

۱۱۱- رأس سهمی $y = -8x^2 + ax + 1$ و صفرهای آن، رئوس مثلثی با مساحت $\frac{27}{64}$ است. اگر بخش بزرگ تری از مساحت

مثلث در ناحیه دوم باشد، مقدار a کدام است؟

(۱) -۲

(۲) $4\sqrt{2}$

(۳) ۲

(۴) $-4\sqrt{2}$

$$x_5 \mid -\frac{a}{2(-8)} = \boxed{\frac{a}{16}}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \left| y_{max} \times |x_1 - x_2| \right|$$

$$\frac{27}{64} = \frac{1}{2} \times \left| -\frac{a}{16} \times \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \right|$$

$$\frac{27}{32} = \frac{15\sqrt{\Delta}}{4 \times 16}$$

$$15\sqrt{\Delta} = 8 \times 27$$

$$\Delta^2 \times \Delta = ((2 \times 2)^2)^2$$

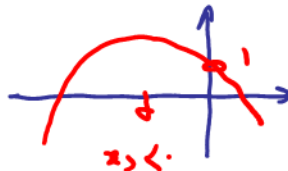
$$\Delta^3 = (6^2)^2$$

$$\Delta = 36$$

$$\Delta = a^2 - 4(-8)(1)$$

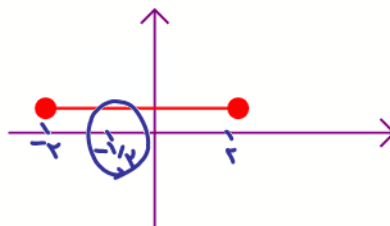
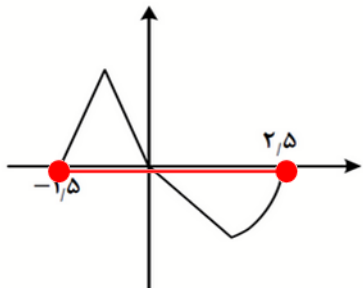
$$a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2$$

$$a = -2$$



۴/۱۰

۱۱۲- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده و $g(x) \in f(x + \frac{1}{2})$ است. اگر $h = \frac{f}{g}$ باشد، دامنه h شامل چند عدد صحیح است؟



(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

$$f(x) = 0 \Rightarrow x \in [-1, 1]$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow x \in [-3/2, 1/2]$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$



۱۱۳- هر کدام از ریشه‌های معادله‌ای $x^2 + 1/35x - 1/3 = 0$ واحد از یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + 1/35x - 1/3 = 0$ کمتر است. حاصل ضرب ریشه‌های آن معادله کدام است؟

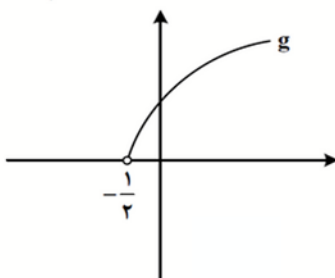
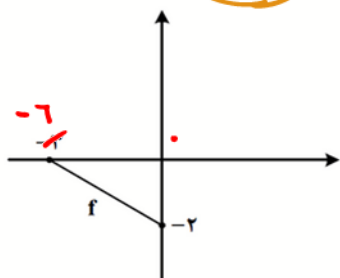
$-1/375$ (۴) $-1/3$ (۳) $-0/3$ (۲) $-0/375$ (۱) ✓

$$(x + \frac{1}{35})^2 + \frac{135}{11} (x + \frac{1}{35}) - \frac{13}{11} = 0$$

$$\frac{1}{11} + \frac{135}{22} - \frac{13}{11}$$

$$\frac{5}{22} + -\frac{125}{22} \rightarrow -\frac{120}{22} = -\frac{60}{11}$$

۱۱۴- نمودارهای توابع f و g به صورت زیر رسم شده‌اند. اگر بازه I دامنه $\text{gof}(\frac{1}{2}x)$ باشد، طول بازه I کدام است؟



۰/۵ (۱)
 ۱ (۲)
 ۱/۵ (۳)
 ۳ (۴)

$$f_{(1/2x)} = [-6, 0] \quad (f \in \mathbb{R})$$

$$(-1/2, +\infty)$$

$$-\frac{1}{2}x - 2 > -1/2 \rightarrow -2x - 12 > -2$$

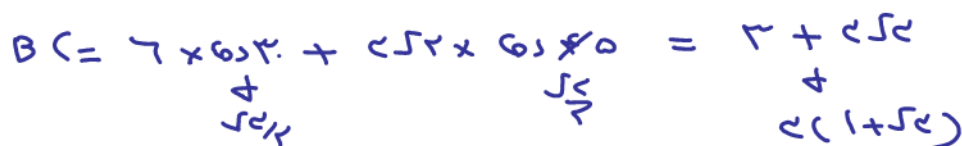
$$-2x > 9 \rightarrow x < -9/2$$

$$\text{ج. نهایی} : [-6, -4.5] \rightarrow L = 1.5$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{2} \quad (1)$$

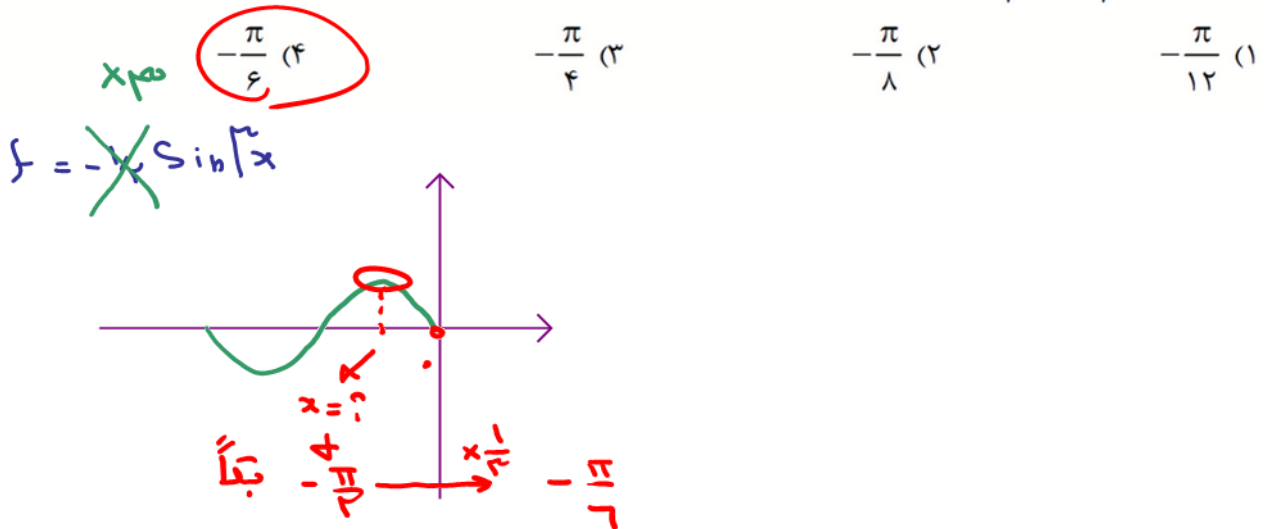
$$\begin{array}{r} |S| > |C| \\ + \\ \underbrace{S - C}_{\ominus} \end{array}$$

$$s - c = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$3(1 + \sqrt{2}) \quad (1)$$




۱۱۷- تابع $f(x) = -\frac{1}{2} \cos(\frac{3\pi}{2} + 3x)$ روی بازه $[a, 0]$ اکیداً نزولی است. کمترین مقدار a کدام است؟



۱۱۸- تعداد جواب‌های معادله $\sin(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{2} + x) + 1 = 2 \sin(\pi - x)$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$-s x - s + 1$$

$$\underbrace{\quad}_{1+s^2}$$

$$1 + s^2 = 2s$$

$$s^2 - 2s + 1 = 0 \rightarrow s = 1 \quad \text{معادله}$$

$$\sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \quad - \frac{3\pi}{2}$$

۱۱۹- حاصل $1 - \log_4 10$ کدام است؟

۰٫۵ (۲)

۲٫۵ (۱)

۱٫۵ (۴)

۰٫۲۵ (۳)

۰٫۰۵ (۴)

$$(2^{-2})^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = 2^{-2} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4 \Rightarrow \frac{1}{4} = 2^{-2}$$

۱۲۰- اگر اعداد a و b به داده‌های زیر اضافه شوند، چارک اول و سوم داده‌ها تغییر نمی‌کند. میانگین a و b کدام است؟

۴۵، ۱۲، ۱۵، ۲۳، ۱۶، ۱۸، ۲۴، ۱۷، ۴۲، ۲۵، ۱۰

↓

۲۰ (۴)

۲۴ (۳)

۲۸ (۲)

۳۰ (۱)

۱۰ ۱۲ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۴۲

 $n = 11$ ↓
 a Q_2 ↓
 b

$$\frac{14 + 24}{2} = 19$$



صفحه:

موضوع:

$$\frac{\sqrt{5}}{1a1} = \sqrt{5^2 - 4^2}$$

۱۲۱- نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x+a}$ در دو نقطه نمودار تابع وارونش را قطع می کند. اگر اختلاف طول این نقاط $2\sqrt{10}$ باشد.

کدام مورد می تواند مقدار a باشد؟ ($a \neq 0$)

(۲) ۶

(۱) ۲

(۴) ۱۰

(۳) ۸

۹۲ - ۱

$$f = \frac{1}{x+a}$$

$$f^{-1} = \frac{-ax+1}{x}$$

$$\frac{1}{x+a} = \frac{-ax+1}{-x}$$

$$-x = ax^2 - x + ax - a$$

$$ax^2 + ax - a = 0 \rightarrow x^2 + ax - 1 = 0$$

$$\sqrt{a^2 + 4} = 2\sqrt{10}$$

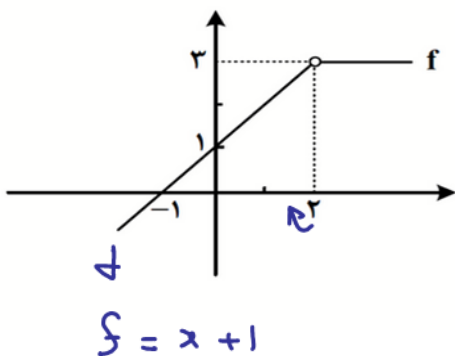
$$a^2 + 4 = 40 \rightarrow a = \pm 6$$

$$\frac{1}{x+a} = 2$$

۴

$$x^2 + ax - 1 = 0$$

۱۲۲- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3-f(x)}{x^2-4}$ کدام است؟



محقق بیه !
۰/۰

$$H.O.P = \frac{1}{2 \times 2} = -1/4$$

$$-\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{5} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (4)$$



۱۲۳- اگر $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x-|x||}{x^2+2x} = a$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \tan(ax)$ کدام است؟

(۱) ۱
(۲) صفر
(۳) $-\infty$
(۴) $+\infty$

حل: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x-|x||}{x^2+2x} = a$
 $\frac{|2x|}{x^2+2x} \rightarrow -\frac{2}{x+2} = a$
 $a = -1$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \tan(ax) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \tan(-x)$
 $\rightarrow -\infty$

نمودار دایره یونیت را ببینید.

۱۲۴- تابع f با ضابطه $f(x) = 1 + \frac{2x}{a}$ است. اگر تابع $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq -1 \\ f^{-1}(x) & x < -1 \end{cases}$ پیوسته باشد و محور x ها را در

سمت مثبت محور قطع کند، مقدار $g(-1)$ کدام است؟

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) -۱

(۱) -۴

$$g = \begin{cases} 1 + \frac{2x}{a} & x \geq -1 \\ \frac{a}{2}x - \frac{a}{2} & x < -1 \end{cases}$$

$$(-1)^+ = (-1)^- = (-1)$$

$$1 - \frac{2}{a} = -1 \rightarrow -a^2 = a - 2$$

$$a^2 + a - 2 = 0 \rightarrow (a+2)(a-1) = 0$$

پس $a = 1$ یا $a = -2$

$$a = 1 \rightarrow \begin{cases} 2x+1 & x \geq -1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & x < -1 \end{cases}$$

$$a = -2 \rightarrow \begin{cases} 1-x & x \geq -1 \\ -x-1 & x < -1 \end{cases}$$

$$g(-1) = 2$$



صفحه:

موضوع:

۱۲۵- اختلاف شیب نیم‌مماس‌های چپ و راست بر منحنی $y = |x^2 - 4|$ در $x = 2$ کدام است؟
 (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۳

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} + \quad - \quad - \quad + \\ + \quad - \quad - \quad + \end{array} \\
 & \begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ (-4^2 + 4)^- \quad (2^2 - 4)^- \\ \downarrow \quad \downarrow \\ -24 \quad 24 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ x=2 \quad x=2 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ |(-4)| - |(2)| = 8 \end{array}
 \end{aligned}$$

۱۲۶- یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \frac{9t+3}{\sqrt{t}}$ گرم است. آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=1$ چند گرم است؟

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} 9\sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}} \\ \rightarrow \end{array} \\
 & \begin{array}{c} 1.5 \quad (4) \quad 3 \quad (3) \quad 7.5 \quad (2) \quad 17 \quad (1) \end{array} \\
 & w'(t) = \frac{9}{2} \times t^{-1/2} - \frac{3}{2} \times t^{-3/2} = 3
 \end{aligned}$$



صفحه:

موضوع:

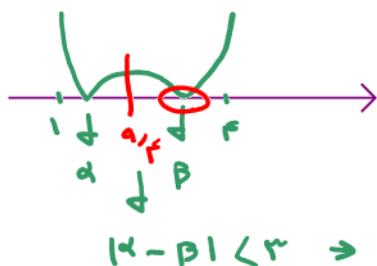
۱۲۷- برای چند مقدار طبیعی a ، تابع $f(x) = |2x^2 - 9x + a|$ در بازه $[1, 4]$ دارای دو مینیمم نسبی است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)



$$\langle a, p \rangle \cdot \langle a, q \rangle \Rightarrow \langle a, p \rangle \cdot \langle a, q \rangle > 0 \Rightarrow \langle a, p \rangle \cdot \langle a, q \rangle < 0$$

$$5^2 - 4 \cdot 6 < 9$$

$$9 > 9, 0$$

$$2x^2 - 9x + 17$$

$$x \leq 2$$

$$y = x$$

۱۲۸- خطی در نقطه (a, a) بر نمودار تابع $y = \sqrt{2-x}$ مماس شده و محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. مساحت مثلث OAB کدام است؟

۱,۷۵ (۴)

۲,۲۵ (۳)

۳,۵ (۲)

۴,۵ (۱)

$$a = \sqrt{2-a} \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$(\sqrt{2-a})' = \frac{-1}{2\sqrt{2-a}} \quad \begin{cases} a = 1 \rightarrow m = -1/2 \\ y - 1 = -1/2(x - 1) \end{cases}$$

$$S = 1/2 \times 2 \times 1/2 = 1/4$$

$$S = 1/2 \times 2 \times 1/2 = 1/4$$

[illegible]



۱۳۱- دو دانش آموز، هر کدام تابلوهایی با شماره‌های ۱ تا ۸ در اختیار دارند، هر کدام به تصادف یک تابلو را انتخاب کرده و به هم نشان می‌دهند. اگر عدد روی تابلوی یکی، مضرب دیگری باشد، هر دو برنده جایزه می‌شوند. چند درصد احتمال دارد که آنها برنده شوند؟

Handwritten solution for problem 131:

Table 1 (left):

تابلو	شماره
۱	۱
۲	۲
۳	۳
۴	۴
۵	۵
۶	۶
۷	۷
۸	۸

Table 2 (middle):

تابلو	شماره
۱	۱
۲	۲
۳	۳
۴	۴
۵	۵
۶	۶
۷	۷
۸	۸

Table 3 (right):

تابلو	شماره
۱	۱
۲	۲
۳	۳
۴	۴
۵	۵
۶	۶
۷	۷
۸	۸

Handwritten calculations:

$$۵۰ (۳)$$

$$۶۲,۵ (۲)$$

$$۴۰ (۱)$$

$$۷۲,۵ (۴)$$

Handwritten notes:

حالت ۱: ۱ → ۱, ۲ → ۲, ۳ → ۳, ۴ → ۴, ۵ → ۵, ۶ → ۶, ۷ → ۷, ۸ → ۸

حالت ۲: ۱ → ۱, ۲ → ۲, ۳ → ۳, ۴ → ۴, ۵ → ۵, ۶ → ۶, ۷ → ۷, ۸ → ۸

حالت ۳: ۱ → ۱, ۲ → ۲, ۳ → ۳, ۴ → ۴, ۵ → ۵, ۶ → ۶, ۷ → ۷, ۸ → ۸

Handwritten formula:

$$۸ + ۲۴ = ۳۲ \times ۱۲ \text{ حالت}$$

۱۳۲- هر یک از اعداد ۱ تا ۹ روی یک کارت نوشته شده است. سه کارت به تصادف انتخاب می‌شود. با کدام احتمال هر سه عدد روی کارت فرد هستند به طوری که می‌دانیم مجموع آنها نیز فرد است؟

Handwritten solution for problem 132:

Table 1 (left):

تابلو	شماره
۱	۱
۲	۲
۳	۳
۴	۴
۵	۵
۶	۶
۷	۷
۸	۸
۹	۹

Table 2 (middle):

تابلو	شماره
۱	۱
۲	۲
۳	۳
۴	۴
۵	۵
۶	۶
۷	۷
۸	۸
۹	۹

Table 3 (right):

تابلو	شماره
۱	۱
۲	۲
۳	۳
۴	۴
۵	۵
۶	۶
۷	۷
۸	۸
۹	۹

Handwritten calculations:

$$\frac{1}{5} (۴)$$

$$\frac{1}{3} (۳)$$

$$\frac{1}{4} (۲)$$

$$\frac{1}{2} (۱)$$

Handwritten notes:

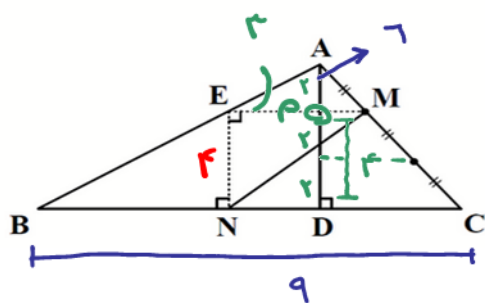
حالت ۱: ۱ → ۱, ۲ → ۲, ۳ → ۳, ۴ → ۴, ۵ → ۵, ۶ → ۶, ۷ → ۷, ۸ → ۸, ۹ → ۹

حالت ۲: ۱ → ۱, ۲ → ۲, ۳ → ۳, ۴ → ۴, ۵ → ۵, ۶ → ۶, ۷ → ۷, ۸ → ۸, ۹ → ۹

حالت ۳: ۱ → ۱, ۲ → ۲, ۳ → ۳, ۴ → ۴, ۵ → ۵, ۶ → ۶, ۷ → ۷, ۸ → ۸, ۹ → ۹

Handwritten formula:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$



۱۳۳- در شکل زیر، $AD=6$ و $BC=9$ است. طول MN چقدر است؟

$$\frac{1}{3} = \frac{AP}{6}$$

$$AP = 2$$

(۱) $3,5\sqrt{2}$

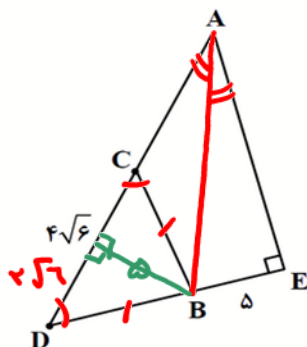
(۲) $3\sqrt{2}$

(۳) $4,5$

(۴) 5

$$\frac{EM}{9} = \frac{1}{3} \rightarrow EM = 3$$

۱۳۴- در شکل زیر، $BC = BD$ و B روی نیمساز زاویه A قرار دارد. طول BD چند برابر طول ارتفاع وارد بر DC است؟



$$\sqrt{24 + 25}$$

$$= \sqrt{49}$$

$$= 7$$

$$\frac{7}{5} = 1,4$$

(۱) $1,2$

(۲) $1,3$

(۳) $1,4$

(۴) $1,5$



$$\frac{y}{a} = -1 \rightarrow a = -2$$

۱۳۵- قطرهای یک بیضی روی خطوط $y = x + 3$ و $y - 2x = -2$ قرار دارند. اگر مرکز بیضی و محل برخورد قطرهای بیضی با محور x ها، رئوس یک مثلث باشند، مساحت این مثلث کدام است؟

$$3,5 \quad (4)$$

$$4,5 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

$$-2(x+3) - 2y = -2$$

$$-4x = 4$$

$$\text{I} \quad \begin{array}{c|c} x = -1 \\ y = 2 \end{array}$$

$$\text{II} \quad \begin{array}{c|c} -2 \\ \cdot \end{array}$$

$$\text{III} \quad \begin{array}{c|c} 1 \\ \cdot \end{array}$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

۱۳۶- در نقطه‌ای واقع در ناحیه چهارم، دایره C به مرکز (α, α) و شعاع ۴ با دایره $x^2 + y^2 - 2x - y = 1$ مماس درون است. فاصله مرکز دایره C از مبدأ مختصات کدام است؟

$$2,5\sqrt{2} \quad (4)$$

$$2\sqrt{2} \quad (3)$$

$$0,5\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{2} \quad (1)$$



$$OO' = |R - R'| \rightarrow OO' = \frac{5}{2}$$

$$R' = \frac{1}{2} \sqrt{4+1+4} = \frac{3}{2}$$

$$O \mid \begin{array}{c} 1 \\ 1,5 \end{array}$$

$$(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 1,5)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 + \alpha^2 - 3\alpha + 2,25 = \frac{25}{4}$$

$$2\alpha^2 - 5\alpha - 5 = 0$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 5 \\ 5,5 \end{array} \quad \begin{array}{c} 5 \\ 5,5 \end{array}$$

$$\frac{5,5}{3,5} \rightarrow OC = 2,5\sqrt{2}$$



صفحه:

موضوع:

۱۳۷- به ازای چند مقدار طبیعی a ، عدد $\frac{1}{5}$ در بازه $\left[\frac{1}{3a+1}, \frac{1}{2a-3} \right)$ قرار دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\frac{1}{3a+1} \leq \frac{1}{5} < \frac{1}{2a-3}$$

$$5 \leq 3a+1$$

$$\frac{4}{3} \leq a$$

$$\frac{1}{2a-3} - \frac{1}{5} > 0$$

$$\frac{5-2a+3}{5(2a-3)} > 0 \rightarrow$$

$$\frac{-(a+1)}{5(2a-3)} > 0$$

$$-\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right] -$$

$$\text{پس: } \frac{4}{3} < a < 2$$

۱۳۸- میانگین جملات دنباله حسابی $a, 12, b, c, \dots, 172$ برابر ۸۷ است. مجموع جملات این دنباله کدام است؟

۱۶۵۳ (۴)

۱۵۶۶ (۳)

۱۴۷۹ (۲)

۱۳۹۲ (۱)

$$\frac{a+172}{2} = 87 \rightarrow a = 2$$

$$172 = 2 + (n-1) \times 1$$

$$n = 171$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \times n$$

$$\frac{2+172}{2} \times 171 = 1566$$

۱۳۹- اگر -2 یکی از ریشه‌های معادله $x(3x^2 + x + \cancel{2}) = -2$ باشد، حاصل ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$a = -9$$

$$\frac{-2}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$3x^3 + x^2 - 10x + 2$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 1 \quad -9 \quad 2 \\ -2 \quad \underline{3 \quad -5 \quad 1 \quad 0} \end{array}$$

$$3x^2 - 5x + 1 \rightarrow P = 1, a = 1/2$$

۱۴۰- اگر $a + \sqrt{b} - c = 6$ و $\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{c} = 3$ باشد، حاصل $\log_2 c$ کدام است؟

$$-2 \quad (4)$$

$$\begin{array}{r} \cancel{7+c} \quad -1 \quad (3) \\ \downarrow \\ 2-c \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7+c \quad 1 \quad (2) \\ \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \downarrow \\ a + \sqrt{b} = 7 + c \end{array}$$

$$\sqrt{7+c} = c - \sqrt{c}$$

$$7+c = c^2 - 2\sqrt{c} + c$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{c} + c = 1/2$$