برای این چارک‌ها در رسم تفسیری ننگه آ داده جدید دقیقاً با چارک‌ها باید برابر باشند.

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{14+24}{2} = 19$$

۱۲۱ - نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x+a}$ در دو نقطه نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند. اگر اختلاف طول این نقاط $2\sqrt{10}$ باشد،کدام مورد می‌تواند مقدار a باشد؟ ($a \neq 0$)

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲) ✓

۲ (۱)

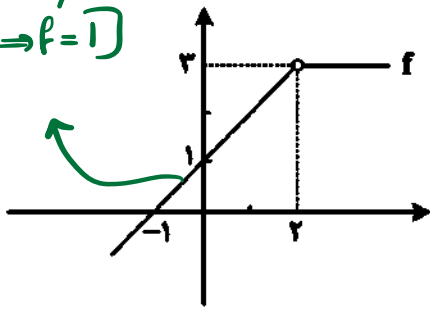
$$f(x) = \frac{1}{x+a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-ax+1}{x} \Rightarrow f = f^{-1} \Rightarrow \frac{1}{x+a} = \frac{-ax+1}{x} \Rightarrow x = -ax^2 - ax + x + a$$

$$ax^2 - ax - a = 0 \Rightarrow \div a \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \text{اختلاف} = \sqrt{\Delta} = \sqrt{a^2 + 4} = 2\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow a^2 + 4 = 40 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = \pm 6$$

۱۲۲- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ کدام است؟

$f = x+1 \Rightarrow f' = 1$



- $-\frac{1}{4}$ (۱) ✓
- $-\frac{1}{2}$ (۲)
- $-\frac{1}{5}$ (۳)
- $-\frac{1}{3}$ (۴)

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \Rightarrow \text{HOP} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-f'(x)}{1} = -f'(2) = -1 \Rightarrow \frac{1}{\epsilon}$$

۱۲۳- اگر $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x-|x||}{x^2+2x} = a$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(ax)$ کدام است؟

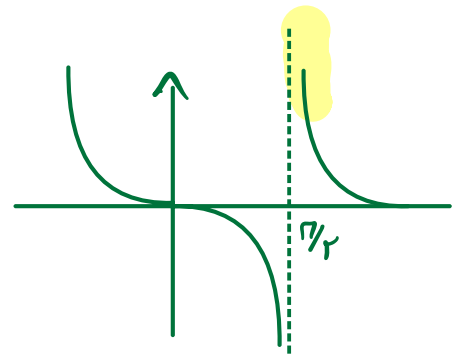
$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x-|x||}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{x+2} = -1 = a$

$-\infty$ (۳)

صفر (۲)

(۱)

$\tan(-\infty)$
 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$



۱۲۴- تابع f با ضابطه $f(x) = 1 + \frac{2x}{a}$ است. اگر تابع $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq -1 \\ f^{-1}(x) & x < -1 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد و محور x ها را در

سمت مثبت محور قطع کند، مقدار $g(-1)$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳) ✓

-۱ (۲)

-۴ (۱)

پیوستگی در نقطه شکست

$f^{-1}(x) = \frac{ax-a}{2} \Rightarrow g = \begin{cases} 1 + \frac{2x}{a} & x \geq -1 \\ \frac{ax-a}{2} & x < -1 \end{cases}$

$\Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \rightarrow \text{قق} \Rightarrow 1 + \frac{2x}{1} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ a_2 = -2 \rightarrow \text{قق} \Rightarrow 1 + \frac{2x}{-2} = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow g(-1) = 1 - x = 2$

۱۲۵- اختلاف شیب نیم‌مماس‌های چپ و راست بر منحنی $y = |x - 2|$ در $x = 2$ کدام است؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱) ✓

$$\Rightarrow \begin{cases} x^+ \rightarrow x^2 - 2 \Rightarrow 2x \Rightarrow 4 \\ x^- \rightarrow -x^2 + 4 \Rightarrow -2x \Rightarrow -4 \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف شیبها} = 4 + 4 = 8$$

۱۲۶- یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \frac{9t+3}{\sqrt{t}}$ گرم است. آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه

$t=1$ چند گرم است؟

۱/۵ (۴)

۳ (۳) ✓

۷/۵ (۲)

۱۷ (۱)

$$m'(t) = \frac{9(1/2) - \frac{1}{2\sqrt{t}}(9t+3)}{t} \Rightarrow m'(1) = 9 - 6 = 3$$

۱۲۷- برای چند مقدار طبیعی a تابع $f(x) = |2x^2 - 9x + a|$ در بازه $[1, 4]$ دارای دو مینیمم نسبی است؟

۵ (۴)

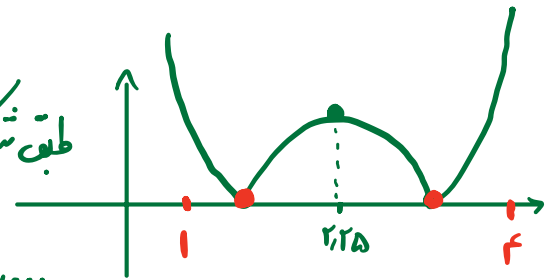
۴ (۳)

۳ (۲) ✓

۲ (۱)

$$f(x) = 2x^2 - 9x + a \Rightarrow x_5 = \frac{9}{4} = 2,25$$

طبق شکل برای این 2 تا $\min$ به باید ریشه‌های تابع f بین $1, 4$ باشد.



$$2x^2 - 9x + a = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 81 - 8a > 0 \Rightarrow 8a < 81 \Rightarrow a < 10,125, \dots$$

$$\textcircled{1} f(1) = 2 - 9 + a = -7 + a > 0 \Rightarrow a > 7 \rightarrow 8 \Rightarrow a = 8, 9, 10$$

$$\textcircled{2} f(4) = 32 - 36 + a = -4 + a > 0 \Rightarrow a > 4$$

این ۳ شرط طبق نمودار اعمال شده برای این ۳ ریشه‌ها بین $1, 4$ باشد طبق شکل باید $f(1), f(4)$ عدد مثبت باشند.

۱۲۸- خطی در نقطه (a, a) بر نمودار تابع $y = \sqrt{2-x}$ مماس شده و محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند.

مساحت مثلث OAB کدام است؟

۱٫۷۵ (۴)

۲٫۲۵ (۳✓)

۳٫۵ (۲)

۴٫۵ (۱)

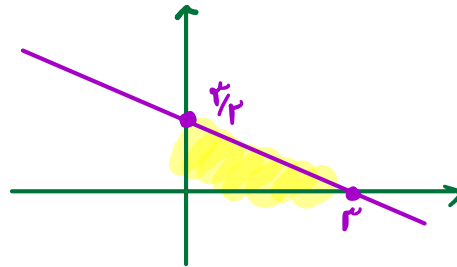
$$\Rightarrow y = mx + h \Rightarrow \text{نذر از } (a, a) \Rightarrow y = mx + a - ma$$

$$\Rightarrow y = mx + 1 - m$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{خارجی‌ها برابر} \Rightarrow a = \sqrt{2-a} \Rightarrow a^2 = 2-a \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = -2 \text{ یا } 1 \checkmark \\ \text{مشتق‌ها برابر} \Rightarrow m = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} \Rightarrow x = a = 1 \Rightarrow m = \frac{-1}{2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{خط} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{4} = 2,25$$



۱۲۹- یک رأس مستطیلی واقع بر منحنی $y = 4x^2 - 12x + 9$ بوده و سه رأس دیگر، روی محورهای مختصات است. اگر

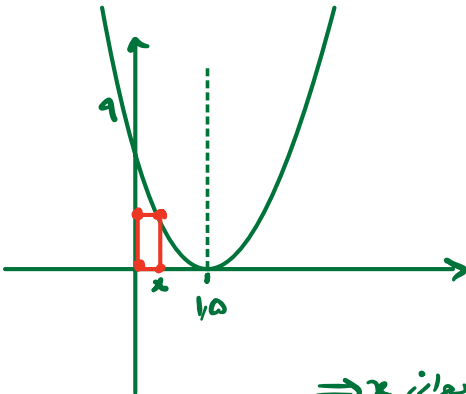
این مستطیل بین محورها و نمودار منحنی محاط باشد، بیشترین مساحت این مستطیل کدام است؟

$3\sqrt{2}$ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱✓)



$$y = 4x^2 - 12x + 9 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow (2x - 3)^2$$

$$\Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$S = \text{مساحت} = x \times (2x - 3)^2$$

$$\Rightarrow x \text{ بهمانی} = \frac{2x_0 + 1 \times \frac{3}{2}}{1+2} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times \left(2 \times \frac{1}{2} - 3\right)^2 = 2$$

۱۳۰- ۷ نفر در خط شروع یک مسابقه ایستاده‌اند. به چند طریق ممکن است ۳ نفری که اشتباه در خط شروع ایستاده‌اند،

مجاور هم باشند؟

۱۰ (۴✓)

۱۲ (۳)

۳۵ (۲)

۴۲ (۱)

تندیس: a, b, c, d, e, f, g

$$\boxed{a, b, c}, d, e, f, g \Rightarrow \binom{5}{3} = 10$$

۱۳۱- دو دانش آموز، هر کدام تابلوهایی با شماره‌های ۱ تا ۸ را اختیار دارند، هر کدام به تصادف یک تابلو را انتخاب کرده و به هم نشان می‌دهند. اگر عدد روی تابلوی یکی، مضرب دیگری باشد، هر دو برنده جایزه می‌شوند. چند درصد احتمال دارد که آنها برنده شوند؟

۷۲٫۵ (۴)

۵۰ (۳) ✓

۶۲٫۵ (۲)

۴۰ (۱)

تابلولر	تابلورم
۱	۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸ → ۸
۲	۱, ۲, ۴, ۶, ۸ → ۵
۳	۱, ۳, ۶ → ۳
۴	۱, ۲, ۴, ۸ → ۴
۵	۱, ۵ → ۲
۶	۱, ۲, ۳, ۶ → ۴
۷	۱, ۷ → ۲
۸	۱, ۲, ۴, ۸ → ۴

$$\frac{۳۲}{۸ \times ۸} = \frac{۱}{۲} = ۵۰\%$$

طرح‌حالت

۱۳۲- هر یک از اعداد ۱ تا ۹ روی یک کارت نوشته شده است. سه کارت به تصادف انتخاب می‌شود. با کدام احتمال هر سه عدد روی کارت فرد هستند به طوری که می‌دانیم مجموع آنها نیز فرد است؟

$\frac{۱}{۵}$ (۴)

$\frac{۱}{۳}$ (۳)

$\frac{۱}{۴}$ (۲) ✓

$\frac{۱}{۲}$ (۱)

فرد → ۱, ۳, ۵, ۷, ۹
زوج → ۲, ۴, ۶, ۸

$$[۴۰ = \text{هر ۳ فرد باشند یا یک فرد دو زوج باشند} \Rightarrow \text{مجموع ۳ کارت فرد} \Rightarrow \frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{۱۰}{۸۴} = \frac{۵}{۴۲}]$$

$$\frac{\text{هر ۳ فرد باشند}}{\text{مجموع ۳ کارت فرد}} = \frac{۱۰}{۴۰} = \frac{۱}{۴}]$$

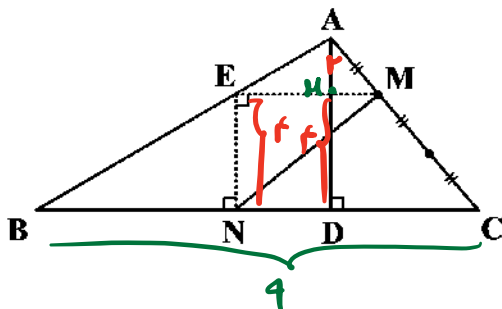
۱۳۳- در شکل زیر، $AD=۶$ و $BC=۹$ است. طول MN چقدر است؟

$۳٫۵\sqrt{۲}$ (۱)

$۳\sqrt{۲}$ (۲)

$۴٫۵$ (۳)

۵ (۴) ✓



$$\frac{AN}{AD} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow AN = ۲ \Rightarrow EN = ND = ۴]$$

$$\frac{EM}{BC} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow EM = ۳ \Rightarrow MN = EM + EN = ۳ + ۴ = ۷ \Rightarrow MN = ۷]$$

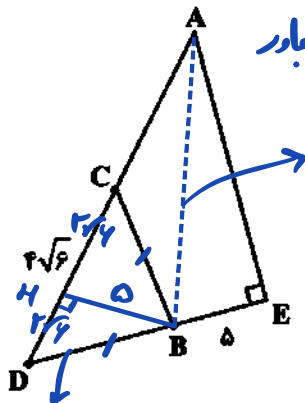
۱۳۴- در شکل زیر، $BC = BD$ و B روی نیمساز زاویه A قرار دارد. طول BD چند برابر طول ارتفاع وارد بر DC است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{1}{4}$ ✓

(۴) $\frac{1}{5}$



هر نقطه روی نیمساز زاویه اش تا اضلاع مجاور
بهم برابر است
 $BE = BD = 5$

$$BD^2 = BE^2 + ED^2 \Rightarrow BD^2 = 4^2 + ED^2 = 25 \Rightarrow BD = 5$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{5}{4}$$

در مثلث متساوی الساقین ارتفاع وارد بر
قاعده میانه هم هست.

۱۳۵- قطره‌های یک بیضی روی خطوط $y = x + 3$ و $ay - 2x = -2$ قرار دارند. اگر مرکز بیضی و محل برخورد قطره‌های بیضی با محور x ها، رئوس یک مثلث باشند، مساحت این مثلث کدام است؟

(۴) $\frac{3}{5}$

(۳) $\frac{4}{5}$

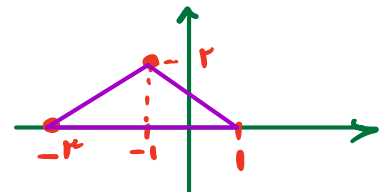
(۲) ۳

(۱) ۴ ✓

در بیضی قطره‌ها بر هم عمودند $\Rightarrow$ سبب خطها قرینه و متعامدند
 $y = x + 3 \Rightarrow y = -x - 3$
 $y = \frac{2}{a}x - \frac{2}{a} \Rightarrow y = -\frac{2}{a}x + \frac{2}{a}$

مرکز بیضی محل برخورد قطره‌ها بیضی
 $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Rightarrow x + 3 = -x + 1 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow O(-1, 2)$

$y = x + 3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -3$
 $y = -x + 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 1$
مساحت مثلث $= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 4$



۱۳۶- در نقطه‌ای واقع در ناحیه چهارم، دایره C به مرکز (α, α) و شعاع ۴ با دایره $x^2 + y^2 - 2x - y = 1$ مماس درون است. فاصله مرکز دایره C از مبدأ مختصات کدام است؟

(۴) $2.5\sqrt{2}$ ✓

(۳) $2\sqrt{2}$

(۲) $0.5\sqrt{2}$

(۱) $\sqrt{2}$

$$x^2 + y^2 - 2x - y - 1 = 0 \Rightarrow O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), R = \frac{1}{2}\sqrt{1+1+4} = \frac{3}{2}$$

$$R' = 4, O'(\alpha, \alpha) = (2.5, 2.5)$$

در این حالت دو دایره در ناحیه اول به هم
مماس درون می‌شوند.
به توان ۲ $\Rightarrow OO' = |R - R'| \Rightarrow \sqrt{(\alpha - \frac{1}{2})^2 + (\alpha - \frac{1}{2})^2} = \left|\frac{3}{2} - 4\right| \Rightarrow \alpha = 1$

با توجه به معضلات مرکز دایره اول
باید مرکز دایره C در ناحیه اول باشد که
این دایره در ناحیه ۴ به هم مماس شوند
 $\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{2} = \frac{25}{4} \Rightarrow 2\alpha^2 - 3\alpha - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha = \frac{5}{2} \end{cases}$

$$\text{فاصله } O(-1, -1) \text{ تا مبدأ} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \times \frac{25}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2} = 2.5\sqrt{2}$$

۱۳۷- به ازای چند مقدار طبیعی a ، عدد $\frac{1}{a}$ در بازه $\left[\frac{1}{2a+1}, \frac{1}{2a-3}\right]$ قرار دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲) ✓

۱ (۱)

$$\underbrace{\frac{1}{2a+1} < \frac{1}{a} < \frac{1}{2a-3}}_{(۲)} \Rightarrow \begin{cases} (۱) \Rightarrow 2 < 2a+1 \Rightarrow 1 < 2a \Rightarrow \frac{1}{2} < a \\ (۲) \Rightarrow 2a-3 < a \Rightarrow 2a < 3 \Rightarrow a < \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{2} < a < \frac{3}{2} \rightarrow a = \{1, 2\}$$

۱۳۸- میانگین جملات دنباله حسابی $a, 12, b, c, \dots, 172$ برابر ۸۷ است. مجموع جملات این دنباله کدام است؟

۱۶۵۳ (۴)

۱۵۶۶ (۳) ✓

۱۴۷۹ (۲)

۱۳۹۲ (۱)

$$\text{میانگین جملات} = \frac{a_1 + a_n}{n} = 87 \Rightarrow a_1 + a_n = 174$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{174n}{2} = \begin{cases} (۱) 1392 \Rightarrow n^2 = 32 \Rightarrow n = \text{عدد طبیعی نیست} \\ (۲) 1479 \Rightarrow n^2 = 34 \Rightarrow n = \text{عدد طبیعی نیست} \\ (۳) 1566 \Rightarrow n^2 = 36 \Rightarrow n = 6 \\ (۴) 1653 \Rightarrow n^2 = 38 \Rightarrow n = \text{عدد طبیعی نیست} \end{cases}$$

۱۳۹- اگر -2 یکی از ریشه‌های معادله $x(3x^2 + x + a) = -2$ باشد، حاصل ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$-\frac{2}{3}$ (۲) ✓

$-\frac{3}{4}$ (۱)

$$x = -2 \Rightarrow x(12 - 2 + a) = -2 \Rightarrow 10 + a = 1 \Rightarrow a = -9$$

ریشه‌ها در صورتی که حاصل ضرب می‌کنند.

$$x(3x^2 + x - 9) + 2 = 0 \Rightarrow 3x^3 + x^2 - 9x + 2 = 0 \Rightarrow p = -\frac{2}{3}$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Rightarrow S = -\frac{b}{a}, p = -\frac{d}{a}$$

$$3x^3 + x^2 - 9x + 2 = 0 \Rightarrow \text{تفکیک به دو صورت} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} -2 & 3 & 1 & -9 & 2 \\ & 2 & -5 & 1 & 0 \end{array}$$

روش دوم: استفاده از همزن

$$\Rightarrow (x+2)(3x^2 - 5x + 1) = 0 \Rightarrow \underbrace{x = -2}_{p = \frac{1}{3} = \frac{1}{p}} \Rightarrow -2 \times \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

۱۴۰- اگر $a + \sqrt{b} - c = 6$ و $\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{c} = 3$ باشد، حاصل $\log_r c$ کدام است؟

۲- (۴) ✓

۱- (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

$$a + \sqrt{b} - c = 6 \Rightarrow a + \sqrt{b} = c + 6$$

$$\sqrt{c+6} + \sqrt{c} = 3 \Rightarrow \sqrt{c+6} = 3 - \sqrt{c} \Rightarrow \text{بهران ۲} \Rightarrow c+6 = 9 + c - 6\sqrt{c} \Rightarrow -3 = -6\sqrt{c}$$

$$\Rightarrow \sqrt{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{4} \Rightarrow \log_r c = \log_r \frac{1}{4} = -2$$