

پاسخ تشریحی سوالات کنکور سراسری تجربی - ۲۹ مرداد ۱۴۰۵

سوال ۱۱۱ - گزینه ۱

۱۱۱- رأس سهمی $y = -8x^2 + ax + 1$ و صفرهای آن، رئوس مثلثی با مساحت $\frac{27}{64}$ است. اگر بخش بزرگ‌تری از مساحت

مثلث در ناحیه دوم باشد، مقدار a کدام است؟

$-4\sqrt{2}$ (۴)

۲ (۳)

$4\sqrt{2}$ (۲)

-۲ (۱)

چون بخش بیشتر از مثلث در ناحیه دوم است، پس رأس سهمی در ناحیه دوم قرار دارد و مولفه اول (طول) آن منفی است:

$$-\frac{b}{2a_{\text{سهمی}}} < 0 \Rightarrow -\frac{a_{\text{سوال}}}{2 \times -8} < 0 \Rightarrow a < 0 \quad (*)$$

$$\text{قاعده مثلث} = |\text{تفاضل ریشه‌ها}| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a_{\text{سهمی}}} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{8}$$

$$\text{ارتفاع مثلث} = \left| \frac{-\Delta}{4a_{\text{سهمی}}} \right| = \frac{\Delta}{32}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{27}{64} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{\Delta}}{8} \times \frac{\Delta}{32} \Rightarrow$$

$$27 = \frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{8} \Rightarrow$$

$$3^3 = \frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{2^3} \Rightarrow$$

$$\Delta\sqrt{\Delta} = 6^3 \Rightarrow$$

$$\Delta^3 = 6^6 \Rightarrow$$

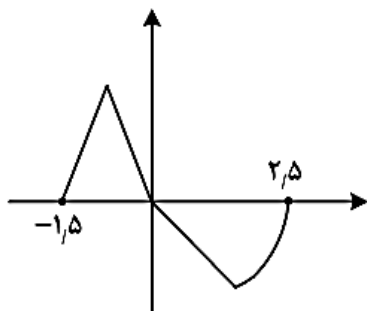
$$\Delta = 6^2 = 36$$

$$\Delta = (a_{\text{سوال}})^2 - 4(-8)(1) = a^2 + 32 = 36 \Rightarrow$$

$$a = \pm 2 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} a = -2$$

سوال ۱۱۲ - گزینه ۳

۱۱۲- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده و $g(x) = -f(x + \frac{1}{4})$ است. اگر $h = \frac{f}{g}$ باشد، دامنه h شامل چند عدد صحیح است؟



(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

$$D_f = \left[-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right] \xrightarrow{\text{واحد شیفست به چپ}} D_g = \left[-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}, \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\right] = [-2, 2] \Rightarrow$$

$$D_f \cap D_g = \{-1, 0, 1, 2\} \quad \text{اشتراک دامنه های } f \text{ و } g$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow -f\left(x + \frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow f\left(x + \frac{1}{4}\right) = 0 \xrightarrow{\text{صفرهای } f \text{ از روی نمودار}} \begin{cases} x + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} \Rightarrow x = -2 \\ x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \\ x + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \left\{x \mid g(x) = 0\right\} = \{-1, 0, 1, 2\} - \left\{-2, -\frac{1}{4}, 2\right\} = \{-1, 0, 1\} \Rightarrow \text{عضو ۳}$$

سوال ۱۱۳ - گزینه ۱

۱۱۳- هر کدام از ریشه های معادله ای $x^2 + 1/35x - 1/3 = 0$ واحد از یکی از ریشه های معادله $x^2 + 1/35x - 1/3 = 0$ کمتر است. حاصل ضرب ریشه های آن معادله کدام است؟

(۴) $-1/375$ (۳) $-1/3$ (۲) $-0/3$ (۱) $-0/375$

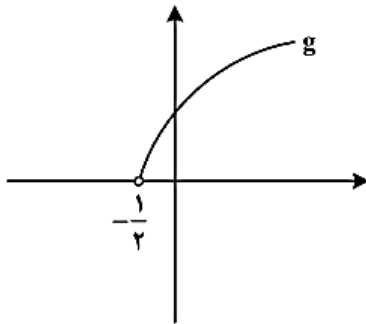
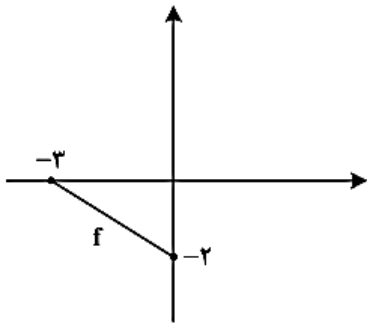
$$x^2 + 1/35x - 1/3 = 0 \Rightarrow S = -\frac{b}{a} = -1/35 \text{ و } P = \frac{c}{a} = -1/3$$

$$(x_1 - 0/5)(x_2 - 0/5) = x_1x_2 - 0/5(x_1 + x_2) + 0/25 = P - 0/5S + 0/25$$

$$= -1/3 - 0/5(-1/35) + 0/25 = -0/375$$

سوال ۱۱۴ - گزینه ۳

۱۱۴- نمودارهای توابع f و g به صورت زیر رسم شده‌اند. اگر بازه I دامنه $g \circ f\left(\frac{1}{5}x\right)$ باشد، طول بازه I کدام است؟



(۱) ۰٫۵

(۲) ۱

(۳) ۱٫۵

(۴) ۳

$$D_{f(x)} = [-3, 0] \xrightarrow{-3 \leq \frac{1}{5}x \leq 0} D_{f\left(\frac{1}{5}x\right)} = [-6, 0]$$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x - 2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{5}x\right) = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}x\right) - 2 = -\frac{2}{15}x - 2$$

$$D_g = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$D_{g \circ f\left(\frac{1}{5}x\right)} = \left\{x \in D_{f\left(\frac{1}{5}x\right)} \mid f\left(\frac{1}{5}x\right) \in D_g\right\} = \left\{-6 \leq x \leq 0 \mid -\frac{2}{15}x - 2 > -\frac{1}{2}\right\} = \left\{-6 \leq x \leq 0 \mid x < \frac{-9}{2}\right\}$$

$$I = \left[-6, \frac{-9}{2}\right)$$

$$I \text{ بازه : } -\frac{9}{2} - (-6) = 6 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$$

سوال ۱۱۵ - گزینه ۴

۱۱۵ - اگر $\sqrt{\tan x} - \sqrt{\cot x} = \frac{2}{\sqrt{7}}$ و x در ربع سوم باشد، حاصل $\sin x - \cos x$ کدام است؟

$$-\frac{1}{3}\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{2} \quad (۱)$$

$$\sqrt{\tan x} - \sqrt{\cot x} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\tan x + \cot x - 2 = \frac{4}{7}$$

$$\tan x + \cot x = \frac{14}{7}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{14}{7}$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{14}{7}$$

$$\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{14}{7}$$

$$\sin x \cos x = \frac{7}{14}$$

$$\sin^2 x = \frac{7}{9} \quad (*)$$

در ربع سوم:

$$\sin x < 0 \text{ و } \cos x < 0 \text{ و } \tan x > 0 \text{ و } \cot x > 0$$

$$\sqrt{\tan x} - \sqrt{\cot x} > 0$$

$$\tan x > \cot x$$

$$\tan x > \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan^2 x > 1$$

$$\tan x > 1$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} > 1 \xrightarrow{\times \cos x}$$

چون $\cos x < 0$ ، علامت برمی گردد:

$$\sin x < \cos x \Rightarrow \sin x - \cos x < 0 \quad (**)$$

سوال ۱۱۶ - گزینه ۲

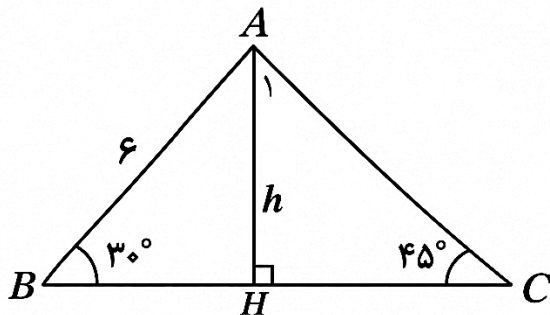
۱۱۶- در مثلث ABC اندازه زوایای $\hat{A}CB$ و $\hat{A}BC$ به ترتیب ۴۵° و ۳۰° درجه است. اگر $AB = ۶$ باشد، طول ضلع BC کدام است؟

$$۴(۱ + \sqrt{۳}) \quad (۴)$$

$$۴(۱ + \sqrt{۲}) \quad (۳)$$

$$۳(۱ + \sqrt{۳}) \quad (۲)$$

$$۳(۱ + \sqrt{۲}) \quad (۱)$$



$$\sin \hat{B} = \frac{h}{AB} \quad \text{و} \quad \cos \hat{B} = \frac{BH}{AB}$$

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{1}{۲} = \frac{h}{۶} \Rightarrow h = ۳$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BH}{۶} \Rightarrow BH = ۳\sqrt{۳}$$

$$\hat{A}_1 = ۴۵^\circ \Rightarrow \triangle AHC \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow HC = h = ۳$$

$$\Rightarrow BC = BH + HC = ۳\sqrt{۳} + ۳ = ۳(۱ + \sqrt{۳})$$

سوال ۱۱۷ - گزینه ۴

۱۱۷- تابع $f(x) = -\frac{1}{۴} \cos\left(\frac{۳\pi}{۲} + ۳x\right)$ روی بازه $[a, 0]$ اکیداً نزولی است. کمترین مقدار a کدام است؟

$$-\frac{\pi}{۶} \quad (۴)$$

$$-\frac{\pi}{۴} \quad (۳)$$

$$-\frac{\pi}{۸} \quad (۲)$$

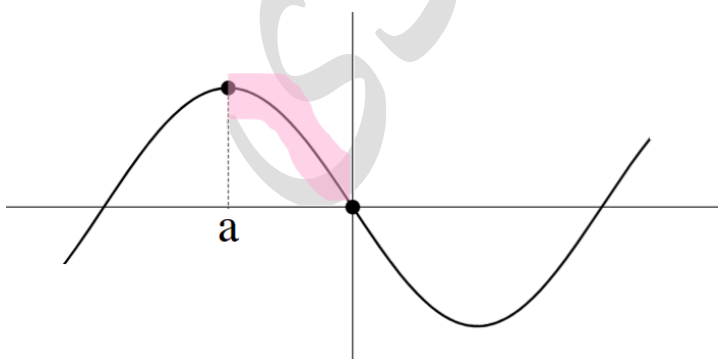
$$-\frac{\pi}{۱۲} \quad (۱)$$

کمترین مقدار a برابر $\frac{1}{۴}$ دوره تناوب تابع است:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۳}$$

$$\frac{T}{۴} = \frac{1}{۴} \times \frac{۲\pi}{۳} = \frac{\pi}{۶}$$

$$a = -\frac{\pi}{۶}$$



$$f(x) = -\frac{1}{۴} \cos\left(\frac{۳\pi}{۲} + ۳x\right) = -\frac{1}{۴} \sin(۳x)$$

سوال ۱۱۸ - گزینه ۲

۱۱۸- تعداد جواب‌های معادله $\sin(\pi + x)\cos(\frac{\pi}{4} + x) + 1 = 2\sin(\pi - x)$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

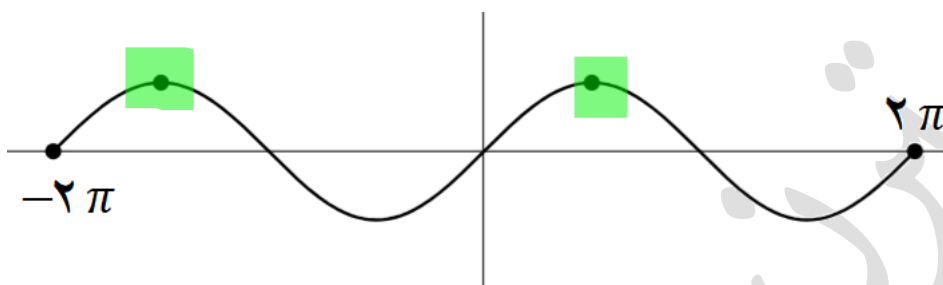
۱ (۱)

$$\sin(\pi + x)\cos(\frac{\pi}{4} + x) + 1 = 2\sin(\pi - x) \Rightarrow -\sin x \times \sin x + 1 = 2\sin x$$

$$\sin^2 x + 1 = 2\sin x \Rightarrow \sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = 1$$

با رسم نمودار $\sin x$ پیدااست دو ریشه داریم:



سوال ۱۱۹ - گزینه ۱

۱۱۹- حاصل $(0.25)^{1-\log_4 10}$ کدام است؟

۰.۰۵ (۴)

۰.۲۵ (۳)

۰.۵ (۲)

۲.۵ (۱)

$$(0.25)^{1-\log_4 10} = \frac{0.25}{(0.25)^{\log_4 10}} = \frac{0.25}{(\frac{1}{4})^{\log_4 10}} = \frac{0.25}{(4^{-1})^{\log_4 10}} = \frac{0.25}{(4^{\log_4 10})^{-1}} = \frac{0.25}{(10)^{-1}} = \frac{0.25}{\frac{1}{10}} = 2.5$$

سوال ۱۲۰ - گزینه ۳

۱۲۰- اگر اعداد a و b به داده‌های زیر اضافه شوند، چارک اول و سوم داده‌ها تغییر نمی‌کند. میانگین a و b کدام است؟

۴۵، ۱۲، ۱۵، ۲۳، ۱۴، ۱۶، ۳۴، ۱۸، ۴۲، ۲۵، ۱۰

۲۰ (۴)

۲۴ (۳)

۲۸ (۲)

۳۰ (۱)

برای تغییر نکردن Q_1 و Q_3 ، دو داده a و b باید در دو سمت Q_2 واقع شوند؛

۱۰ ، ۱۲ ، $\boxed{\frac{14}{Q_1}}$ ، ۱۵ ، ۱۶ ، $\boxed{\frac{18}{Q_2}}$ ، ۲۳ ، ۲۵ ، $\boxed{\frac{34}{Q_3}}$ ، ۴۲ ، ۴۵

۱۰ ، ۱۲ ، $\boxed{\frac{14, a}{Q_1=14}}$ ، ۱۵ ، ۱۶ ، $\boxed{\frac{18}{Q_2}}$ ، ۲۳ ، ۲۵ ، $\boxed{\frac{34, b}{Q_3=34}}$ ، ۴۲ ، ۴۵

$$\Rightarrow a = 14 \text{ و } b = 34 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{14+34}{2} = 24$$

سوال ۱۲۱ - گزینه ۲

۱۲۱- نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x+a}$ در دو نقطه نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند. اگر اختلاف طول این نقاط $2\sqrt{10}$ باشد،

کدام مورد می‌تواند مقدار a باشد؟ ($a \neq 0$)

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۲ (۱)

نمودار تابع، و نمودار وارونش یک‌دیگر را روی $y = x$ قطع می‌کنند. پس نقاط $f(x) = x$ را بررسی می‌کنیم:

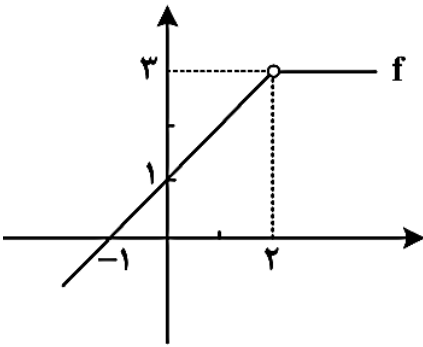
$$x = \frac{1}{x+a} \Rightarrow x^2 + ax - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = a^2 + 4$$

$$|\text{تفاضل ریشه‌ها}| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a_{\text{معادله}}} \right| \Rightarrow 2\sqrt{10} = \frac{\sqrt{\Delta}}{1} \Rightarrow 2\sqrt{10} = \sqrt{a^2 + 4} \Rightarrow 40 = a^2 + 4$$

$$a^2 = 36 \Rightarrow a = \pm 6$$

سوال ۱۲۲ - گزینه ۱

۱۲۲- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3-f(x)}{x^2-4}$ کدام است؟



(۱) $-\frac{1}{4}$

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) $-\frac{1}{5}$

(۴) $-\frac{1}{3}$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 2 \\ 3 & x > 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3-f(x)}{x^2-4} = \frac{0}{0} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3-(x+1)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-(x+1)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1-x}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{(x+2)} = \frac{-1}{2+2} = \frac{-1}{4}$$

سوال ۱۲۳ - گزینه ۴

۱۲۳- اگر $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x-|x||}{x^2+2x} = a$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \tan(ax)$ کدام است؟

(۴) $+\infty$

(۳) $-\infty$

(۲) صفر

(۱) ۱

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x-(-x)|}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|2x|}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x+2} = \frac{2}{0+2} = \boxed{-1 = a}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \tan(-x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} -\tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} -\tan x = -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \tan x = -(-\infty) = +\infty$$

سوال ۱۲۴ - گزینه ۳

۱۲۴- تابع f با ضابطه $f(x) = 1 + \frac{2x}{a}$ است. اگر تابع $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq -1 \\ f^{-1}(x) & x < -1 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد و محور x ها را در

سمت مثبت محور قطع کند، مقدار $g(-1)$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

-۴ (۱)

$$f(x) = \frac{2}{a}x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{a}{2}x - \frac{a}{2}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{a}x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{2} > 0 \Rightarrow \boxed{a < 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{a}{2}x - \frac{a}{2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{a}x + 1$$

$$\frac{a}{2}(-1) - \frac{a}{2} = \frac{2}{a}(-1) + 1$$

$$-2a = 1 - \frac{2}{a} \xrightarrow{\times a} -2a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow (2a - 1)(a + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -x + 1$$

$$g(-1) = f(-1) = -(-1) + 1 = 2$$

سوال ۱۲۵ - گزینه ۱

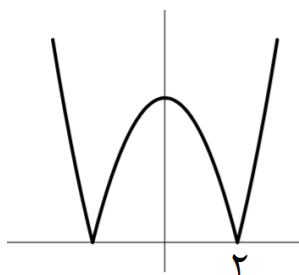
۱۲۵- اختلاف شیب نیم‌مماس‌های چپ و راست بر منحنی $y = |x^2 - 4|$ در $x = 2$ کدام است؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)



$$2^+ : y = x^2 - 4 \Rightarrow y' = 2x \xrightarrow{x=2} y' = 4$$

$$2^- : y = 4 - x^2 \Rightarrow y' = -2x \xrightarrow{x=2} y' = -4$$

$$4 - (-4) = 8$$

سوال ۱۲۶ - گزینه ۳

۱۲۶- یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \frac{9t+3}{\sqrt{t}}$ گرم است. آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه

$t=1$ چند گرم است؟

۱/۵ (۴)

۳ (۳)

۷/۵ (۲)

۱۷ (۱)

$$m(t) = \frac{9t+3}{\sqrt{t}} = 9\sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}} \Rightarrow m'(t) = \frac{9}{2\sqrt{t}} - \frac{3}{2t\sqrt{t}} \Rightarrow m'(1) = \frac{9}{2\sqrt{1}} - \frac{3}{2 \times 1} = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

سوال ۱۲۷ - گزینه ۲

۱۲۷- برای چند مقدار طبیعی a ، تابع $f(x) = |2x^2 - 9x + a|$ در بازه $[1, 4]$ دارای دو مینیمم نسبی است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

چون ضریب x^2 مثبت است، دهانه سهمی رو به بالاست و اگر ریشه نداشته باشد یا یک ریشه داشته باشد، یک مینیمم خواهیم داشت. پس تابع باید دو ریشه در بازه $[1, 4]$ داشته باشد تا با اعمال قدر مطلق، به فرم W درآید و دو مینیمم نسبی تولید شود:

$$\Delta = (-9)^2 - 4(2)(a) = 81 - 8a > 0 \Rightarrow a < \frac{81}{8} \approx 10.125 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a \in \{1, 2, 3, \dots, 10\} (*)$$

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-9}{2 \times 2} = \frac{9}{4} = 2.25$$

$$x_1 \text{ و } x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 8a}}{4}$$

ریشه کوچک تر باید بین $2/25$ و 1 باشد، و گرنه هر دو مینیمم در بازه $[1, 4]$ قرار نمی گیرد (مساوی 1 نیز نباید باشد، و گرنه مینیمم تولید نمی شود):

$$1 < \frac{9 - \sqrt{81 - 8a}}{4} < 2.25 \xrightarrow{(*)} 4 < 9 - \sqrt{81 - 8a} < 9 \Rightarrow 0 < \sqrt{81 - 8a} < 5 \Rightarrow$$

$$81 - 8a < 25 \Rightarrow 81 - 25 < 8a \Rightarrow 56 < 8a \Rightarrow 7 < a \xrightarrow{(*)} a = 8, 9, 10$$

سوال ۱۲۸ - گزینه ۳

۱۲۸- خطی در نقطه (a, a) بر نمودار تابع $y = \sqrt{2-x}$ مماس شده و محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می کند. مساحت مثلث OAB کدام است؟

۱٫۷۵ (۴)

۲٫۲۵ (۳)

۳٫۵ (۲)

۴٫۵ (۱)

$$a = \sqrt{2-a} \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases} \quad \checkmark$$

نقطه تماس $(1, 1)$ است. شیب خط گذرنده از این نقطه، همان مشتق تابع در $x = 1$ است:

$$y' = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} \xrightarrow{x=1} y'(1) = \frac{-1}{2\sqrt{2-1}} = \frac{-1}{2} \xrightarrow{\text{معادله خط}} y = \frac{-1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} A(0, \frac{3}{2}) \\ B(3, 0) \end{cases}$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{4} = 2.25$$

سوال ۱۲۹ - گزینه ۱

۱۲۹- یک رأس مستطیلی واقع بر منحنی $y = 4x^2 - 12x + 9$ بوده و سه رأس دیگر، روی محورهای مختصات است. اگر این مستطیل بین محورها و نمودار منحنی محاط باشد، بیشترین مساحت این مستطیل کدام است؟

$3\sqrt{2}$ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

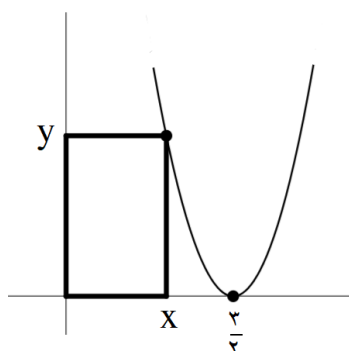
۳ (۲)

۲ (۱)

$$y = 4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2 \Rightarrow \text{راس سهمی: } -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$S(x) = x \cdot y = x(2x - 3)^2 = 4x^3 - 12x^2 + 9x$$

$$S'(x) = 12x^2 - 24x + 9 = 3(4x^2 - 8x + 3) = 3(2x - 1)(2x - 3) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \checkmark$$



$$S_{max} = S(x) = \frac{1}{2} \left(2 \times \frac{1}{2} - 3 \right)^2 = \frac{1}{2} (1 - 3)^2 = 2$$

سوال ۱۳۰ - گزینه ۴

۱۳۰- ۷ نفر در خط شروع یک مسابقه ایستاده‌اند. به چند طریق ممکن است ۳ نفری که اشتباه در خط شروع ایستاده‌اند، مجاور هم باشند؟

۱۰ (۴)

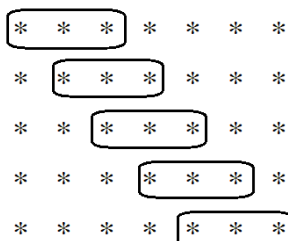
۱۲ (۳)

۳۵ (۲)

۴۲ (۱)

مطابق شکل، همه حالت‌هایی که ۳ نفری که در جایگاه اشتباه ایستاده‌اند، کنار همند.

جایگاه‌ها : ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷



در هر حالت ۲ حالت کاملاً اشتباه وجود دارد مثلاً:

$$\begin{array}{c}
 \checkmark \\
 \times \\
 \times
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 ۱ & ۲ & ۳ \\
 ۲ & ۳ & ۱ \\
 ۳ & ۱ & ۲
 \end{array}
 \Rightarrow \text{حالت دیگری نیست} \Rightarrow ۲ \times ۵ = ۱۰$$

سوال ۱۳۱ - گزینه ۳

۱۳۱- دو دانش‌آموز، هر کدام تابلوهایی با شماره‌های ۱ تا ۸ در اختیار دارند، هر کدام به تصادف یک تابلو را انتخاب کرده و به هم نشان می‌دهند. اگر عدد روی تابلوی یکی، مضرب دیگری باشد، هر دو برنده جایزه می‌شوند. چند درصد احتمال دارد که آنها برنده شوند؟

۷۲٫۵ (۴)

۵۰ (۳)

۶۲٫۵ (۲)

۴۰ (۱)

کل حالت‌ها : ۸×۸

۸ حالت : مشابه هم

$$\text{مشابه نباشند : } \begin{cases} ۱ \text{ یکی باشد : } ۲, ۳, \dots, ۸ \\ ۲ \text{ یکی باشد : } ۴, ۶, ۸ \\ ۳ \text{ یکی باشد : } ۶ \\ ۳ \text{ یکی باشد : } ۶ \end{cases} \Rightarrow ۷ + ۳ + ۱ + ۱ = ۱۲ \xrightarrow{\text{چون دو نفرند}} ۲ \times ۱۲ = ۲۴$$

$$P(A) = \frac{۲۴ + ۸}{۸ \times ۸} = \frac{۳۲}{۶۴} = \frac{۱}{۲} = \%۵۰$$

سوال ۱۳۲ - گزینه ۲

۱۳۲- هر یک از اعداد ۱ تا ۹ روی یک کارت نوشته شده است. سه کارت به تصادف انتخاب می‌شود. با کدام احتمال هر سه عدد روی کارت فرد هستند به طوری که می‌دانیم مجموع آنها نیز فرد است؟

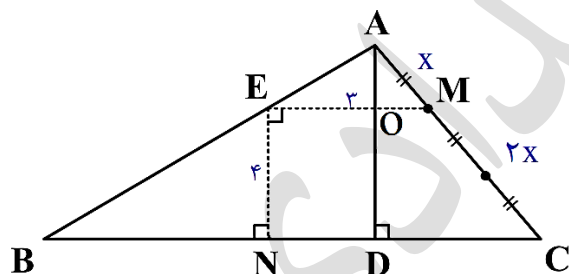
- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{5}$

مجموع سه عدد فرد همواره فرد است. مجموع ۲ عدد زوج و یک عدد فرد نیز فرد است:

$$P(\text{اعداد فرد} \mid \text{مجموع فرد}) = \frac{n(\text{اعداد و مجموع فرد})}{n(\text{مجموع فرد})} = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{5}{3} + \binom{4}{2}} = \frac{10}{10 + 6} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

سوال ۱۳۳ - گزینه ۴

۱۳۳- در شکل زیر، $AD=6$ و $BC=9$ است. طول MN چقدر است؟



(۱) $3,5\sqrt{2}$

(۲) $3\sqrt{2}$

(۳) $4,5$

(۴) 5

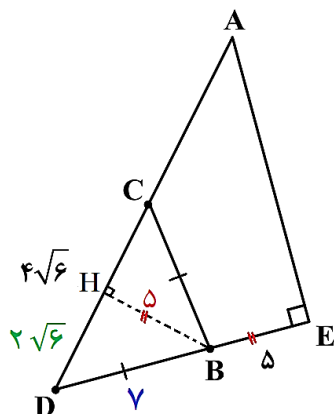
$$EN \perp EM \text{ و } BC \Rightarrow EM \parallel BC \xRightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AM}{AC} = \frac{EM}{BC} = \frac{AO}{AD} \Rightarrow \frac{x}{3x} = \frac{EM}{9} = \frac{AO}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} EM = 3 \\ AO = 2 \end{cases}$$

$$EN = OD = AD - AO = 6 - 2 = 4$$

$$\triangle EMN : MN = \sqrt{EM^2 + EN^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

سوال ۱۳۴ - گزینه ۳

۱۳۴- در شکل زیر، $BC = BD$ و B روی نیمساز زاویه A قرار دارد. طول BD چند برابر طول ارتفاع وارد بر DC است؟



(۱) ۱٫۲

(۲) ۱٫۳

(۳) ۱٫۴

(۴) ۱٫۵

نقطه B روی نیمساز زاویه A قرار دارد پس فاصله اش از دو ضلع زاویه به یک اندازه است: $BE = BH = 5$

BCD مثلث متساوی الساقین است پس ارتفاع وارد بر قاعده آن را نصف می کند: $DH = 2\sqrt{6}$

$$DB = \sqrt{5^2 + (2\sqrt{6})^2} = \sqrt{25 + 24} = \sqrt{49} = 7 \Rightarrow \frac{BD}{BH} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$$

سوال ۱۳۵ - گزینه ۱

۱۳۵- قطره های یک بیضی روی خطوط $y = x + 3$ و $ay - 2x = -2$ قرار دارند. اگر مرکز بیضی و محل برخورد قطره های بیضی با محور x ها، رئوس یک مثلث باشند، مساحت این مثلث کدام است؟

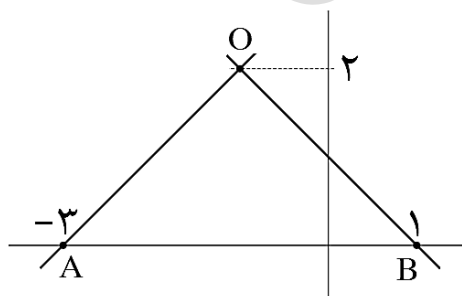
(۴) ۳٫۵

(۳) ۴٫۵

(۲) ۳

(۱) ۴

قطره های بیضی بر هم عمودند، پس شیب خطوط معکوس و قرینه یک دیگرند:



$$\text{خط اول: } y = x + 3 \Rightarrow A(-3, 0)$$

$$\text{خط دوم: } ay - 2x = -2 \Rightarrow y = \frac{2}{a}x - \frac{2}{a}$$

$$\text{شیب خطوط: } \frac{2}{a} \times 1 = -1 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

$$y = -x + 1 \Rightarrow B(1, 0)$$

$$\text{تقاطع خطوط: } x + 3 = -x + 1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow O(-1, 2) \Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

سوال ۱۳۶ - گزینه ۴

۱۳۶- در نقطه‌ای واقع در ناحیه چهارم، دایره C به مرکز (α, α) و شعاع ۴ با دایره $x^2 + y^2 - 2x - y = 1$ مماس درون است. فاصله مرکز دایره C از مبدأ مختصات کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) $5\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $2.5\sqrt{2}$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = 16 \Rightarrow O(\alpha, \alpha) \text{ و } R = 4$$

$$x^2 + y^2 - 2x - y = 1 \Rightarrow (x - 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow O'\left(1, \frac{1}{2}\right) \text{ و } R' = \frac{3}{2}$$

دو دایره مماس درون باشند، خط‌المركزين برابر تفاضل شعاع‌هاست:

$$OO' = R' - R$$

$$\sqrt{(1 - \alpha)^2 + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^2} = 4 - \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow 2\alpha^2 - 3\alpha - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha = \frac{5}{2} \end{cases}$$

اگر مرکز دایره $(-1, -1)$ باشد، محل برخورد در ناحیه چهارم واقع نمی‌شود. پس $\alpha = \frac{5}{2}$

$$O\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \text{فاصله تا مبدأ: } \frac{5}{2}\sqrt{2} = 2.5\sqrt{2}$$

سوال ۱۳۷ - گزینه ۲

۱۳۷- به ازای چند مقدار طبیعی a ، عدد $\frac{1}{5}$ در بازه $\left[\frac{1}{3a+1}, \frac{1}{2a-3}\right)$ قرار دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

$$\begin{cases} \frac{1}{3a+1} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow 5 \leq 3a+1 \Rightarrow \frac{4}{3} \leq a \\ \frac{1}{5} < \frac{1}{2a-3} \Rightarrow 2a-3 < 5 \Rightarrow a < 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{3} \leq a < 4 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = 2, 3$$

سوال ۱۳۸ - گزینه ۳

۱۳۸- میانگین جملات دنباله حسابی $a, 12, b, c, \dots, 172$ برابر ۸۷ است. مجموع جملات این دنباله کدام است؟

$$1653 \quad (4)$$

$$1566 \quad (3)$$

$$1479 \quad (2)$$

$$1392 \quad (1)$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = 87$$

$$\frac{\frac{n}{2}(a_1 + a_n)}{n} = 87$$

$$\frac{a + 172}{2} = 87$$

$$\Rightarrow a = 2 \Rightarrow d = 12 - 2 = 10 \Rightarrow a_n = 10n - 8 = 172 \Rightarrow n = 18$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{18} = 87 \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1566$$

سوال ۱۳۹ - گزینه ۲

۱۳۹- اگر -2 یکی از ریشه‌های معادله $x(3x^2 + x + a) = -2$ باشد، حاصل ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$x(3x^2 + x + a) = -2$$

$$(-2)(3(-2)^2 + (-2) + a) = -2 \Rightarrow a = -9$$

$$x(3x^2 + x - 9) = -2$$

$$3x^3 + x^2 - 9x + 2 = 0$$

$$\underbrace{(x+2)}_{x=-2} \underbrace{(3x^2 - 5x + 1)}_{P=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}} = 0$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = -2 \times \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

۱۴۰- اگر $a + \sqrt{b} - c = 6$ و $\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{c} = 3$ باشد، حاصل $\log_2 c$ کدام است؟

(۴) -۲

(۳) -۱

(۲) ۱

(۱) ۲

$$a + \sqrt{b} - c = 6 \Rightarrow a + \sqrt{b} = c + 6 \quad (*)$$

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{c} = 3 \xRightarrow{(*)} \sqrt{c + 6} + \sqrt{c} = 3 \Rightarrow$$

$$\sqrt{c + 6} = 3 - \sqrt{c} \Rightarrow$$

$$c + 6 = c - 6\sqrt{c} + 9$$

$$6 = -6\sqrt{c} + 9 \Rightarrow$$

$$6\sqrt{c} = 3 \Rightarrow$$

$$\sqrt{c} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$c = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$$

«در نظر بگیرید پاسخ‌ها برای شفافیت و بررسی و تحلیل کامل، در طولانی‌ترین حالت نوشته شده‌اند.»

📷 NastaranVandadi