

توسط: سید امید شفیعی

۱۱۱- رأس سهمی $y = -8x^2 + ax + 1$ و صفرهای آن، رئوس مثلثی با مساحت $\frac{27}{64}$ است. اگر بخش بزرگ تری از مساحت

مثلث در ناحیه دوم باشد، مقدار a کدام است؟

$$-4\sqrt{2} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$4\sqrt{2} \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

حل: در واقع فاصله بین دو ریشه همیشه قاعده مثلث $(\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|})$ و عرض رأس سهمی $(-\frac{\Delta}{\epsilon a})$ همیشه ارتفاع مثلث.

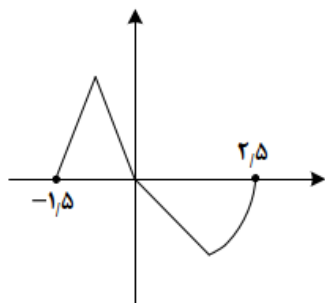
پس:

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \right) \left(-\frac{\Delta}{\epsilon a} \right) = \frac{27}{64} \Rightarrow \Delta \sqrt{\Delta} = 8 \times 27 \Rightarrow \Delta^{\frac{3}{2}} = (6)^3 \Rightarrow \Delta = 36$$

$$a^2 + 32 = 36 \Rightarrow a = \pm 2$$

اگر $a = -2$ باشد، شیب خط مماس بر منحنی سهمی در عرض از مبدا منفی همیشه و رأس سهمی سمت چپ قرار میگیره و بنابراین مساحت بیشتری در ناحیه دوم قرار میگیره. پس گزینه ۱ درسته.

۱۱۲- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده و $g(x) = -f(x + \frac{1}{4})$ است. اگر $h = \frac{f}{g}$ باشد، دامنه h شامل چند عدد صحیح است؟



$$1 \quad (1)$$

$$2 \quad (2)$$

$$3 \quad (3)$$

$$4 \quad (4)$$

حل: تابع $h(x) = \frac{f(x)}{-f(x + \frac{1}{4})}$ هست که برای دامنه باید اشتراک دامنه توابع $f(x)$ و $f(x + \frac{1}{4})$ رو بدست

بیاریم و از ریشه های مخرج کم کنیم. دامنه $f(x)$ که بازه $[-1/5, 2/5]$ و دامنه $f(x + \frac{1}{4})$ برابر با بازه $[-2, 2]$ میشه (چون نمودارش $\frac{1}{4}$ واحد به سمت چپ انتقال پیدا میکنه) و بنابراین اشتراکش این دو بازه برابر با $[-1/5, 2]$ که البته ریشه های $f(x + \frac{1}{4})$ که طبیعتاً $2, -\frac{1}{4}, -2$ هستن قابل قبول نمیشن و فقط اعداد صحیح $-1, 0$ قابل قبول هستن.

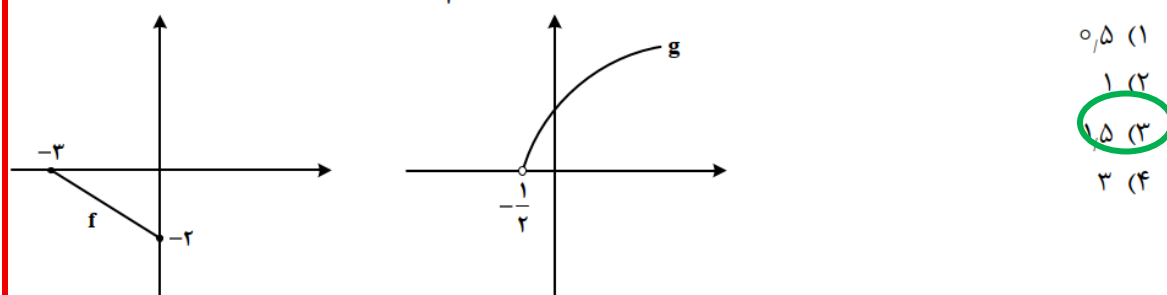
۱۱۳- هر کدام از ریشه‌های معادله‌ای $x^2 + 1/35x - 1/3 = 0$ واحد از یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + 1/35x - 1/3 = 0$ کمتر است. حاصل ضرب ریشه‌های آن معادله کدام است؟

- (۱) -0.375 (۲) -0.3 (۳) $-1/3$ (۴) -1.375

حل: اگر ریشه‌های معادله داده شده رو α و β در نظر بگیریم، پس ریشه‌های معادله $(\alpha - \frac{1}{3})$ و $(\beta - \frac{1}{3})$ هستن و بنابراین ضربشون برابر میشه با $\frac{1}{\epsilon}(\alpha + \beta) - \frac{1}{\epsilon}(\alpha\beta) + \frac{1}{\epsilon}$ که با جایگذاری به صورت زیر میشه:

$$-1/3 - \frac{1}{\epsilon}(-1/35) + \frac{1}{\epsilon} = -1/3 + \frac{2/7+1}{\epsilon} = \frac{-\epsilon(1/3) + 2/7+1}{\epsilon} = -0.375$$

۱۱۴- نمودارهای توابع f و g به صورت زیر رسم شده‌اند. اگر بازه I دامنه $\text{gof}(\frac{1}{3}x)$ باشد، طول بازه I کدام است؟



حل: $f(\frac{1}{3}x)$ رو می‌تونیم بسازم که همون نمودار f میشه که در راستای افقی دو برابر منبسط شده. دامنه ترکیب این دو تابع (طبق تعریف) به صورت زیر بدست میاد:

ضابطه $f(\frac{1}{3}x)$ به صورت $y = -\frac{1}{3}x - 2$; $-6 \leq x \leq 0$ میشه و بنابراین:

$$x \in D_{f(\frac{x}{3})}, f(\frac{x}{3}) \in D_g \Rightarrow [-6, 0] \cap -\frac{1}{3}x - 2 > -\frac{1}{2} \Rightarrow [-6, 0] \cap x < -4/5$$

$$I: [-6, -4/5)$$

پس طول بازه I برابر است با $1/5$.

۱۱۵- اگر $\sqrt{\tan x} - \sqrt{\cot x} = \frac{2}{\sqrt{7}}$ و x در ربع سوم باشد، حاصل $\sin x - \cos x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}\sqrt{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (۳) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}\sqrt{2}$

حل: رابطه داده شده رو به توان دو می‌رسونیم. پس $\frac{\varepsilon}{\gamma} = \tan x + \cot x - 2\sqrt{\tan x \cot x}$ و بنابراین:

$$\tan x + \cot x - 2 = \frac{\varepsilon}{\gamma} \Rightarrow \tan x + \cot x = \frac{18}{\gamma}$$

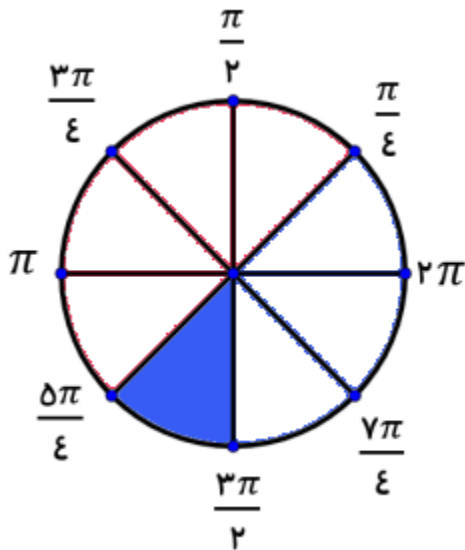
$$\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{18}{\gamma} \Rightarrow \frac{\tan^2 x + 1}{\tan x} = \frac{18}{\gamma} \Rightarrow \frac{\tan^2 x + 1}{2 \tan x} = \frac{9}{\gamma} \Rightarrow \frac{1}{\sin 2x} = \frac{9}{\gamma}$$

$$\sin 2x = \frac{\gamma}{9}$$

حالا اگه طرفین رابطه خواسته شده رو به توان دو برسونیم، و یه جذر بگیریم، داریم:

$$\pm \sqrt{1 - \sin 2x} = \pm \sqrt{1 - \frac{\gamma}{9}} = \pm \sqrt{\frac{2}{9}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$$

حالا کدومش رو باید قبول کنیم؟! طبق صورت سوال چون $\sqrt{\tan x} - \sqrt{\cot x} > 0$ پس $\tan x > \cot x$ همیشه و بنابراین در ناحیه (آبی رنگ) زیر قرار میگیره و مقدار سینوس منفی تر از کسینوس میشه و باعث که حاصل مقدار خواسته شده منفی بشه.



۱۱۶- در مثلث ABC اندازه زوایای $\hat{A}CB$ و $\hat{ABC}$ به ترتیب ۴۵ و ۳۰ درجه است. اگر $AB = 6$ باشد، طول ضلع BC کدام است؟

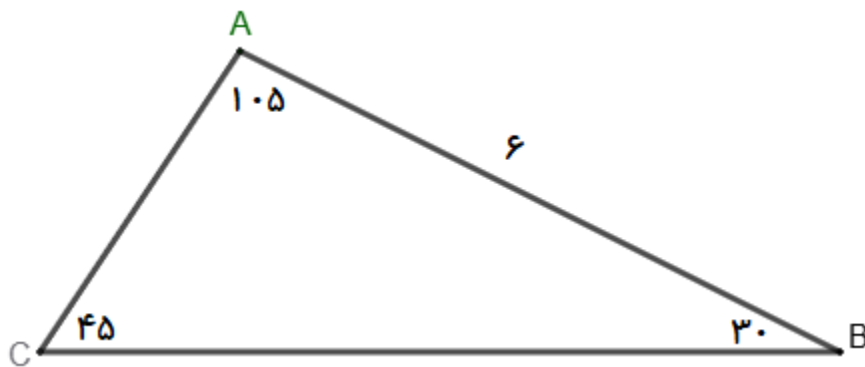
۴ $(1 + \sqrt{3})$

۳ $(1 + \sqrt{2})$

۲ $(1 + \sqrt{3})$

۱ $(1 + \sqrt{2})$

حل: مثلث داده شده رو رسم می کنیم و طبق قضیه سینوس ها داریم:



$$\frac{BC}{\sin(105)} = \frac{6}{\sin 45} \Rightarrow \frac{BC}{\sin 75} = \frac{6}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 6\sqrt{2} \Rightarrow BC = \sin 75 \times 6\sqrt{2}$$

میدونیم که $\sin 75 = \cos 15 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ پس:

$$BC = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \times 6\sqrt{2} = 3\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 3\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = 3|\sqrt{3}+1|$$

۱۱۷ تابع $f(x) = -\frac{1}{4}\cos(\frac{3\pi}{4} + 3x)$ روی بازه $[a, 0]$ اکیدا نزولی است. کمترین مقدار a کدام است؟

$-\frac{\pi}{6}$ (۴)

$-\frac{\pi}{4}$ (۳)

$-\frac{\pi}{8}$ (۲)

$-\frac{\pi}{12}$ (۱)

حل: اول تابع داده شده رو به صورت $f(x) = -\frac{1}{4}\sin 3x$ ساده میکنیم و میدونیم که نمودار $y = -\sin x$ در بازه $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ اکیدا نزولیه و چون این تابع سه برابر در راستای افقی منقبض شده، پس در بازه $[-\frac{\pi}{12}, 0]$ نزولی میشه و بنابراین کمترین مقدار برابر با $-\frac{\pi}{12}$ میشه.

۱۱۸ تعداد جواب های معادله $\sin(\pi+x)\cos(\frac{\pi}{4}+x)+1=2\sin(\pi-x)$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

حل: اول معادله رو به صورت زیر ساده میکنیم:

$$(-\sin x)(-\sin x) + 1 = 2\sin x \Rightarrow \sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0$$

در بازه داده شده در $x = -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ مقدار سینوس برابر با ۱ میشه. پس دو جواب داریم.

۱۱۹- حاصل $10^{-\log_2 10}$ کدام است؟

۰٫۰۵ (۴)

۰٫۲۵ (۳)

۰٫۵ (۲)

۲٫۵ (۱)

حل: به جای ۱ میتونیم $\log_2 2$ رو قرار بدیم:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 2 - \log_2 10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 \frac{2}{10}} = 2^{-(\log_2 \frac{2}{10})} = 2^{\log_2 \frac{10}{2}} = \frac{10}{2} = 5$$

۱۲۰- اگر اعداد a و b به داده‌های زیر اضافه شوند، چارک اول و سوم داده‌ها تغییر نمی‌کند. میانگین a و b کدام است؟

۴۵، ۱۲، ۱۵، ۲۳، ۱۴، ۱۶، ۳۴، ۱۸، ۴۲، ۲۵، ۱۰

۲۰ (۴)

۲۴ (۳)

۲۸ (۲)

۳۰ (۱)

حل: اول باید داده رو مرتب کنیم که به صورت زیر میشن:

۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۲۳، ۲۵، ۳۴، ۴۲، ۴۵

برای آنکه چارک‌های اول و سوم تغییر نکنه، باید داده‌های اضافه شده همون ۱۴ و ۳۴ باشن که میانگینشون برابر با ۲۴ میشه.

۱۲۱- نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x+a}$ در دو نقطه نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند. اگر اختلاف طول این نقاط $2\sqrt{10}$ باشد،کدام مورد می‌تواند مقدار a باشد؟ ($a \neq 0$)

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۲ (۱)

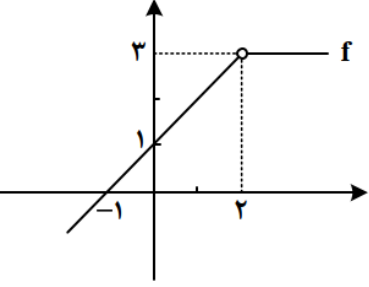
حل: وارون این تابع برابر میشه با $y = \frac{-ax+1}{x}$ که باید معادله $\frac{1}{x+a} = \frac{-ax+1}{x}$ رو حل کنیم و اختلاف ریشه‌های بدست اومده رو برابر با $2\sqrt{10}$ بذاریم. پس:

$$-ax^2 - a^2x + x + a = x \Rightarrow x^2 + ax - 1 = 0 \Rightarrow \text{اختلاف ریشه‌ها} = \frac{\sqrt{a^2 + 4}}{1} = 2\sqrt{10}$$

$$a^2 + 4 = 40 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = \pm 6$$

چون گفته کدام می‌تواند باشه، و ۶ در گزینه‌هاست، گزینه ۲ رو انتخاب می‌کنیم.

۱۲۲- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3-f(x)}{x^2-4}$ کدام است؟



☒ (۱) $-\frac{1}{4}$
☐ (۲) $-\frac{1}{2}$
☐ (۳) $-\frac{1}{5}$
☐ (۴) $-\frac{1}{3}$

حل: حاصل حد داده شده صفر صفرم همیشه که میتونیم هوییتال بزیم:

$$\text{Hop: } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-f'(x)}{2x} = \frac{-1}{4}$$

دقت کن که شیب نمودار قبل از ۲ برابر با ۱ است.

۱۲۳- اگر $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x-|x||}{x^2+2x} = a$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(ax)$ کدام است؟

☒ (۴) $+\infty$ ☐ (۳) $-\infty$ ☐ (۲) صفر ☐ (۱) ۱

حل: مخرج رو که برابر با $2x$ میذاریم، چون زمانی که $x \rightarrow 0$ هر چند جمله ای بدون مقدار ثابت هم ارز کوچکترین توان خودش میشه. برای صورت هم میتونیم به جای $|x|$ قرینه اس رو بذاریم، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x+x|}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|2x|}{2x} = -1$$

پس $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(-x)$ رو باید بدست بیاریم که میتونیم اول منفی رو از حد بیاریم بیرون، چرا که $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ هست و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(x)$ و چون تانژانت در ناحیه دوم قرار داده حدش منفی میشه و در نهایت جواب حد برابر با $+\infty$ میشه.

۱۲۴- تابع f با ضابطه $f(x) = 1 + \frac{2x}{a}$ است. اگر تابع $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq -1 \\ f^{-1}(x) & x < -1 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد و محور x ها را در سمت مثبت محور قطع کند، مقدار $g(-1)$ کدام است؟

☐ (۴) ۳ ☒ (۳) ۲ ☐ (۲) -۱ ☐ (۱) -۴

حل: معکوس این تابع برابر میشه با $y = \frac{a}{x-1}$. چون گفته تابع $g(x)$ پیوسته‌اس، باید در نقطه تغییر ضابطه هم پیوسته باشه، پس:

$$f(-1) = f^{-1}(-1) \Rightarrow 1 - \frac{2}{a} = -a \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1, -2$$

چون گفته ریشه تابع g مثبت، پس $a = -2$ قابل قبوله چراکه ضابطه بالایش به فرم $-x + 1$ میشه. پس:

$$g(-1) = f^{-1}(-1) = -(x-1) = 2$$

۱۲۵- اختلاف شیب نیم‌مماس‌های چپ و راست بر منحنی $y = |x^2 - 4|$ در $x = 2$ کدام است؟

۸ (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴)

حل: اگه قدرمطلق رو در نظر بگیریم تابع برابر با $y = x^2 - 4$ میشه که مشتقش برابر با $y' = 2x$ میشه که بنابراین در دو طرف ریشه برابر با ۴ و -۴ میشه و اختلاف این شیب‌ها برابر با ۸ میشه.

۱۲۶- یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \frac{9t+3}{\sqrt{t}}$ گرم است. آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=1$ چند گرم است؟

۱۷ (۱) ۷٫۵ (۲) ۳ (۳) ۱٫۵ (۴)

حل: باید از تابع مشتق بزنیم، فقط قبلش تفکیک می‌کنیم:

$$m(t) = 9\sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}} \Rightarrow m'(t) = \frac{9}{2\sqrt{t}} + 3 \left(\frac{-\frac{1}{2\sqrt{t}}}{t} \right) \Big|_{t=1} = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3$$

۱۲۷- برای چند مقدار طبیعی a ، تابع $f(x) = |2x^2 - 9x + a|$ در بازه $[1, 4]$ دارای دو مینیمم نسبی است؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

حل: چون گفته این تابع دو مینیمم نسبی بده، اولاً که عبارت درجه دوم باید دو ریشه داشته باشه، و ثانیاً اینکه ریشه‌ها در بازه داده شده قرار بگیرن. میتونی بگی چرا؟! پس:

$$\Delta = 81 - 8a > 0 \Rightarrow a < \frac{81}{8} = 10.125 \Rightarrow a \leq 10$$

ریشه‌ها برابر با $\frac{9 \pm \sqrt{81-8a}}{4}$ میشن که باید $1 < \frac{9 - \sqrt{81-8a}}{4} < 4$ و $\frac{9 + \sqrt{81-8a}}{4} < 4$ باشد و در نتیجه:

$$\begin{cases} \sqrt{81-8a} < 5 \\ \sqrt{81-8a} < 7 \end{cases} \Rightarrow 81-8a < 25 \Rightarrow 8a > 56 \Rightarrow a > 7$$

پس $a = 8, 9, 10$ قابل قبول همیشه. بنابراین گزینه ۲ درسته.

۱۲۸- خطی در نقطه (a, a) بر نمودار تابع $y = \sqrt{2-x}$ مماس شده و محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. مساحت مثلث OAB کدام است؟

۱,۷۵ (۴)

۲,۲۵ (۳)

۳,۵ (۲)

۴,۵ (۱)

حل: نقطه (a, a) روی این منحنی قرار داره، پس $a = 1$ باید باشه. حالا بریم معادله خط مماس رو بدست بیاریم که باید شیبش رو بدونیم که میشه مشتق همین تابع در این نقطه، یعنی $y' = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$ که به ازای $x = 1$ برابر با $m = -\frac{1}{2}$ میشه.

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

نقاط برخورد با محورها برابر $\frac{3}{2}$ و ۳ میشه و بنابراین مساحت مثلث ایجاد شده برابر با $\frac{9}{8}$ $S = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$ میشه.

۱۲۹- یک رأس مستطیلی واقع بر منحنی $y = 4x^2 - 12x + 9$ بوده و سه رأس دیگر، روی محورهای مختصات است. اگر این مستطیل بین محورها و نمودار منحنی محاط باشد، بیشترین مساحت این مستطیل کدام است؟

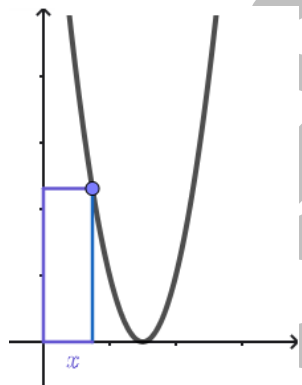
$3\sqrt{2}$ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

حل: تابع داده شده رو میتونیم به صورت مربع کامل، یعنی $y = (2x - 3)^2$ بازنویسی کنیم. ساختارش هم به فرم زیر میشه. بنابراین مساحت مستطیل برابر میشه با:



$$S = x(4x^2 - 12x + 9) = x(2x - 3)^2 \Rightarrow$$

$$S' = (2x - 3)^2 + x[2(2x - 3) \times 2] = 0$$

$$(2x - 3)(6x - 3) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ و } x = \frac{1}{2}$$

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(-2)^2 = 2$$

۱۳۰- ۷ نفر در خط شروع یک مسابقه ایستاده‌اند. به چند طریق ممکن است ۳ نفری که اشتباه در خط شروع ایستاده‌اند، مجاور هم باشند؟

۱۰ (۴)

۱۲ (۳)

۳۵ (۲)

۴۲ (۱)

حل: اگر سه نفر بخوان مجاور هم باشند، ما به دسته ۳ تایی میسازیم و مجموعا ۵ تا عضو داریم که تعداد جایگشت‌ها برابر میشه با $720 = 5! \times 3!$ حالت که در گزینه‌ها نیست!!!! اگر هم جایگشت خود اینا در نظر بگیریم ۷ حالت میشه....

۱۳۱- دو دانش آموز، هر کدام تابلوهایی با شماره‌های ۱ تا ۸ در اختیار دارند، هر کدام به تصادف یک تابلو را انتخاب کرده و به هم نشان می‌دهند. اگر عدد روی تابلوی یکی، مضرب دیگری باشد، هر دو برنده جایزه می‌شوند. چند درصد احتمال دارد که آنها برنده شوند؟

۷۲/۵ (۴)

۵۰ (۳)

۶۲/۵ (۲)

۴۰ (۱)

حل: کل فضای نمونه که برابر با $8 \times 8 = 64$ میشه. حالا باید ببینیم حالا مطلوب چیه.

الف) اگر نفر اول ۱ دستش باشه، نفر دوم همه رو میتونه داشته باشه و بر عکس. پس از (۱,۱) تا (۱,۸) قابل قبوله و برعکسش هم قابل قبوله. چون (۱,۱) دو مرتبه حساب میشه، مجموعا ۱۵ تا داریم.

ب) نفر اول اگر ۲ دستش باشه، نفر دوم باید ۲، ۴، ۶ یا ۸ رو داشته باشه که با برعکسش ۷ حالت میشه.

پ) نفر اول اگر ۳ دستش باشه، نفر دوم باید ۳ یا ۶ رو داشته باشه که با برعکسش ۳ حالت میشه.

ت) نفر اول اگر ۴ دستش باشه، نفر دوم باید ۴ یا ۸ رو داشته باشه که با برعکسش ۳ حالت میشه.

ث) نفر اول اگر ۵ دستش باشه، نفر دوم باید ۵ دستش باشه که ۱ حالت میشه، برای ۶ و ۷ و ۸ هم همین‌ه که مجموعا ۴ حالت میشه.

پس کلا تعداد حالات مطلوب برابر با $15 + 7 + 3 + 3 + 4 = 32$ میشه و بنابراین احتمالش $\frac{32}{64} = \frac{1}{2}$ میشه.

(ج)

۱۳۲- هر یک از اعداد ۱ تا ۹ روی یک کارت نوشته شده است. سه کارت به تصادف انتخاب می‌شود. با کدام احتمال هر سه عدد روی کارت فرد هستند به طوری که می‌دانیم مجموع آنها نیز فرد است؟

$\frac{1}{5}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

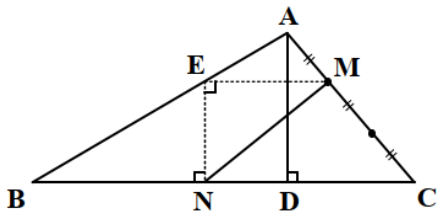
$\frac{1}{2}$ (۱)

حل: برای اینکه مجموع فرد باشه یا هر سه باید فرد بیایند که $\binom{5}{3} = 10$ حالت میشه یا دو تا زوج و یکی فرد

که برابر با $\binom{4}{2} \binom{5}{1} = 30$ میشه. پس اگر بدوینم مجموع فرد اومده یعنی ۴۰ حالت داریم که ۱۰ حالت

(هر سه فرد مطلوب ماست) و بنابراین احتمالش برابر با $\frac{1}{4} = \frac{10}{40}$ میشه.

۱۳۳- در شکل زیر، $AD=6$ و $BC=9$ است. طول MN چقدر است؟



(۱) $3,5\sqrt{2}$

(۲) $3\sqrt{2}$

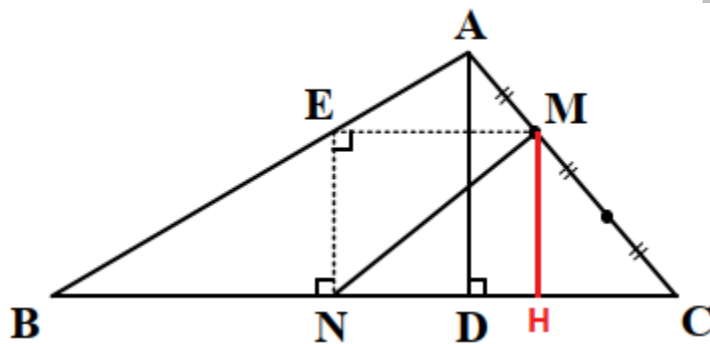
(۳) $4,5$

(۴) **۵**

حل: طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{EM}{BC} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow EM = \frac{BC}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

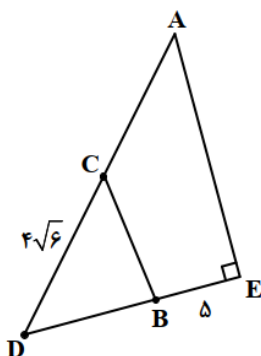
از طرفی اگر از M به ضلع BC عمود کنیم، به تالس هم در ADC داریم، یعنی:



$$\frac{MH}{AD} = \frac{MC}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow MH = 6 \left(\frac{2}{3} \right) = 4$$

این مقدار با EN برابر. حالا برای اینکه MN رو بدست بیاریم با استفاده از قاعده فیثاغورس، ۵ بدست میاد.

۱۳۴- در شکل زیر، $BC=BD$ و B روی نیمساز زاویه A قرار دارد. طول BD چند برابر طول ارتفاع وارد بر DC است؟



(۱) $1,2$

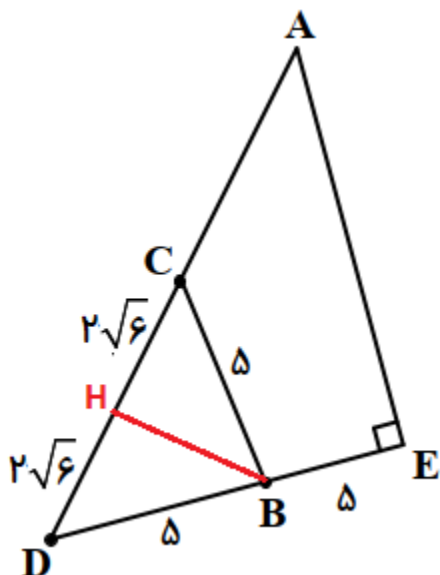
(۲) $1,3$

(۳) **۱,۴**

(۴) $1,5$

حل: چون گفته $BC = BD$ پس یک مثلث متساوی الساقین داریم و از طرفی، چون B روی نیمساز زاویه A قرار دارد باید فاصله‌اش از دو ضلع زاویه به یک اندازه باشد، یعنی $BH = 5$ میشه. میدونیم در مثلث متساوی الساقین میانه و ارتفاع با هم برابرند، پس ضلع CD نصف میشه و در مثلث BHD اگر فیثاغورس بزنیم

طول BD برابر با $7 = \sqrt{25 + (2\sqrt{6})^2}$ که بنابراین $\frac{BD}{BH} = \frac{7}{5} = 1/4$



۱۳۵- قطرهای یک بیضی روی خطوط $y = x + 3$ و $ay - 2x = -2$ قرار دارند. اگر مرکز بیضی و محل برخورد قطرهای

بیضی با محور x ها، رئوس یک مثلث باشند، مساحت این مثلث کدام است؟

۳/۵ (۴)

۴/۵ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

حل: میدونیم که قطرهای بیضی بر هم عمودند، پس

$$\frac{2}{a} \times 1 = -1 \Rightarrow a = -2$$

حالا محل برخورد دو قطر رو بدست میاریم:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Rightarrow x + 3 = -x + 1 \Rightarrow x = -1, y = 2$$

محل برخورد این دو قطر با محور x ها هم برابر با ۱ و -۳ میشه، پس قاعده مثلث ۴ میشه و ارتفاعش ۲ و

بنابراین مساحت مثلث برابر با $S = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$ میشه.

میدونیم EC دو برابر DF است (به علت تشابه). پس:

۱۳۶- در نقطه‌ای واقع در ناحیه چهارم، دایره C به مرکز (α, α) و شعاع ۴ با دایره $x^2 + y^2 - 2x - y = 1$ مماس درون است.

فاصله مرکز دایره C از مبدأ مختصات کدام است؟

$2.5\sqrt{2}$ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

$0.5\sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

حل: معادله دایره‌ای به مرکز (α, α) و شعاع ۴ به صورت $(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = 16$ می‌شه. وقتی گفته دو دایره مماس درون هستن، یعنی $OO' = r - r'$ معادله گسترده دایره دیگه رو هم مرتب می‌کنیم:

$$(x - 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

پس:

$$OO' = \sqrt{(1 - \alpha)^2 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2} = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2\alpha^2 - 3\alpha + \frac{5}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow 2\alpha^2 - 3\alpha - 5 = 0$$

$$\alpha = -1 \text{ یا } \frac{5}{2}$$

فاصله مرکز دایره C تا مبدا مختصات برابر با $\sqrt{2}|\alpha|$ می‌شه، یعنی یا گزینه ۱ درسته یا ۴. حالا باید ببینیم که کدومش قابل قبوله. اگه $\alpha = -1$ باشه، نقطه تلاقی در ناحیه اول قرار میگیره.

۱۳۷- به ازای چند مقدار طبیعی a ، عدد $\frac{1}{5}$ در بازه $\left[\frac{1}{3a+1}, \frac{1}{2a-3}\right)$ قرار دارد؟			
۴ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)

حل: نامعادله $\frac{1}{3a+1} \leq \frac{1}{5} < \frac{1}{2a-3}$ رو حل میکنیم. چون دنبال مقادیر طبیعی برای a هستیم، یعنی $a \geq 1$ می‌شه که البته با چک کردن ۱ میبینیم که در نامعادله صدق نمیکنه. حالا با خیال راحت میتونیم نامعادله سمت چپی، یعنی $\frac{1}{3a+1} \leq \frac{1}{5}$ رو معکوس کنیم و جهت رو عوض کنیم:

$$3a + 1 \geq 5 \Rightarrow a \geq \frac{4}{3} \Rightarrow a \geq 2$$

نامعادله سمت راست هم همینطور:

$$5 > 2a - 3 \Rightarrow a < 4 \Rightarrow a \leq 3$$

پس فقط دو مقدار $a = 2, 3$ داریم.

۱۳۸- میانگین جملات دنباله حسابی $1, 2, b, c, \dots, 172$ برابر ۸۷ است. مجموع جملات این دنباله کدام است؟			
۱۶۵۳ (۴)	۱۵۶۶ (۳)	۱۴۷۹ (۲)	۱۳۹۲ (۱)

حل: چون میانگین ۸۷ شده، پس میانگین جمله اول و آخر هم باید ۸۷ بشه، پس:

$$\frac{a + 172}{2} = 87 \Rightarrow a = 2$$

تعداد جملات این دنباله برابر است با $1 = \frac{172-2}{10} + 1 = 18$ پس: $\frac{\text{اولی-آخری}}{\text{قدرنسبت}} + 1$

$$S_n = \frac{n}{2}(2 + 172) = \frac{18}{2}(174) = 9 \times 174 = 1566$$

۱۳۹- اگر ۲- یکی از ریشه‌های معادله $x(3x^2 + x + a) = -2$ باشد، حاصل ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۱)

حل: چون ۲- ریشه معادله است، باید در آن صدق کند. پس:

$$(-2)(12 - 2 + a) = -2 \Rightarrow 10 + a = 1 \Rightarrow a = -9$$

پس معادله به صورت $3x^3 + x^2 - 9x + 2 = 0$ که ضرب ریشه‌ها برابر است با $-\frac{2}{3}$. **البته در صورتی میتونیم اینو بگیریم که بدونیم سه ریشه حقیقی داریم.** پس میتونیم این عبارت رو بر $x + 2$ تقسیم کنیم که خارج قسمتش برابر با $3x^2 - 5x + 1$ که دارای دو ریشه‌اس که ضربشون $\frac{1}{3}$ میشه و در ۲- که اون یکی ریشه اس ضرب کنیم، ضرب سه ریشه برابر با $-\frac{2}{3}$ میشه.

۱۴۰- اگر $a + \sqrt{b} - c = 6$ و $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$ باشد، حاصل $\log_3 c$ کدام است؟

-2 (۴) -1 (۳) 1 (۲) 2 (۱)

حل: به جای $a + \sqrt{b}$ میتونیم $6 + c$ رو قرار بدیم، پس:

$$\sqrt{c} + 6 + \sqrt{c} = 3$$

این معادله حداکثر یک جواب داره، چون عبارت سمت چپ یک تابع اکیدا صعودیه. البته در اینجا مطمئنیم یک جواب رو داریم. میتونیم حدس بزنیم یا از گزینه‌ها استفاده کنیم. اگه جواب بخواد گزینه ۱ باشه، یعنی $c = 6$ باید باشه که در این معادله صدق نمیکنه. اگه گزینه ۲ درست باشه، یعنی $c = 2$ باید باشه که باز صدق نمیکنه. اگه گزینه ۳ درست باشه، $c = \frac{1}{4}$ باید باشه که این هم در معادله صدق نمیکنه. پس گزینه ۴ درسته.

مهندس سید امید شفیعی

دانش آموخته مهندسی برق دانشگاه علم و صنعت ایران

در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد

مدرس کنکور و دانشگاه

ایمیل: seyedomid.shafiei@gmail.com