



آزمون شماره ۲
۱۳ شهریور ۱۴۰۵
پایه دوازدهم
رشته ریاضی فیزیک

دفترچه شماره ۱ از ۲

تعداد سؤال: ۳۰ مدت پاسخگویی: ۵۵ دقیقه

نام درس	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	طراحان (به ترتیب حروف الفبا)
حسابان	۱۲	۱	۱۲	۲۳ دقیقه	حسین شفیع زاده علیرضا نداف زاده
هندسه	۹	۱۳	۲۱	۱۶ دقیقه	علیرضا فعلی صبا مهدوی
گسسته و آمار	۹	۲۲	۳۰	۱۶ دقیقه	علیرضا شریف خطیبی علی اصغر شریفی نیما مهندس محمد رضا میبیدی

حق چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز دبیرستان دوره دوم علامه حلی (۱) تهران مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.



@Hellischool_12

Telegram: @konkur_in

۱- در بازه‌ای از اعداد مثبت که نمودار تابع $y = x^3$ پایین‌تر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد، تابع $f(x) = \left| \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 1 \right|$

چگونه است؟

(۴) وارون‌ناپذیر

(۳) غیریکنوا

(۲) اکیداً صعودی

(۱) اکیداً نزولی

۲- اگر نمودار تابع f به صورت روبه‌رو و $g(x) = f(x + \frac{1}{3})$ باشد، دامنه تابع $h(x) = \frac{f'(x)}{-2g(x)}$

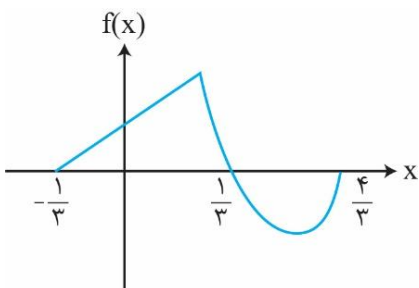
شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) صفر



۳- نمودار تابع $y = \sqrt[3]{2x-1} + 2$ را ابتدا نسبت به محور عرض قرینه، سپس طول همه نقاط واقع بر آن را دو برابر و در نهایت نمودار حاصل را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم. نمودار جدید از کدام ناحیه صفحه مختصات عبور نمی‌کند؟

(۲) دوم

(۱) اول

(۴) چهارم

(۳) سوم

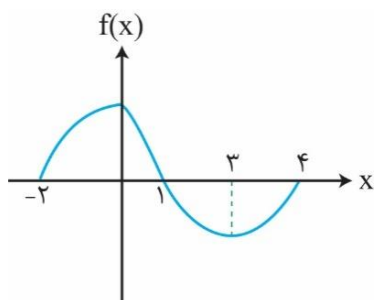
۴- نمودار تابع f به صورت زیر است. اگر تابع $y = 2f(ax+1)$ روی بازه $[a, 0]$ صعودی و بازه (b, c) مجموعه مقادیر قابل قبول برای a باشد، طول بازه (b, c) کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) $\sqrt{3}$

(۴) $\frac{2}{3}$



۵- اگر $f(x) = (\frac{1}{\sqrt{3}})^{2x+1} - 1$ باشد، مجموعه جواب‌های نامعادله $f^{-1}(\sqrt{x+1}) < f^{-1}(3x+1)$ کدام است؟

(۲) $(-\frac{2}{3}, 0)$

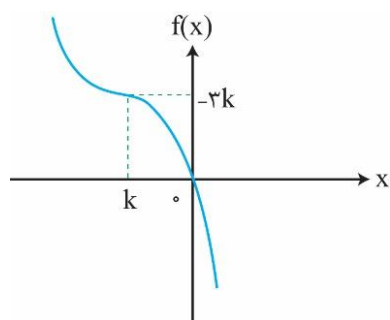
(۱) $(-\frac{2}{3}, +\infty)$

(۴) $[-1, -\frac{1}{3}]$

(۳) $(-\frac{1}{3}, 0)$

محاسبات

۶- نمودار تابع f در شکل زیر بدون انبساط و انقباض افقی یا عمودی، از روی نمودار تابع $y = x^3$ به دست آمده است. حاصل



$f^{-1}(-21\sqrt{3})$ کدام است؟

(۱) $-\sqrt{3}$

(۲) $-2\sqrt{3}$

(۳) $\sqrt{3}$

(۴) $2\sqrt{3}$

۷- مجموع اعضای صحیح برد تابع $y = 2x - 3 \left[\frac{2x+7}{3} \right]$ کدام است؟

(۴) -۱۱

(۳) -۱۲

(۲) -۱۵

(۱) -۱۸

۸- اگر دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - (m-1)x + m}}$ شامل دو عدد صحیح باشد، اختلاف بیشترین و کمترین مقدار

ممکن برای m کدام است؟

(۴) ۶

(۳) ۵

(۲) ۴

(۱) ۳

۹- توابع $f(x) = ax + 3$ و $g(x) = \frac{x}{a} - 3$ مفروض‌اند. اگر دو تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ با یکدیگر برابر باشند، حاصل $\left(\frac{f}{g}\right)(a)$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۲) -۱

(۱) -۲

۱۰- اگر $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \leq 2 \\ x+2 & x > 2 \end{cases}$ و $f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x-1 & f^{-1}(x) > 4 \\ 3-x & f^{-1}(x) < 4 \end{cases}$ باشد، مقدار $g(5) - g(3)$ کدام است؟

(۴) ۴

(۳) -۲

(۲) ۹

(۱) -۷

۱۱- تابع $f(x) = \begin{cases} 6x+8 & x \geq 3 \\ 8-4mx-x^2 & x < 3 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک است. اگر m عددی صحیح باشد، مقدار $f(-2)$ کدام است؟

(۴) -۱۸

(۳) -۱۵

(۲) -۱۲

(۱) -۱۰

۱۲- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x+4}{x+a}$ نمودار تابع وارون خود را در نقاطی به طول‌های $x = b+3$ و $x = b-2$ قطع می‌کند.

مقدار $a+b$ کدام است؟

(۴) ۴

(۳) -۳

(۲) ۲

(۱) -۱

محاسبات

۱۳- ماتریس مربعی $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر $A^2 - 7A + kI = \bar{0}$ باشد، ماتریس A^{-1} کدام است؟

(۱) $7I - A$

(۲) $\frac{1}{10}(A - 7I)$

(۳) $\frac{1}{10}(10I - A)$

(۴) $\frac{1}{10}(7I - A)$

۱۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، درایه سطر اول و ستون دوم ماتریس $(ABA^{-1})^{-1}$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) ۰

(۴) -۱

۱۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(I + A)^5 - (I - A)^5$ کدام است؟

(۱) $5A + 10I$

(۲) $10I$

(۳) $10A$

(۴) $5A$

۱۶- دستگاه معادلات $\begin{cases} (k-2)x + 3y = 6 \\ (k+3)y + 2x = 4 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار k فاقد جواب است؟

(۱) -۴

(۲) ۱ یا ۳

(۳) ۱

(۴) ۳ یا -۴

۱۷- اگر $(3A - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $3A(3A - 2I)^{-1}$ کدام است؟

(۱) ۱۲

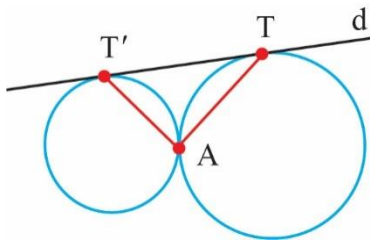
(۲) ۵

(۳) $\frac{1}{12}$

(۴) $\frac{1}{5}$

محاسبات

۱۸- در شکل زیر، خط d به ترتیب در نقاط T و T' بر دو دایره مماس خارج C و C' مماس شده است. اگر نقطه تماس دو دایره را



A بنامیم و بدانیم $AT' = 120^\circ$ و مساحت مثلث ATT' برابر ۶ است، طول TT' کدام است؟

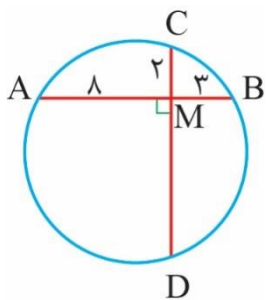
(۲) $4\sqrt{3}$

(۴) $2\sqrt{3}$

(۱) $4\sqrt{3}$

(۳) $2\sqrt{3}$

۱۹- در دایره شکل زیر، وترهای AB و CD برهم عمودند. اگر $AM = 8$ ، $CM = 2$ و $BM = 3$ باشد، طول شعاع دایره کدام



است؟

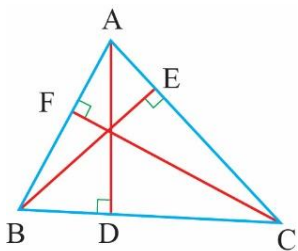
(۱) $\frac{\sqrt{221}}{2}$

(۲) $\frac{2\sqrt{221}}{3}$

(۳) ۸

(۴) $\frac{17}{2}$

۲۰- در شکل روبه‌رو، ارتفاع‌های مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر $\hat{FDE} = 50^\circ$ باشد، اندازه زاویه A



کدام است؟

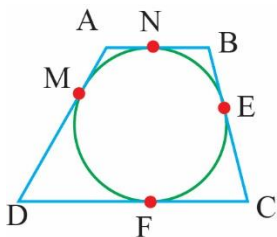
(۱) 30°

(۲) 45°

(۳) 55°

(۴) 65°

۲۱- مطابق شکل زیر، در داخل دوزنقه $ABCD$ دایره‌ای محاط شده است. اگر $AB = 7$ ، $BE = 4$ و $CE = 9$ باشد، مساحت



دوزنقه کدام است؟

(۱) ۱۴۴

(۲) ۱۵۶

(۳) ۱۶۸

(۴) ۱۸۲

محاسبات

۲۲- کدام یک از روابط زیر در مجموعه اعداد طبیعی الزاماً درست نیست؟

$$(1) \quad 360 \mid n^2 \Rightarrow 60 \mid n \quad (2) \quad 5 \mid 3n \Rightarrow 5 \mid n$$

$$(3) \quad n + 7 \mid (n + 6)! \quad (4) \quad 6 \mid n^2 + 5n$$

۲۳- به ازای چند عدد طبیعی n در بازه $(30, 50)$ ، عدد $(n-1)!$ بر n بخش پذیر نیست؟

$$(1) \quad 4 \quad (2) \quad 5$$

$$(3) \quad 6 \quad (4) \quad 7$$

۲۴- برای عدد اول P و عدد طبیعی n ، اگر $P = n^4 + 4$ باشد، آنگاه برای P چند مقدار متمایز به دست می آید؟

$$(1) \quad 1 \quad (2) \quad 2$$

$$(3) \quad \text{صفر} \quad (4) \quad \text{بیشتر از ۲}$$

۲۵- به ازای کدام مقدار طبیعی n ، رابطه $13 \mid 5^n + 1$ برقرار است؟

$$(1) \quad 101 \quad (2) \quad 102$$

$$(3) \quad 103 \quad (4) \quad 104$$

۲۶- اگر برای دو عدد طبیعی x و y داشته باشیم $52 = 6xy + 3x - 2y$ ، حاصل $x + y$ کدام است؟

$$(1) \quad 7 \quad (2) \quad 8$$

$$(3) \quad 9 \quad (4) \quad 10$$

۲۷- برای اعداد طبیعی a و b ، اگر $(a, b(a+b+1)) = 1$ باشد، بزرگ ترین عددی که همواره عبارت $(a^4 + 31) \times (a+1) \times 5b$ بر آن بخش پذیر می شود، کدام است؟

$$(1) \quad 40 \quad (2) \quad 80$$

$$(3) \quad 160 \quad (4) \quad 320$$

۲۸- اگر برای اعداد صحیح a, b و c بدانیم $b \mid a$ و $c^2 \mid b$ ، حاصل $[abc^3, b^4a^2]$ به کدام صورت نمی تواند باشد؟ ($abc \neq 0$)

$$(1) \quad 4k + 3 \quad (2) \quad 3k + 1$$

$$(3) \quad 6k + 4 \quad (4) \quad 5k + 1$$

۲۹- مجموع خارج قسمت و باقی مانده تقسیم $11 - 23!$ بر عدد ۲۳ کدام است؟

$$(1) \quad 22! + 23 \quad (2) \quad 23! - 5 \quad (3) \quad 23! + 11 \quad (4) \quad 22! + 11$$

۳۰- در تقسیم عدد طبیعی a بر b ، باقی مانده و خارج قسمت به ترتیب برابر ۲۶ و ۱۲ می باشند. اگر مقسوم ثابت باشد، حداکثر چند واحد می توان به مقسوم علیه اضافه کرد به طوری که خارج قسمت بدون تغییر باقی بماند؟

$$(1) \quad 1 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 3 \quad (4) \quad 5$$

محاسبات



آزمون شماره ۲
۱۳ شهریور ۱۴۰۵
پایه دوازدهم
رشته ریاضی فیزیک

دفترچه شماره ۲ از ۲

مدت پاسخگویی: ۵۵ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۰

نام درس	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	طراحان (به ترتیب حروف الفبا)
فیزیک	۲۰	۳۱	۵۰	۳۰ دقیقه	محمدجواد حیدری پوریا دیارکجوری ابوالفضل علیدوست
شیمی	۲۰	۵۱	۷۰	۲۵ دقیقه	حسن ایزدی مسعود خوشطینت محمد رضا زهره‌وند سیدصمد صفوی حسین نصراله‌ی

حق چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز دبیرستان دوره دوم علامه حلی (۱) تهران مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.



@Hellischool_12

Telegram: @konkur_in

۳۱- معادله مکان-زمان متحرکی که در مسیر مستقیم حرکت می کند، در SI به صورت $x = -\frac{5}{8}t^2 + 20t - 12$ است. سرعت

متوسط در ۴ ثانیه دوم حرکت، چند برابر سرعت متوسط در ۶ ثانیه چهارم است؟

(۱) -۲

(۲) $-\frac{3}{5}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{8}{5}$

۳۲- متحرکی از حال سکون روی خط راست و با شتاب ثابت شروع به حرکت می کند. جابه جایی متحرک در ۲ ثانیه سوم حرکت، چند برابر جابه جایی آن در ثانیه سوم حرکت است؟

(۱) $\frac{11}{5}$

(۲) ۲

(۳) $\frac{9}{5}$

(۴) ۴

۳۳- ذره ای روی محور x ها، با شتاب ثابت و از حال سکون شروع به حرکت می کند. اگر سرعت ذره در مکان های $x_1 = 10m$ و $x_2 = 35m$ ، به ترتیب $v_1 = 8 \frac{m}{s}$ و $v_2 = 12 \frac{m}{s}$ باشد، مکان اولیه متحرک بر حسب متر کدام است؟

(۱) -۱۸

(۲) -۱۰

(۳) -۴۰

(۴) -۵۰

۳۴- خودرویی در مسیر مستقیم با سرعت ثابت $40 \frac{m}{s}$ در حرکت است که راننده با دیدن مانعی در جاده ترمز کرده و متوقف می شود. زمان واکنش راننده $0.5s$ بوده و خودرو در ۳ ثانیه آخر حرکت ۱۸ متر طی کرده است. از لحظه دیدن مانع توسط راننده تا توقف کامل، خودرو چه مسافتی را طی کرده است؟

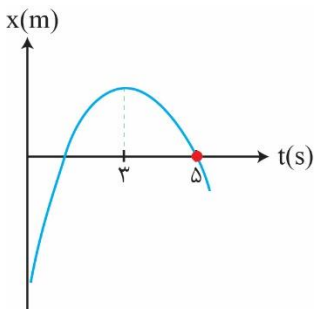
(۱) ۲۰۰ متر

(۲) ۲۲۰ متر

(۳) ۴۰۰ متر

(۴) ۴۲۰ متر

۳۵- نمودار مکان-زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می کند، به صورت سهمی مقابل است. اگر تندی متوسط در ۵ ثانیه اول



$\frac{m}{s}$ ۶٫۵ باشد، سرعت متوسط در همین بازه چند متر بر ثانیه است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۲٫۵

(۴) ۳٫۵

۳۶- قطاری به طول ۱۰۰ متر که با سرعت $۴۵ \frac{km}{h}$ در حال حرکت در مسیری مستقیم است، در مسیر خود به تونلی به طول

$۰٫۱۲۵ km$ می رسد. قطار چند ثانیه پس از ورود به تونل، به طور کامل آن را ترک می کند؟

(۱) ۱۸

(۲) ۱۲

(۳) ۶

(۴) ۲۴

۳۷- متحرکی روی مسیری مستقیم برای رفتن از A به B، نصف زمان را با سرعت متوسط v و نصف دیگر زمان را با سرعت متوسط

$\frac{v}{۲}$ طی می کند و در برگشت از B به A، نصف مسیر را با سرعت متوسط $\frac{v}{۲}$ و نصف دیگر مسیر را با سرعت متوسط v می پیماید.

تندی متوسط متحرک در کل مسیر چند برابر v است؟

(۱) $\frac{۱۲}{۱۷}$

(۲) $\frac{۳}{۱۷}$

(۳) $\frac{۶}{۱۷}$

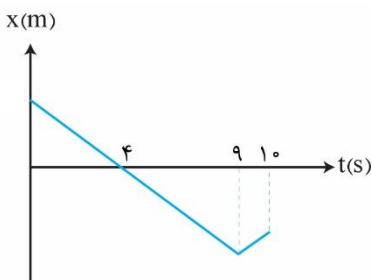
(۴) $\frac{۷}{۱۷}$

۳۸- نمودار مکان-زمان متحرکی مطابق شکل زیر است و تندی متحرک در قسمت اول حرکت، نصف تندی آن در قسمت دوم

است. اگر مسافت طی شده توسط متحرک در ۱۰ ثانیه اول، ۴۸ متر بیش تر از اندازه جابه جایی متحرک در همین بازه زمانی باشد، در

این مدت بیشترین فاصله متحرک از نقطه شروع حرکتش چند متر است و در صورتی که متحرک بدون تغییر جهت با سه برابر

تندی قسمت اول به حرکت ادامه دهد، چند ثانیه بعد به مبدأ مکان می رسد؟



(۱) ۱ و ۴۸

(۲) ۱٫۲ و ۴۸

(۳) ۱ و ۱۰٫۸

(۴) ۱٫۲ و ۱۰٫۸

۳۹- متحرکی که با شتابی ثابت و در مسیری مستقیم حرکت می کند، در هر ۲ ثانیه یک متر کمتر از ۲ ثانیه قبل می پیماید. اگر این متحرک پس از ۵۷۸ متر جابه جایی متوقف شود، اندازه سرعت اولیه آن چند متر بر ثانیه بوده است؟

(۱) ۱۷-

(۲) ۱۷

(۳) ۸/۵-

(۴) ۸/۵

۴۰- متحرکی با شتاب ثابت روی محور x در حال حرکت است و در مبدأ زمان، در جهت مثبت محور x از مبدأ مکان عبور می کند. اگر تندی متوسط متحرک در ۶ ثانیه اول حرکت $10 \frac{m}{s}$ و بردار سرعت متوسط آن در این مدت $6 \vec{i} (\frac{m}{s})$ باشد، سرعت متحرک در

لحظه $t = 6s$ در SI کدام است؟

(۱) ۱۲-

(۲) ۲۴

(۳) ۲۴-

(۴) ۱۲

۴۱- متحرکی با شتابی به بزرگی $4 \frac{m}{s^2}$ در جهت مثبت محور x در حال حرکت است. اگر سرعت متوسط متحرک در ۲ ثانیه دوم، نصف سرعت متوسط آن در ۲ ثانیه اول باشد، تندی اولیه حرکت آن چند متر بر ثانیه است؟

(۱) ۲۸

(۲) ۱۴

(۳) ۴۰

(۴) ۲۰

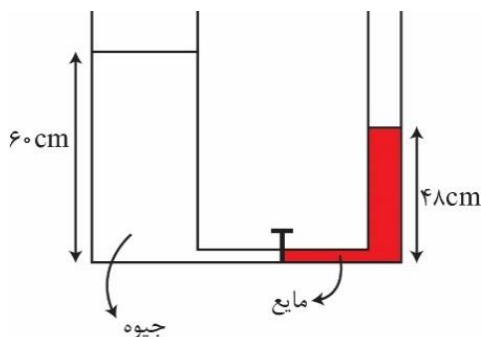
۴۲- در لوله U شکل زیر سطح مقطع شاخه سمت چپ سه برابر سطح مقطع شاخه سمت راست است. اگر در شاخه سمت راست تا ارتفاع ۴۸ سانتی متر مایعی به چگالی $3/4 \frac{g}{cm^3}$ و در شاخه سمت چپ تا ارتفاع ۶۰ سانتی متر جیوه به چگالی $13/6 \frac{g}{cm^3}$ بریزیم و سپس شیر ارتباطی دو لوله را باز کنیم در حالت تعادل سطح جیوه نسبت به حالت اولیه خود چند سانتی متر جابه جا می شود؟ (حجم مایع داخل لوله رابط افقی ناچیز است).

(۱) ۶

(۲) ۱۲

(۳) ۱۰

(۴) ۲۴



۴۳- در یک لوله U شکل تا ارتفاع معینی جیوه وجود دارد. در یکی از شاخه‌ها روی جیوه آن قدر الکل به چگالی $0.85 \frac{g}{cm^3}$ می‌ریزیم تا ارتفاع ستون الکل ۳۲ سانتی‌متر شود. در این حالت اختلاف ارتفاع جیوه در دو شاخه لوله U شکل به چند سانتی‌متر می‌رسد؟ (چگالی جیوه $13.6 \frac{g}{cm^3}$ و سطح مقطع‌های لوله U شکل برابر هستند).

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۴۴- ارتفاع جیوه در یک لوله وارون قائم که برای اندازه‌گیری فشار هوا به کار رفته ۷۰ سانتی‌متر است و بالای جیوه فضای خالی (خلأ) وجود دارد. اگر لوله را در ظرف جیوه آنقدر پایین ببریم تا ارتفاع بخش بیرون از سطح جیوه ۵۰ سانتی‌متر شود، نیرویی که جیوه بر انتهای بسته لوله وارد می‌کند چند نیوتون خواهد بود؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$ ، چگالی جیوه $13.6 \frac{g}{cm^3}$ و سطح مقطع لوله $2 cm^2$ است).

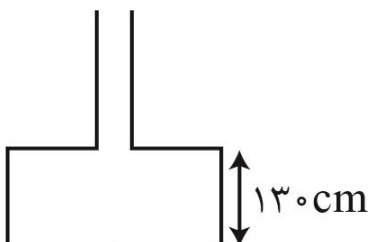
- (۱) ۰.۴
(۲) ۲.۷۲
(۳) ۱.۳۶
(۴) ۵.۴۴

۴۵- استوانه‌ای آلومینیومی به شعاع مقطع r را از قاعده روی سطح افقی قرار داده‌ایم و در همین حالت فشار P_1 را به سطح وارد می‌کند. اگر این استوانه را ذوب کرده و از آن مخروطی به شعاع مقطع $\frac{r}{2}$ بسازیم و فشاری که قاعده مخروط به سطح افقی وارد می‌کند را P_2 بنامیم، نسبت $\frac{P_2}{P_1}$ کدام است؟

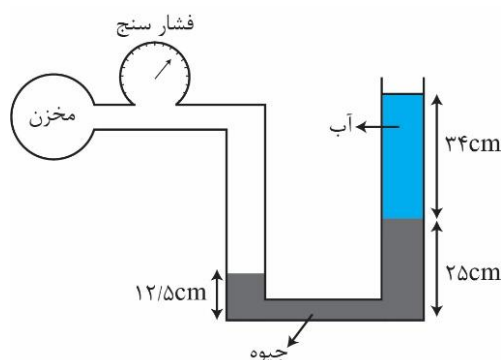
- (۱) ۴
(۲) ۲
(۳) ۱
(۴) ۸

۴۶- ۲ لیتر از مایعی به چگالی $2 \frac{g}{cm^3}$ را در ظرف زیر می‌ریزیم که سطح مقطع قسمت باریک و بزرگ آن به ترتیب $4 cm^2$ و $10 cm^2$ است. اگر ارتفاع قسمت باریک به قدر کافی بزرگ باشد، نیروی وارد بر کف ظرف از طرف مایع چند نیوتون خواهد شد؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)

- (۱) ۳۴
(۲) ۸۲
(۳) ۶۱
(۴) ۴۸



۴۷- در شکل زیر، اگر عددی که فشارسنج نشان می‌دهد $\frac{1}{6}$ برابر فشار مطلق مخزن باشد، فشار هوا چند سانتی‌متر جیوه است؟



$$(\rho_{\text{Hg}} = 13.6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \rho_{\text{W}} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3})$$

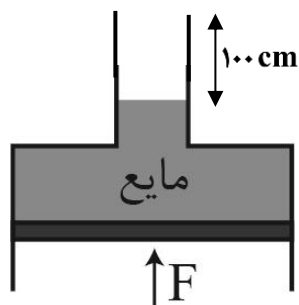
9. (1)

1.5 (2)

75 (5)

۷۶ (۴)

۴۸- در شکل زیر، مساحت مقطع قسمت پایین ۳ برابر مساحت مقطع قسمت بالایی ظرف است. اگر تحت تاثیر نیروی F ، سطح آزاد مایع نسبت به حالت اولیه ۵۱ سانتی متر بالا برود، فشار ناشی از مایع در محل پیستون چند سانتی متر جیوه افزایش می یابد؟



$$(\rho_{\text{Hg}} = 13.6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \rho_{\text{Al}} = 2.7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, g = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$$

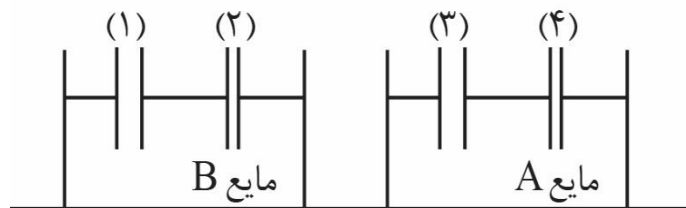
9. (1)

1/5 (2)

(۳) ۶

17 (P

۴۹- در دو ظرف مشابه حجم یکسانی از مایع A و مایع B می‌ریزیم. می‌دانیم که نیروی هم‌چسبی مایع A بزرگتر از نیروی چسبندگی بین مایع A و لوله موئین شیشه‌ای است و نیروی هم‌چسبی مایع B کوچکتر از نیروی چسبندگی بین مایع B و لوله موئین شیشه‌ای است. اکنون مطابق شکل زیر، دو لوله موئین را در ظرف محتوی مایع A و دو لوله موئین دیگر را در ظرف محتوی مایع B قرار می‌دهیم. اگر ارتفاع سطح مایع در لوله‌هایی موئین (h) را از کف ظرف اندازه بگیریم، کدام مقایسه درست است؟ (سطح آزاد مایع‌ها در دو ظرف یکسان است).



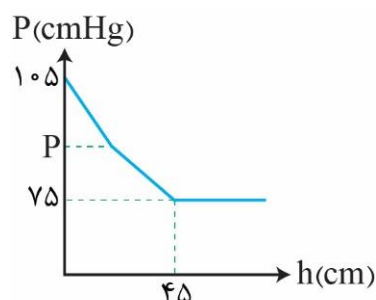
$$h_1 > h_2 > h_3 > h_4 \quad (1)$$

$$h_e > h_r > h_n > h_r \quad (2)$$

$$h_r > h_l > h_r > h_e \quad (3)$$

$$h_r > h_f > h_l > h_e \quad (9)$$

۵۰- نمودار فشار کل بر حسب ارتفاع از کف یک ظرف حاوی دو مایع مخلوط‌نشدنی، مطابق شکل زیر است. اگر مایع زیرین جیوه و چگالی مایع بالایی یک چهارم چگالی جیوه باشد، مقدار P در نمودار زیر چند سانتی متر جیوه است؟

 $\gamma \wedge (\cdot)$

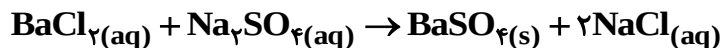
1. (5)

12 (3)

١٢ (٢)

۵۱- ۵۰۰ میلی لیتر محلول باریم کلرید با ۳۰۰ میلی لیتر محلول سدیم سولفات ($d = 1/42 \text{ g.mL}^{-1}$) مطابق معادله زیر به طور کامل واکنش می دهند. اگر پس از پایان واکنش، مجموع غلظت مولی یون های موجود در محلول ۱ مول بر لیتر باشد، درصد جرمی سدیم سولفات اولیه به تقریب چقدر بوده است؟ (از تغییر حجم محلول در اثر واکنش چشم پوشی کنید).

($O = 16, Na = 23, S = 32 : \text{g.mol}^{-1}$)



۳/۳ (۲)

۲/۱ (۱)

۶/۶ (۴)

۴/۲ (۳)

۵۲- در ظرفی دارای ۴ تن نمک پتاسیم نیترات، ۶ مترمکعب آب ریخته ایم. در صورتی که در دمای 40°C محلول از نمک سیر شده باشد، مقدار نمک حل نشده بر حسب تن و غلظت مولار محلول به تقریب کدام است؟ (انحلال پذیری KNO_3 در 40°C برابر با ۶۰ گرم در ۱۰۰ گرم آب است و چگالی آب و محلول سیر شده را به ترتیب برابر با ۱ و $1/33$ گرم بر میلی لیتر در نظر بگیرید.)

۵-۱/۲ (۲)

۲/۲-۱/۲ (۱)

۲/۲-۰/۴ (۴)

۵-۰/۴ (۳)

۵۳- کدام عبارت زیر درست بیان شده است؟

(۱) اتیلن گلیکول برخلاف اتانول به هر نسبتی در آب حل می شود.

(۲) اوره برخلاف اسیدهای چرب با آب پیوند هیدروژنی تشکیل می دهد.

(۳) شوینده ها، مولکول های وازلین را بهتر از مولکول های گریس از سطح پارچه پلی استر پاک می کنند.

(۴) نوع جاذبه های هیدروژن کلرید و مس (II) سولفات با مولکول های آب، پس از انحلال در آب مشابه است.

۵۴- اگر بخش قطبی یک شوینده صابونی را با بخش قطبی شوینده غیرصابونی جایگزین کنیم، کدام نتیجه گیری برای آن درست بیان شده است؟

(۱) جرم مولی آن کاهش می یابد.

(۲) میزان جاذبه آن با یون Mg^{2+} افزایش می یابد.

(۳) تعداد جفت الکترون های ناپیوندی افزایش می یابد.

(۴) با آلاینده ها بهتر واکنش داده و آن ها را از سطوح جدا می کند.

۵۵- چند گرم گوگرد تری اکسید در ۵ مترمکعب آب حل کنیم تا غلظت یون هیدرونیوم در آب 760 ppm شود؟ (چگالی محلول

1 g.mL^{-1} و فرض کنید H_2SO_4 تماماً به SO_4^{2-} و H_3O^+ تبدیل می شود.) ($H = 1, O = 16, S = 32 \text{ g.mol}^{-1}$)

۱۶۰۰۰ (۲)

۱۶۰۰ (۱)

۸۰۰۰ (۴)

۸۰۰ (۳)

۵۶- کدام موارد از مطالب زیر نادرست است؟

(الف) محلول جوهرنمک برخلاف صابون، رنگ کاغذ pH را قرمز می کند.

(ب) مخلوط سدیم هیدروکسید و آلومینیم در آب علاوه بر تولید گاز، باعث افزایش دمای آب می شود.

(پ) پاک کننده های خورنده همانند شوینده های صابونی، تنها براساس واکنش با آلاینده ها عمل می کنند.

(ت) سدیم هیدروکسید در اثر واکنش با چربی هایی که لوله را مسدود کرده اند، آن ها را به رسوب تبدیل می کند.

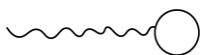
پ و ت (۴)

ب و پ (۳)

الف و ت (۲)

الف و ب (۱)

۵۷- با توجه به شکل‌های زیر، که یک اسیدچرب، یک شوینده صابونی و یک استر سنگین را نشان می‌دهند چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست است؟

- a)  الف) اگر ترکیب C پیوند کربن - کربن دوگانه نداشته باشد، حالت فیزیکی آن با b یکسان است.
- b)  ب) در هر سه ترکیب به یقین پیوند دوگانه وجود دارد.
- c)  پ) ترکیب b را هم می‌توان از a و هم از c تهیه کرد.
- ت) چربی‌ها را می‌توان مخلوطی از a و c دانست.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۵۸- کدام یک از موارد زیر در دمای اتاق درست است؟

- ۱) اگر pH دو محلول یکسان باشد، رسانایی الکتریکی محلولی که اسید قوی‌تر دارد، بالاتر است.
- ۲) در غلظت برابر از دو محلول باریوم هیدروکسید و سدیم هیدروکسید که هر دو باز قوی هستند، pH یکسان است.
- ۳) اگر دمای دو محلول از استیک اسید و نیتریک اسید را افزایش دهیم، pH دو محلول به یک میزان افزایش می‌یابد.
- ۴) اگر $[OH^-]$ در محلول باز BOH از $[A^+]$ در محلول باز AOH بیشتر باشد، pH در BOH بیشتر از AOH است.

۵۹- کدام یک از موارد زیر درست است؟

- الف) انحلال برخی مواد مولکولی در آب می‌تواند رسانایی الکتریکی آب را افزایش دهد.
- ب) افزودن مقداری نمک $Ca_3(PO_4)_2$ به آب موجب کاهش چشمگیر خاصیت پاک‌کنندگی صابون می‌شود.
- پ) طی واکنش $RCOOH + NaOH \rightarrow RCOO^-Na^+ + H_2O$ ، همواره یک ماده نامحلول در آب به یک ماده محلول در آب تبدیل می‌شود.

۲) فقط الف

۱) الف و پ

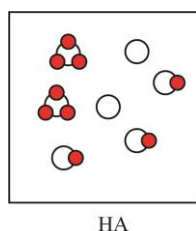
۴) ب و پ

۳) الف و ب

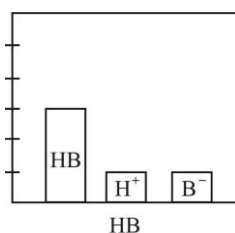
۶۰- کدام یک از موارد زیر صحیح است؟ ($Li = 7, Ca = 40 : g.mol^{-1}$)

- ۱) تمام اکسیدهای نافلزی با انحلال در آب، موجب ایجاد یک محلول اسیدی می‌شوند.
- ۲) با انحلال جرم برابر از لیتیم اکسید و کلسیم اکسید در ۱ لیتر آب، دو محلول با pH یکسان ایجاد می‌شود.
- ۳) رسانایی الکتریکی محلول حاصل از انحلال 0.2 مول دی‌نیتروژن پنتا اکسید و 0.2 مول گوگرد تری‌اکسید در مقدار یکسان آب برابر است.
- ۴) رسانایی الکتریکی محلولی که از انحلال 0.1 مول لیتیم اکسید در ۱ لیتر آب ایجاد شده بیشتر از همین مقدار مول باریوم اکسید در ۱ لیتر آب است.

۶۱- درجه یونش محلول اسید ضعیف HA و اسید ضعیف HB به ترتیب و است (شکل‌ها وضعیت محلول پس از یونش را نشان می‌دهند).



HA



HB

۲) $0.25 - 0.4$

۱) $0.25 - 0.4$

۴) $0.33 - 0.66$

۳) $0.33 - 0.66$

۶۲- جرم مولی یک پاک‌کننده صابونی مایع که در مجموع حاوی ۲۰ اتم کربن و دارای یک پیوند دوگانه در ساختار خود است، کدام می‌تواند باشد؟ ($H = 1, C = 12, N = 14, O = 16, Na = 23, K = 39 : g.mol^{-1}$)

$$(1) \quad 327 \frac{g}{mol} \quad (2) \quad 348 \frac{g}{mol}$$

$$(3) \quad 350 \frac{g}{mol} \quad (4) \quad 332 \frac{g}{mol}$$

۶۳- کدام مقایسه در ارتباط با رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی زیر درست است؟ ($H = 1, O = 16, Na = 23 g.mol^{-1}$)

الف) ۲ لیتر محلول دارای ۸۰ گرم NaOH

ب) ۱۲ لیتر محلول از C_7H_5OH $2 \frac{mol}{L}$

پ) ۱ L محلول $0.1 \frac{mol}{L}$ از نمک $CaCl_2$ در آب

ت) ۲ L محلول از HF با $\alpha = 0.1$ $2 \frac{mol}{L}$

(۱) الف < پ < ت < ب

(۳) ب < الف < ت < پ

(۲) ب < الف < پ < ت

(۴) الف < ت < پ < ب

۶۴- اختلاف pH محلول «۱» که از حل شدن ۵۴ گرم $N_2O_5(s)$ در ۲ لیتر آب و محلول «۲» که از حل شدن ۱۲۴ گرم Na_2O در ۱۰ لیتر آب تهیه شده‌اند، کدام است؟

($N = 14, O = 16, Na = 23 : g.mol^{-1}$)

($\log 2 = 0.3, \log 3 = 0.5, \log 5 = 0.7$)

$$(1) \quad 12.7 \quad (2) \quad 13$$

$$(3) \quad 13.6 \quad (4) \quad 13.3$$

۶۵- اگر در محلولی در دمای $25^\circ C$ نسبت غلظت یون هیدرونیوم به هیدروکسید برابر $2/5 \times 10^4$ باشد، pH محلول کدام است؟ ($\log 5 = 0.7$)

$$(1) \quad 4.8$$

$$(2) \quad 6.2$$

$$(3) \quad 4.3$$

$$(4) \quad 5.7$$

۶۶- مخلوطی از پاک‌کننده‌هایی با فرمول $C_{17}H_{35}COONa$ و $C_{17}H_{35}C_6H_4SO_3Na$ به جرم ۸۰۰ گرم را وارد ۲۰ لیتر آب سخت که غلظت یون‌های Mg^{2+} و Ca^{2+} در آن به ترتیب $0.25 \frac{mol}{L}$ و $0.15 \frac{mol}{L}$ است، می‌کنیم تا به طور کامل با مخلوط اولیه واکنش دهد. چند درصد جرم مخلوط اولیه را پاک‌کننده غیرصابونی تشکیل می‌دهد؟

($C = 12, O = 16, H = 1, S = 32, Na = 23 : g.mol^{-1}$)

$$(1) \quad 61.2 \quad (2) \quad 38.8$$

$$(3) \quad 32.25 \quad (4) \quad 69.75$$

۶۷- دو تکه مشابه از نوار منیزیم را وارد یک لیتر از محلول های $\frac{mol}{L}$ ۰/۱ از HCl و HF می کنیم تا به طور کامل واکنش دهند. کدام یک از موارد زیر درباره واکنش انجام شده در آن ها درست هستند؟

(الف) با گذشت زمان رسانایی الکتریکی محلول دارای HCl افزایش می یابد.

(ب) با گذشت زمان رسانایی الکتریکی محلول دارای HF افزایش می یابد.

(پ) حجم گاز H_2 تولید شده در پایان هر دو واکنش برابر است.

(ت) دو واکنش با سرعت برابری انجام می شوند.

(۱) الف - پ

(۲) الف - ت

(۳) ب - پ

(۴) ب - ت

۶۸- درباره درجه یونش یک اسید، کدام عبارت زیر الزاماً درست است؟

(۱) درجه یونش یک اسید وابسته به غلظت آن نیست.

(۲) درصد یونش یک اسید برابر با $\frac{[H^+]}{M}$ در محلول آن است.

(۳) در رابطه درجه یونش به جای شمار مولکول ها، می توان جرم گونه ها را قرار داد.

(۴) هرچه شمار مولکول های یونیده شده به شمار مولکول های حل شده نزدیک تر باشد، مقدار α به یک نزدیک تر خواهد بود.

۶۹- با توجه به تعریف اسید و باز آرنیوس، کدام موارد زیر درست هستند؟

(الف) گاز HCl، هیدروکلریک اسید نام دارد.

(ب) پس از انحلال گاز آمونیاک در آب، محلول دارای دو گونه نیتروژن دار است.

(پ) هرچه اسید قوی تر باشد، غلظت H_3O^+ در محلول آن بیشتر و محلول اسیدی تر خواهد بود.

(ت) پیش از آنکه ساختار اسید و بازها شناخته شوند، شیمی دان ها با برخی واکنش های آن ها آشنا بودند.

(۱) الف و ب

(۲) الف و پ

(۳) ت و پ

(۴) ب و ت

۷۰- چه تعداد از موارد زیر اسید آرنیوس هستند؟

NaCl, SO_3 , KOH, NH_3 , CH_3OH , NO, CO_2 , HF

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵



آزمون شماره ۲
۱۳ شهریور ۱۴۰۵
پایه دوازدهم
رشته ریاضی فیزیک

پاسخ تشریحی آزمون

صاحب امتیاز: دبیرستان علامه حلی (۱) تهران
مدیر گروه: پوریا دیارکجوری
ناظر محتوایی: نیما مهندس

نام درس	حسابان	هندسه	گسسته	فیزیک	شیمی
طراحان	حسین شفیعزاده علیرضا ندافزاده	علیرضا فعلی صبا مهدوی	علیرضا شریف خطیبی علی اصغر شریفی نیما مهندس محمدرضا میبیدی	محمدجواد حیدری پوریا دیارکجوری ابوالفضل علیدوست	حسن ایزدی مسعود خوش طینت محمدرضا زهرهوند سید صمد صفوی حسین نصرالهی
مسئول درس	امیرحسین ملازینل	امیرحسین ملازینل	امیرحسین ملازینل	رادین حیدر	امیررضا جدیدی
ناظر علمی	نیما مهندس	علیرضا فعلی	علیرضا شریف خطیبی	ابوالفضل علیدوست	محمدرضا زهرهوند علی فرزاد تبار
ویراستاران	نوید عبد محمدامین مستعان	محمدپارسا ترکمان مهدی خراسانی نوید عبد محمدامین مستعان	محمدپارسا ترکمان مهدی خراسانی نوید عبد محمدامین مستعان	امیرحسین قرقانی پرهام قاسمی	منیب نظری

حق چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز دبیرستان دوره دوم علامه حلی (۱) تهران مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.



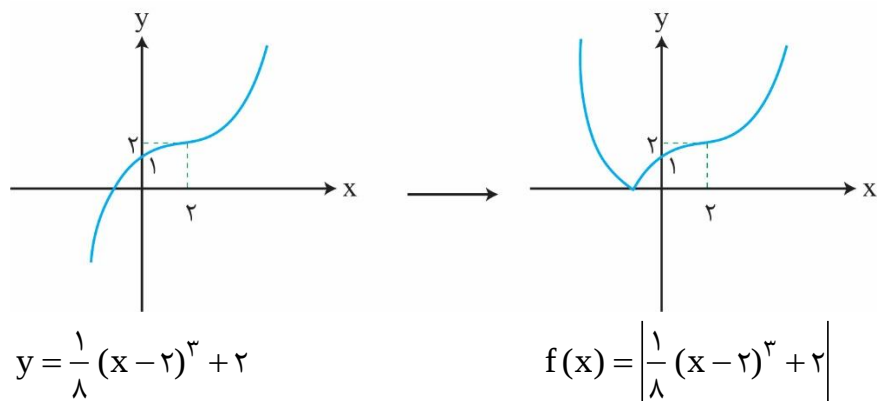
بازه‌ای که تابع $y = x^3$ پایین‌تر از تابع $y = x^2$ قرار دارد، برابر است با:

$$x^3 < x^2 \Rightarrow x^3 - x^2 < 0 \Rightarrow x^2(x-1) < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$

حالا ضابطه تابع f را بازنویسی می‌کنیم:

$$y = \left| \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 1 \right| = \left| \left(\frac{1}{2}x - 1 \right)^3 + 2 \right| = \left| \frac{1}{8}(x-2)^3 + 2 \right|$$

باتوجه به نمودار f ، تابع روی بازه $(0, 1)$ اکیداً صعودی و وارون‌پذیر است.

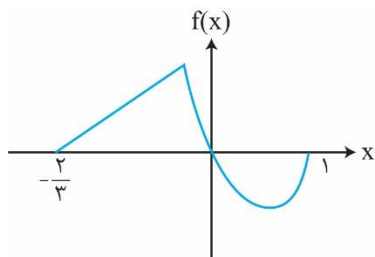


درجه دشواری: ساده

مبحث: حسابان ۲- فصل ۱- درس اول (تبدیل توابع)

۲- گزینه ۴

نمودار تابع g به صورت زیر می‌باشد:

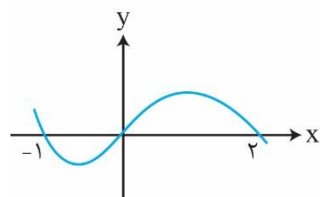


حالا دامنه تابع h را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} D_{f \circ g} = D_f = \left[\frac{-1}{3}, \frac{4}{3} \right] \\ D_{-2g} = D_g = \left[\frac{-2}{3}, 1 \right] \end{cases} \Rightarrow D_h = D_{\frac{f \circ g}{-2g}} = \underbrace{D_{f \circ g} \cap D_{-2g}}_{\left[\frac{-1}{3}, 1 \right]} - \underbrace{\{x \mid g(x) = 0\}}_{\{0, 1\}} = \left[\frac{-1}{3}, 1 \right] - \{0, 1\}$$

بنابراین عدد صحیحی در بازه دامنه تابع h قرار ندارد.

تست: شکل زیر، نمودار $f(x-2)$ را نشان می‌دهد. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{f(1-x)}{f(x+1)}}$ ، شامل چند عدد صحیح است؟



۴ (۱)

۲ (۲)

صفر (۳)

بیش از ۴ (۴)

گزینه «۱»

مرجع: کنکور سراسری علوم تجربی - نوبت دوم - خارج از کشور ۱۴۰۲

تبدیلات مذکور را به ترتیب روی تابع اعمال می کنیم:

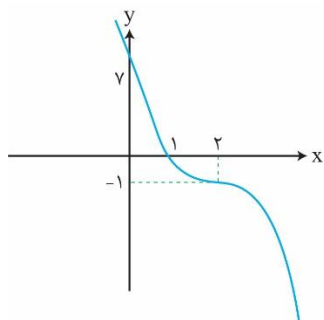
$$y_1 = \sqrt[3]{2x-1} + 2$$

قرینه نسبت به محور عرض ها $\rightarrow y_2 = \sqrt[3]{-2x-1} + 2$

دو برابر کردن طول نقاط $\rightarrow y_3 = \sqrt[3]{-2\left(\frac{x}{2}\right) - 1} + 2 = -\sqrt[3]{x+1} + 2$

قرینه نسبت به خط $y=x$ (وارون کردن تابع) $\rightarrow y_4 = (2-x)^3 - 1 = -(x-2)^3 - 1$

نمودار تابع نهایی (y_4) به صورت زیر بوده و مشخص است که از ناحیه سوم مختصات عبور نمی کند.



تست: قرینه نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y=x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت

محور x ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ها انتقال می دهیم و آن را $y = g(x)$ می نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟

-۴ (۴)

-۲ (۳)

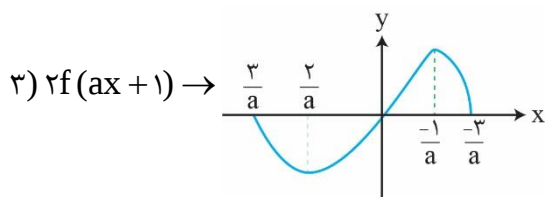
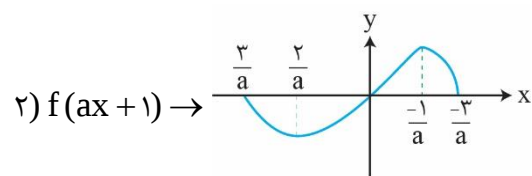
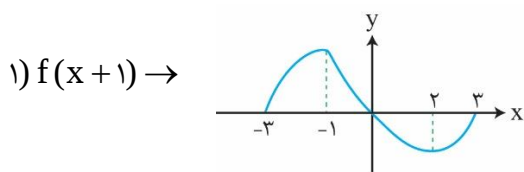
-۳ (۲)

۳ (۱)

مرجع: کنکور سراسری علوم تجربی - داخل ۱۴۰۰

گزینه «۳»

واضح است که $a < 0$ است. حالا تابع مذکور را مرحله به مرحله رسم می کنیم:



باتوجه به نمودار نهایی، تابع در بازه $[\frac{2}{a}, \frac{-1}{a}]$ اکیداً صعودی می باشد. حالا باتوجه به فرض سوال داریم:

$$\begin{cases} ۱) \frac{2}{a} \leq a \Rightarrow 2 \geq a^2 \Rightarrow \sqrt{2} \geq |a| \xrightarrow{a < 0} -\sqrt{2} \leq a < 0 \\ ۲) 0 \leq \frac{-1}{a} \xrightarrow{a < 0} \text{همواره برقرار است} \end{cases}$$

بنابراین $(b, c) = (-\sqrt{2}, 0)$ و در نتیجه طول بازه برابر $\sqrt{2}$ می باشد.

درجه دشواری: متوسط

مبحث: حسابان ۲- فصل ۱- درس دوم (یکنوایی تابع)

۵- گزینه ۲

راه اول: با بازنویسی تابع f داریم:

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+1} - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^x \times \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \Rightarrow \begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = D_{f^{-1}} = (-1, +\infty) \end{cases}$$

تابع f اکیداً نزولی است، پس تابع f^{-1} در بازه $(-1, +\infty)$ اکیداً نزولی است. حال داریم:

$$f^{-1}(\sqrt{x+1}) < f^{-1}(3x+1) \Rightarrow \begin{cases} ۱) -1 < 3x+1 \Rightarrow \frac{-2}{3} < x \quad (*) \\ ۲) -1 < \sqrt{x+1} \Rightarrow \text{همواره برقرار} \\ ۳) f^{-1} \text{ نزولی} \Rightarrow \sqrt{x+1} > 3x+1 \end{cases}$$

نامساوی سوم را با توجه به $(*)$ در دو حالت زیر بررسی می کنیم:

$$\text{حالت اول)} \quad \frac{-2}{3} < x \leq \frac{-1}{3} \Rightarrow 3x+1 \leq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} > 3x+1$$

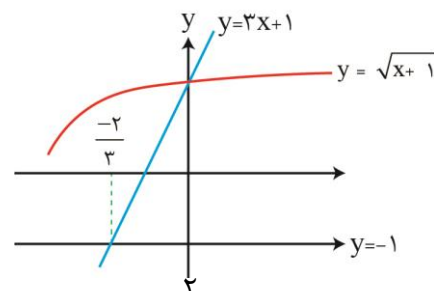
$$\text{حالت دوم)} \quad \frac{-1}{3} < x \Rightarrow 3x+1 > 0 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} \sqrt{x+1} > 3x+1 \Rightarrow 9x^2 + 6x + 1 > x+1 \Rightarrow 9x^2 + 5x < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-5}{9} < x < 0 \xrightarrow{\text{اشتراک با } x > \frac{-1}{3}} \frac{-1}{3} < x < 0$$

مجموعه جواب نامساوی مذکور از اجتماع بازه های الف و ب برابر $(\frac{-2}{3}, 0)$ به دست می آید.

راه دوم: پس از به دست آوردن $D_{f^{-1}} = (-1, +\infty)$ (مشابه راه اول) و اینکه f^{-1} تابعی اکیداً نزولی است، داریم:

$$f^{-1}(\sqrt{x+1}) < f^{-1}(3x+1) \xrightarrow{\text{رسم مهندسی}} 3x+1 < \sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{اکیدا نزولی } f^{-1}}$$



مطابق شکل در بازه $(-\frac{2}{3}, 0)$ تابع $3x+1$ پایین تر از تابع $\sqrt{x+1}$ قرار دارد.

$$\text{(دقت کنید که: } 3x+1 = -1 \Rightarrow x = \frac{-2}{3} \text{)}$$

۶- گزینه ۳ **مبحث:** حسابان ۲- فصل ۱- درس اول (تبدیل توابع + تابع درجه سوم) **درجه دشواری:** دشوار

چون تابع موردنظر فقط از انتقال و قرینه نسبت به محورهای مختصات از تابع $y = x^3$ به دست آمده است، پس ضابطه آن به صورت $f(x) = -(x-k)^3 - 3k$ می باشد. حالا باتوجه به اینکه تابع f از مبدا مختصات عبور کرده است، داریم:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = \sqrt{3} \\ k_3 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

باتوجه به محورهای مختصات نمودار صورت سوال، واضح است که $k < 0$ می باشد، بنابراین $k = -\sqrt{3}$ می باشد و داریم:

$$f(x) = -(x + \sqrt{3})^3 + 3\sqrt{3} \xrightarrow{f^{-1}(-21\sqrt{3})=a} f(a) = -21\sqrt{3} \rightarrow -(a + \sqrt{3})^3 + 3\sqrt{3} = -21\sqrt{3} \Rightarrow (a + \sqrt{3})^3 = 24\sqrt{3} \\ \Rightarrow (a + \sqrt{3})^3 = 2^3 \times 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow a + \sqrt{3} = 2 \times 3^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

۷- گزینه ۱ **مبحث:** برد تابع + تابع جزء صحیح **درجه دشواری:** متوسط

$$2x = 3\alpha - 7 \Rightarrow y = 3\alpha - 7 - 3[\alpha] = 3(\alpha - [\alpha]) - 7$$

راه اول: اگر فرض کنیم $\alpha = \frac{2x+7}{3}$ ، داریم:

$$3 \times 0 - 7 \leq 3(\alpha - [\alpha]) - 7 < 3 \times 1 - 7 \Rightarrow -7 \leq y < -4$$

باتوجه به اینکه $0 \leq \alpha - [\alpha] < 1$ ، برد تابع y به صورت زیر خواهد بود:

از آنجا که y صحیح است، در بازه مذکور می تواند مقادیر -7 ، -6 و -5 را اختیار کند و در نتیجه مجموع اعضای صحیح برد برابر -18 می باشد.

راه دوم: با بازنویسی تابع داده شده داریم:

$$y = 2x - 3\left[\frac{2x+7}{3}\right] = 3\left(\frac{2}{3}x - \left[\frac{2x}{3} + \frac{7}{3}\right]\right) = 3\left(\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} - \left[\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}\right] - \frac{7}{3}\right) \\ \xrightarrow{0 \leq \frac{2}{3}x + \frac{7}{3} - \left[\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}\right] < 1} \frac{-7}{3} \leq \frac{2}{3}x + \frac{7}{3} - \left[\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}\right] - \frac{7}{3} < \frac{-4}{3}$$

بنابراین برد تابع شامل اعداد صحیح -5 ، -6 و -7 می باشد.

۸- گزینه ۴ **مبحث:** دامنه تابع **درجه دشواری:** متوسط

$$-x^2 - (m-1)x + m > 0 \Rightarrow x^2 + (m-1)x - m < 0 \Rightarrow (x-1)(x+m) < 0$$

راه اول: دامنه تابع مذکور را به دست می آوریم:

برای اینکه نامساوی فوق برقرار باشد، مقدار x باید بین ریشه های دو پرانتز ($x = -m$ و $x = 1$) باشد که بسته به اینکه کدام ریشه بزرگ تر است، دو حالت پیش می آید:

$$\begin{cases} 1) \ 1 < -m \Rightarrow 1 < x < -m \xrightarrow{\text{دامنه دارای ۲ مقدار صحیح}} -m = 4 \Rightarrow m = -4 \\ 2) \ -m < 1 \Rightarrow -m < x < 1 \xrightarrow{\text{دامنه دارای ۲ مقدار صحیح}} -m = -2 \Rightarrow m = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف مقادیر } m = 2 - (-4) = 6$$

راه دوم: با توجه به اینکه باید $x^2 + (m-1)x - m < 0$ باشد، اگر فرض کنیم $p(x) = x^2 + (m-1)x - m$ و ریشه نهایی آن را x_1 و x_2 بنامیم، بازه

مطلوب $x_1 < x < x_2$ خواهد بود. برای اینکه تنها دو عدد صحیح (مثل k_1 و k_2) در بازه مطلوب قرار بگیرند، اختلاف x_1 و x_2 نباید بیشتر از ۳ واحد باشد که یعنی:

$$\begin{array}{c} \overbrace{x_1 \quad k_1 \quad k_2 \quad x_2} \\ \underbrace{\hspace{1cm}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \\ \text{حداکثر اختلاف} \quad \text{حداکثر اختلاف} \quad \text{حداکثر اختلاف} \\ \text{۱ واحد} \quad \text{۱ واحد} \quad \text{۱ واحد} \end{array} \quad x_2 - x_1 \leq 3 \Rightarrow \frac{\sqrt{(m-1)^2 + 4m}}{1} \leq 3 \Rightarrow m^2 + 2m + 1 \leq 9 \Rightarrow m^2 + 2m - 8 \leq 0 \\ \Rightarrow (m+4)(m-2) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq m \leq 2 \Rightarrow 2 - (-4) = 6$$

ضابطه دو تابع fog و gof را به دست آورده و برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} fog(x) = a\left(\frac{x}{a} - 3\right) + 3 = x - 3a + 3 \\ gof(x) = \frac{1}{a}(ax + 3) - 3 = x + \frac{3}{a} - 3 \end{cases} \Rightarrow x - 3a + 3 = x + \frac{3}{a} - 3$$

$$\Rightarrow -a + 1 = \frac{1}{a} - 1 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

حالا ضابطه‌های دو تابع f و g را به دست آورده و خواسته سوال را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x) = x + 3 \rightarrow f(1) = 4 \\ g(x) = x - 3 \rightarrow g(1) = -2 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{4}{-2} = -2$$

(دقت کنید که چون دامنه دو تابع gof و fog برابر $\mathbb{R}$ بود، نیازی به بررسی برابری دو دامنه نبود.)

راه اول: ابتدا ضابطه تابع g را ساده کرده و بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} f^{-1}(x) > 4 \xrightarrow{\text{از طرفین نامساوی f می‌گیریم}} x > f(4) \Rightarrow x > 6 \\ f^{-1}(x) < 4 \longrightarrow x < f(4) \Rightarrow x < 6 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 6 \\ 3-x & x < 6 \end{cases}$$

حالا مقدار خواسته سوال را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} g(5) = 3 - 5 = -2 \\ g(3) = 3 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow g(5) - g(3) = -2 - 0 = -2$$

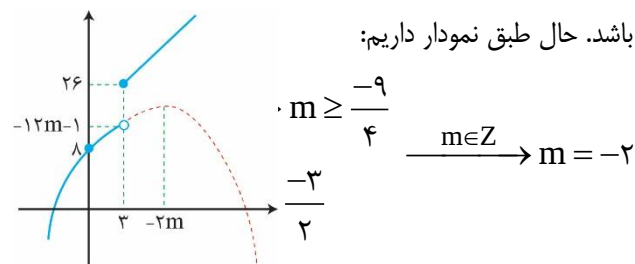
راه دوم: از روی ضابطه تابع f، تابع f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \leq 2 \\ x+2 & x > 2 \end{cases}, \quad \begin{matrix} y \leq 3 \\ y > 4 \end{matrix} \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & x \leq 3 \\ x-2 & x > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(5) = 5-2 = 3 \\ f^{-1}(3) = \frac{3+1}{2} = 2 \end{cases}$$

حالا با توجه به ضابطه تابع g داریم:

$$\begin{cases} f^{-1}(5) = 3 < 4 \Rightarrow g(5) = 3 - 5 = -2 \\ f^{-1}(3) = 2 < 4 \Rightarrow g(3) = 3 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow g(5) - g(3) = -2 - 0 = -2$$

نمودار تابع f به صورت مقابل می‌باشد. برای اینکه تابع f یک به یک باشد، باید اکیداً صعودی باشد. حال طبق نمودار داریم:



شرط اول بررسی کرد که هنگام جابجایی بین دو ضابطه تابع f، یکنوایی تابع به هم نخورد و شرط دوم بررسی کرد که ضابطه دوم در دامنه خودش اکیداً یکنوا باشد. (راس سهمی در دامنه قرار نگیرد.) حالا باتوجه به اینکه $m = -2$ است، داریم:

$$f(x) = \begin{cases} 6x + 8 & x \geq 3 \\ 8 + 8x - x^2 & x < 3 \end{cases} \rightarrow f(-2) = 8 - 16 - 4 = -12$$

تست: تابع $f(x) = \begin{cases} 2 - 3x & ; 2x + 3 \leq 0 \\ 2 + 2mx - x^2 & ; 2x + 3 > 0 \end{cases}$ روی دامنه تعریف خود، وارون پذیر است. اگر f^{-1} وارون تابع f به ازای مقدار

صحیح m باشد، مقدار $f^{-1}(-19)$ کدام است؟

گزینه ۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

مرجع: کنکور سراسری علوم تجربی - نوبت دوم - داخل ۱۴۰۲

گزینه «۱»

درجه دشواری: متوسط

مبحث: وارون تابع + تابع هموگرافیک

۱۲- گزینه ۱

نکته: نمودار تابع هموگرافیک $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ با فرض $a \neq -d$ ، نمودار تابع وارون خود را روی نیمساز ناحیه اول و سوم جدول مختصات ($y = x$) قطع می کند.

باتوجه به نکته مذکور، نقاط برخورد تابع f و خط $y = x$ را به دست می آوریم:

$$f(x) = x \Rightarrow \frac{x+4}{x+a} = x \Rightarrow x^2 + (a-1)x - 4 = 0 \quad (*)$$

ریشه های معادله (*) برابر $\alpha = b + 3$ و $\beta = b - 2$ بوده و داریم:

$$|\alpha - \beta| = 5 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 5 \Rightarrow \frac{\sqrt{(a-1)^2 + 16}}{1} = 5 \Rightarrow (a-1)^2 = 9 \Rightarrow a-1 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} a-1=3 \Rightarrow a=4 \\ a-1=-3 \Rightarrow a=-2 \end{cases}$$

دقت کنید که به ازای $a = 4$ ، تابع $f(x) = 1$ (تابع ثابت) می شود و در نتیجه وارون ناپذیر خواهد شد. حال باتوجه به اینکه $a = -2$ و معادله (*) داریم:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow S = \frac{-(-3)}{1} = 3 \Rightarrow (b-2) + (b+3) = 3 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a + b = -1$$

تست: نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ ، با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ ، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می کند؟

گزینه ۱) -۴ و -۱ ۲) ۴ و -۱ ۳) -۴ و ۱ ۴) ۴ و ۱

مرجع: کنکور سراسری علوم تجربی - خارج از کشور ۱۳۹۶

گزینه «۲»

درجه دشواری: متوسط

مبحث: هندسه ۳- فصل ۱- درس دوم (وارون ماتریس)

۱۳- گزینه ۴

$$\begin{cases} A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 14 & 18 \end{bmatrix} \\ -7A = \begin{bmatrix} -21 & -7 \\ -14 & -28 \end{bmatrix} \end{cases} \rightarrow A^2 - 7A = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$$

(راه اول)

$$\Rightarrow A^2 - 7A = -10I \Rightarrow A^2 - 7A + 10I = \bar{0} \Rightarrow k = 10$$

حالا باتوجه به اینکه $A^2 - 7A + 10I = \bar{0}$ ، می توان گفت:

$$A^2 - 7A + 10I = \bar{0} \xrightarrow{\times A^{-1}} A - 7I + 10A^{-1} = \bar{0} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{10}(7I - A)$$

$$\begin{cases} a+d=3+4=7 \\ \det(A)=3 \times 4 - 1 \times 2 = 10 \end{cases} \Rightarrow A^2 - 7A + 10I = \bar{0}$$

ادامه راه مشابه راه اول می باشد.

راه سوم) اگر فرض کنیم $A^{-1} = mA + nI$ ، خواهیم داشت:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} = m \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + n \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3m+n & m \\ 2m & 4m+n \end{bmatrix}$$

از برابر قرار دادن درایه های متناظر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} m = \frac{-1}{10} \\ 3m+n = \frac{2}{5} \end{cases} \xrightarrow{m=\frac{-1}{10}} n = \frac{7}{10} \Rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{10}A + \frac{7}{10}I = \frac{1}{10}(7I - A)$$

درجه دشواری: متوسط

مبحث: هندسه ۳- فصل ۱- درس دوم (وارون ماتریس)

۱۴- گزینه ۲

نکته: اگر فرض کنیم $X = A_1 A_2 \dots A_n$ ، آنگاه $X^{-1} = A_n^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}$

طبق نکته ی مفروض داریم $(ABA^{-1})^{-1} = AB^{-1}A^{-1}$ و در نتیجه می توان گفت:

$$\begin{cases} A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \rightarrow AB^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

در نتیجه درایه سطر اول و ستون دوم ماتریس حاصل برابر ۱ می باشد.

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $(A \times B)^{-1}$ ، کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

مرجع: کنکور سراسری علوم تجربی - خارج از کشور ۱۳۹۴

گزینه «۲»

درجه دشواری: متوسط

مبحث: هندسه ۳- فصل ۱- درس اول (اعمال روی ماتریس)

۱۵- گزینه ۳

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \bar{0}$$

ابتدا ماتریس A^2 را به دست می آوریم:

حالا ماتریس مطلوب سوال را ساده می کنیم:

$$\begin{cases} (I+A)^5 = (I+A)^2(I+A)^3 = \underbrace{(A^2+2A+I)}_{\bar{0}}(\underbrace{A^3+3A^2+3A+I)}_{\bar{0}} = \underbrace{6A^2+5A+I}_{\bar{0}} = 5A+I \\ (I-A)^5 = (I-A)^2(I-A)^3 = \underbrace{(A^2-2A+I)}_{\bar{0}}(\underbrace{-A^3+3A^2-3A+I)}_{\bar{0}} = \underbrace{6A^2-5A+I}_{\bar{0}} = -5A+I \end{cases}$$

$$\Rightarrow (I+A)^5 - (I-A)^5 = (5A+I) - (-5A+I) = 10A$$

۱۶- گزینه ۴ **مبحث:** هندسه ۳- فصل ۱- درس دوم (حل دستگاه معادلات با ماتریس) **درجه دشواری:** ساده

برای اینکه دستگاه مذکور فاقد جواب باشد، باید معادله‌ی دو خط ذکر شده در دستگاه معادلات، معادله دو خط موازی باشد:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{k-2}{2} = \frac{3}{k+3} \neq \frac{6}{4} \quad (*)$$

با حل تساوی میان دو کسر اول داریم:

$$\frac{k-2}{2} = \frac{3}{k+3} \Rightarrow k^2 + k - 12 = 0 \Rightarrow (k+4)(k-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ k=-4 \end{cases}$$

به ازای هر دو مقدار k ، رابطه (*) برقرار می‌باشد.

تست: به ازای کدام مقدار m ، دستگاه معادلات $\begin{cases} mx+y=m-1 \\ 3x+(m-2)y=4-2m \end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) هیچ مقدار m

گزینه ۲ «**مرجع:** کنکور سراسری علوم تجربی - داخل ۱۳۹۳»

۱۷- گزینه ۱ **مبحث:** هندسه ۳- فصل ۱- درس دوم (وارون ماتریس) **درجه دشواری:** متوسط

باتوجه به اینکه برای ماتریس دلخواه و وارون‌پذیر X ، رابطه $XX^{-1} = I$ برقرار است، می‌توان گفت:

$$\underbrace{(3A-2I)}_X (3A-2I)^{-1} = I \Rightarrow 3A(3A-2I)^{-1} - 2I(3A-2I)^{-1} = I$$

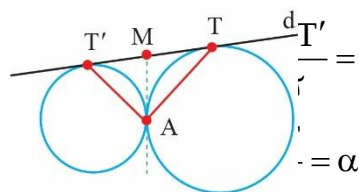
$$\Rightarrow 3A(3A-2I)^{-1} = 2(3A-2I)^{-1} + I \quad (*)$$

بنابراین طبق تساوی (*)، خواسته‌ی سوال برابر است با:

$$2 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow 12 = 3 + 9$$

۱۸- گزینه ۲ **مبحث:** هندسه ۲- فصل ۱- درس اول (زاویه‌ها در دایره) **درجه دشواری:** متوسط

مماس مشترک داخلی دو دایره را رسم کرده و نقطه برخوردش با خط d را M می‌نامیم. حالا طبق تعریف زاویه ظلی در دایره داریم:



$$\Rightarrow \overset{\Delta}{TAT'} : \overset{\Delta}{MT'A} + \overset{\Delta}{MT'A'} + \overset{\Delta}{TAT'} = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$\begin{cases} AT' = x \\ AT = \sqrt{3}x \xrightarrow{S_{ATT'=6}} \frac{1}{2} \times x \times \sqrt{3}x = 6 \Rightarrow x^2 = 4\sqrt{3} \Rightarrow x = 2\sqrt[4]{3} \Rightarrow TT' = 2x = 4\sqrt[4]{3} \\ TT' = 2x \end{cases}$$

۱۹- گزینه ۱

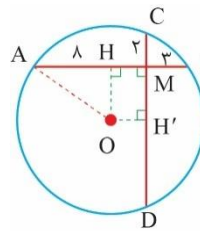
مبحث: هندسه ۲- فصل ۱- درس دوم (روابط طولی در دایره)

درجه دشواری: متوسط

$$AM.BM = CM.DM \Rightarrow 8 \times 3 = 2 \times DM \Rightarrow DM = 12$$

طبق روابط طولی در دایره داریم:

حالا اگر مرکز دایره را O فرض کنیم، طبق شکل زیر خواهیم داشت:



$$\begin{aligned} M = 8 + 3 = 11 &\Rightarrow AH = BH = \frac{AB}{2} = \frac{11}{2} \\ M = 2 + 12 = 14 &\Rightarrow CH' = DH' = \frac{CD}{2} = \frac{14}{2} = 7 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow OH = MH' = CH' - CM = 7 - 2 = 5$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{AH^2 + OH^2} = \sqrt{\frac{121}{4} + 25} = \frac{\sqrt{221}}{2}$$

۲۰- گزینه ۴

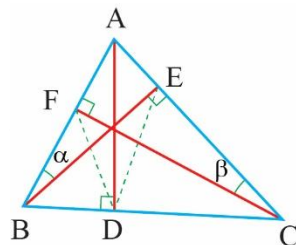
مبحث: هندسه ۲- فصل ۱- درس سوم (چندضلعی های محاطی)

درجه دشواری: متوسط

اگر محل هم‌مرسی ارتفاع‌های مثلث ABC را O بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} \hat{BFO} + \hat{BDO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow BFOD \text{ (محاطی)} \Rightarrow \hat{FBO} = \hat{FDO} \\ \hat{CEO} + \hat{CDO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow CEOD \text{ (محاطی)} \Rightarrow \hat{ECO} = \hat{EDO} \end{cases}$$

حالا طبق فرض سوال و شکل زیر داریم:



$$\begin{aligned} &= 180^\circ \\ &180^\circ \xrightarrow[\alpha\beta]{\alpha} \alpha + \beta + 180^\circ + 2\hat{A} = 360^\circ \Rightarrow \hat{A} = 65^\circ \end{aligned}$$

۲۱- گزینه ۳

مبحث: هندسه ۲- فصل ۱- درس سوم (چندضلعی های محیطی)

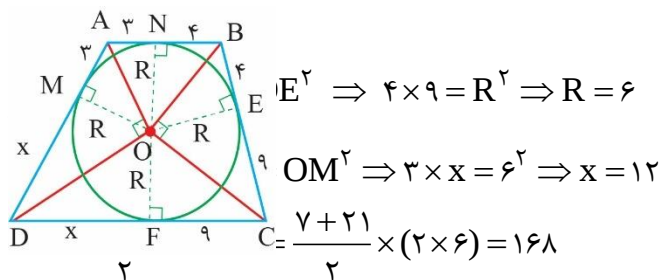
درجه دشواری: دشوار

اگر مرکز دایره را O فرض کنیم، داریم:

$$\begin{cases} \hat{OBN} = \hat{OBE} = \frac{\hat{B}}{2} \\ \hat{OCF} = \hat{OCE} = \frac{\hat{C}}{2} \end{cases} \xrightarrow{\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ} \hat{OBE} + \hat{OCE} = 90^\circ \Rightarrow \hat{BOC} = 90^\circ$$

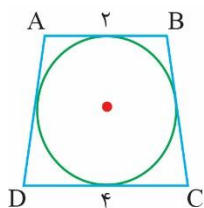
بنابراین مثلث BOC قائم الزاویه می باشد. (به طریق مشابه می توان نشان داد که مثلث AOD نیز قائم الزاویه است).

همچنین می‌دانیم طول دو مماس رسم شده از یک نقطه خارج دایره بر آن دایره، با هم برابرند. بنابراین طبق شکل زیر و با توجه به روابط طولی در $\triangle AOD$ و $\triangle BOC$ داریم:



بنابراین مساحت دوزنقه برابر است با:

تست: در شکل زیر، دوزنقه متساوی الساقین ABCD، بر دایره‌ای محیط شده است. مساحت این دایره کدام است؟



(۱) 2π

(۲) 4π

(۳) 6π

(۴) 8π

گزینه «۱»

مرجع: کنکور سراسری ریاضی و فیزیک - خارج از کشور ۱۴۰۱

۲۲- گزینه ۳ **مبحث:** ریاضیات گسسته- فصل ۱- درس دوم (بخش پذیری و خواص آن) **درجه دشواری:** ساده

برای رد کردن درستی این گزینه، کافی است مقدار n را طوری انتخاب کنیم که $n + 7$ عددی اول بشود. برای مثال به ازای $n = 4$ داریم $10! / 11!$ ، زیرا عدد $10!$ عامل ۱۱ ندارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) باتوجه به اینکه $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$ و $360 | n^2$ ، می‌توان نتیجه گرفت که n باید دست کم عامل‌های $2^1 \times 3^1 \times 5^1$ را داشته باشد که یعنی $n = 60k$ بوده و $60 | n$.

(۲) چون $3 \nmid 5$ ، پس عدد ۳ نقشی در بخش‌پذیری $3n$ بر ۵ ندارد و در نتیجه خود عدد n باید بر ۵ بخش‌پذیر باشد که یعنی $5 | n$.

(۴) طبق تمرین کتاب درسی می‌دانیم $n^3 - n$ و در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} 6 | n^3 - n \\ 6 | 6n \end{cases} \xrightarrow{+} 6 | n^3 + 5n$$

(دقت کنید که $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی بوده و در نتیجه $3!$ آن را عاد می‌کند).

۲۳- گزینه ۲ **مبحث:** ریاضیات گسسته- فصل ۱- درس دوم (مفهوم بخش‌پذیری) **درجه دشواری:** دشوار

نکته) می‌دانیم: $(n-1)! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)$

روی مقادیر n حالت‌بندی می‌کنیم:

(۱) عددی اول باشد: در این حالت تنها مقسوم‌علیه‌های n ، اعداد ۱ و n هستند که چون n عددی اول است، هیچ جوهره از حاصل ضرب اعداد ۱ تا $n-1$ ساخته نمی‌شود و در نتیجه $(n-1)!$ بر n بخش‌پذیر نیست.

(۲) عددی مرکب باشد: در این حالت اعدادی طبیعی مثل a و b یافت می‌شود به طوری که $n = a \times b$ و $1 < a, b < n$ باشد. حالا باید دو وضعیت را بررسی کنیم:

(الف) اگر $a \neq b$ باشد، هر دوی این اعداد در میان اعداد ۱ تا $n-1$ وجود دارند و در نتیجه در این حالت $(n-1)!$ بر n بخش‌پذیر خواهد شد.

ب) اگر $a = b$ باشد (یعنی $n = a^2$ مربع کامل باشد)، چون $n > 4$ است، $a > 2$ خواهد بود و در نتیجه $a^2 > 2a$ خواهد بود. پس دو عدد متمایز a و $2a$ در بین اعداد ۱ تا $n-1$ حضور دارند و در نتیجه حاصل ضرب آن‌ها ($2a^2 = 2n$) در عدد $(n-1)!$ ظاهر می‌شود که یعنی در این حالت هم $(n-1)!$ بر n بخش‌پذیر است.
بنابراین فقط به ازای مقادیر اول n ، عدد $(n-1)!$ بر عدد n بخش‌پذیر نخواهد بود که در بازه ذکر شده، شامل مقادیر ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳ و ۴۷ (مقدار ۵) می‌باشد.

۲۴- گزینه ۱ مبحث: ریاضیات گسسته- فصل ۱- درس دوم (مفهوم بخش‌پذیری) درجه دشواری: دشوار

ابتدا عبارت $n^4 + 4$ را تجزیه می‌کنیم:
$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$$

از آن جایی که P عددی اول است، تنها مقسوم‌علیه‌های آن اعداد ۱ و P می‌باشند. همچنین چون n عددی طبیعی است ($n \geq 1$)، هر دو پرانتز مقادیری مثبت و صحیح بوده و همچنین پرانتز اول همواره از پرانتز دوم بزرگ‌تر می‌باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} n^2 - 2n + 2 = 1 \Rightarrow n^2 - 2n + 1 = 0 \Rightarrow (n-1)^2 = 0 \Rightarrow n = 1 \\ n^2 + 2n + 2 = P \xrightarrow{n=1} 1 + 2 + 2 = 5 = P \end{cases}$$

در نتیجه تنها یک مقدار برای P مجاز می‌باشد.

۲۵- گزینه ۲ مبحث: ریاضیات گسسته- فصل ۱- درس دوم (بخش‌پذیری و خواص آن) درجه دشواری: متوسط

نکته) برای n های طبیعی فرد، طبق اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - ba^{n-2} + \dots - b^{n-2}a + b^{n-1})$$

$$5^2 + 1 \mid (5^2)^n + 1^n \Rightarrow 26 \mid 5^{4k-2} + 1$$

$$(n=2k-1, k \in \mathbb{N})$$

باتوجه به نکته‌ی مذکور می‌توان گفت:

همچنین واضح است که $26 \mid 13$ و در نتیجه طبق خاصیت تعدی خواهیم داشت:

$$13 \mid 26 \xrightarrow{26 \mid 5^{4k-2} + 1} 13 \mid 5^{4k-2} + 1$$

بنابراین عدد طبیعی n باید به صورت $4k-2$ (یا $4k+2$) باشد که تنها در گزینه دوم این اتفاق می‌افتد.

تست: اگر عدد $1-2^n$ بر عدد ۱۰۵ بخش‌پذیر باشد، تعداد اعداد دورقمی n ، کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

مرجع: کنکور سراسری ریاضی و فیزیک - خارج از کشور ۱۳۹۹

گزینه «۳»

۲۶- گزینه ۱ مبحث: ریاضیات گسسته- فصل ۱- درس دوم (بخش‌پذیری و خواص آن) درجه دشواری: متوسط

راه اول) می‌توان عبارت صورت سوال را به شکل زیر نوشت:

$$6xy + 3x - 2y - 1 = 51 \Rightarrow (3x-1)(2y+1) = 51$$

هر دو پرانتز $2y+1$ و $3x-1$ مقادیر طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ دارند، بنابراین برای اینکه حاصل ضربشان برابر ۵۱ شود، باید یکی از آن‌ها برابر ۳ و دیگری برابر ۱۷ باشد:

$$\begin{cases} 3x-1=3 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \text{ غ ق ق} \\ 2y+1=17 \Rightarrow y=8 \end{cases}, \begin{cases} 3x-1=17 \Rightarrow x=6 \\ 2y+1=3 \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

بنابراین تنها مقادیر قابل قبول برابر $x=6$ و $y=1$ بوده و در نتیجه $x+y=7$ می‌شود.

$$y(6x-2) = 52 - 3x \Rightarrow y = \frac{52-3x}{6x-2} (*)$$

راه دوم) طبق فرض داریم:

کافی است بررسی کنیم که چند نقطه با مختصات طبیعی روی منحنی (*) وجود دارند:

$$6x - 2 \mid 52 - 3x \Rightarrow \begin{cases} 6x - 2 \mid 104 - 6x \\ 6x - 2 \mid 6x - 2 \end{cases} \xrightarrow{+} 6x - 2 \mid 102$$

بنابراین $6x - 2$ می‌تواند هر یک از مقادیرهای $\{1, 2, 3, 6, 17, 34, 51, 102\}$ را اختیار کند که تنها به ازای عدد ۳۴ برای x مقداری طبیعی به دست می‌آید و در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} 6x - 2 = 34 \Rightarrow x = 6 \\ y = \frac{52 - 3x}{6x - 2} \xrightarrow{x=6} y = \frac{34}{34} = 1 \end{cases} \Rightarrow x + y = 6 + 1 = 7$$

تست: چند نقطه با مختصات صحیح روی منحنی $8x^2 + xy + 3x - y = 0$ قرار دارد؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

مرجع: کنکور سراسری ریاضی و فیزیک - نوبت اول - داخل ۱۴۰۴

گزینه «۱»

درجه دشواری: متوسط

مبحث: ریاضیات گسسته - فصل ۱ - درس دوم (بم و کمم)

۲۷ - گزینه ۳

نکته) می‌دانیم: $k \in \mathbb{Z}$ و $(m, n) = (m, n - km)$

طبق نکته‌ی مذکور می‌توان گفت:

$$(a, b(a + b + 1)) = (a, b(b + 1) + ab) = (a, b(b + 1)) = 1$$

حال چون $b(b + 1)$ عددی زوج است، a باید عددی فرد باشد. پس:

$$a = 2k + 1 \Rightarrow a^4 = 16k^4 + 1 \Rightarrow 5b \times (a + 1) \times (a^4 + 31) = 5b \times \underbrace{(2k + 1 + 1)}_{2(k+1)} \times \underbrace{(16k^4 + 31 + 1)}_{16(k^4+2)} = 16 \cdot b \cdot (k + 1)(k^4 + 2)$$

پس عبارت داده شده، به ازای هر عدد طبیعی a و b ، همواره بر عدد 160 بخش پذیر است.

درجه دشواری: متوسط

مبحث: ریاضیات گسسته - فصل ۱ - درس دوم (بم و کمم)

۲۸ - گزینه ۱

راه اول) طبق فرض مسئله داریم:

$$c^2 \mid b \xrightarrow{c \mid c^2} c \mid b \xrightarrow{\text{توان ۳}} c^3 \mid b^3 \Rightarrow c^3 \mid ab^3 \xrightarrow{\times ab} abc^3 \mid a^2b^4 \Rightarrow [abc^3, b^4a^2] = a^2b^4 = (ab^2)^2$$

بنابراین حاصل کمم مذکور یک مربع کامل بوده و در نتیجه نمی‌تواند به فرم $4k + 3$ باشد. (دلیل اینکه این امر ممکن نیست را از طریق «بررسی همه حالات» اثبات کنید.)

راه دوم: به ازای $a = 4$ ، $b = 2$ و $c = 1$ ، روابط $a \mid b$ و $c^2 \mid b$ برقرار می‌شود و در نتیجه:

$$[abc^3, b^4a^2] = [4 \times 2 \times 1^3, 2^4 \times 4^2] = 256 \rightarrow \begin{cases} \text{گزینه ۲) } 256 = 3 \times 85 + 1 \\ \text{گزینه ۳) } 256 = 6 \times 42 + 4 \\ \text{گزینه ۴) } 256 = 5 \times 51 + 1 \end{cases}$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح نمی‌باشد.

درجه دشواری: ساده

مبحث: ریاضیات گسسته - فصل ۱ - درس دوم (قضیه تقسیم)

۲۹ - گزینه ۴

باتوجه به قضیه تقسیم داریم:

$$\begin{cases} a = bq + r \Rightarrow 23! - 11 = 23q + r \quad (1) \\ (0 \leq r < b) \quad (0 \leq r < 23) \\ 23! - 11 = 23 \times (22!) - 11 = 23 \times (22! - 1) + 12 \quad (2) \end{cases}$$

از برابری عبارت‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که $r = 12$ و $q = 22! - 1$ و در نتیجه حاصل جمع آن‌ها برابر $22! + 11$ می‌باشد. تذکر: دقت کنید که طبق تعریف کتاب درسی، اگر مقسوم و مقسوم‌علیه را داشته باشیم، باقی‌مانده و خارج‌قسمت اعدادی منحصر به فرد خواهند شد که یعنی تنها یک مقدار خواهند داشت.

۳۰- گزینه ۲

مبحث: ریاضیات گسسته- فصل ۱- درس دوم (قضیه تقسیم)

درجه دشواری: متوسط

طبق فرض سوال و باتوجه به قضیه تقسیم داریم:

$$\begin{cases} a = 12b + 26, & b > 26 \\ a = 12(b+x) + r, & b+x > r \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 12b + 26 = 12b + 12x + r \Rightarrow r = 26 - 12x$$

 حالا باتوجه به این شرط که $r \geq 0$ باید باشد، داریم:

$$r \geq 0 \Rightarrow 26 - 12x \geq 0 \Rightarrow \frac{26}{12} \geq x \Rightarrow x_{\max} = 2$$

با در نظر گرفتن معادله مکان-زمان، شتاب حرکت $-\frac{5}{4} \frac{m}{s^2}$ و سرعت اولیه آن $20 \frac{m}{s}$ است. بنابراین معادله سرعت-زمان آن به صورت مقابل است.

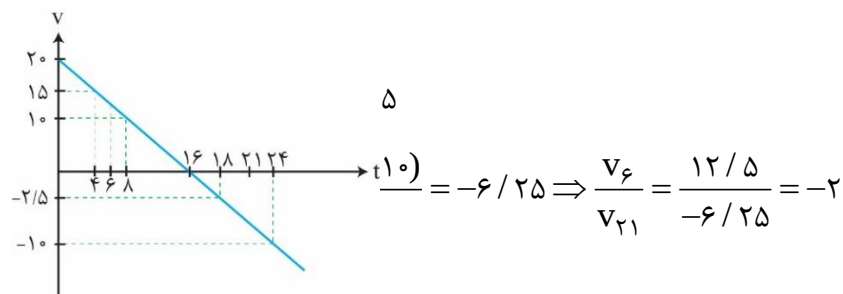
$$v = -\frac{5}{4}t + 20$$

در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در یک بازه زمانی، با سرعت در لحظه میانه آن بازه برابر است. بنابراین کافیست، در معادله سرعت-زمان، لحظه میانه بازه‌های اعلامی را قرار دهیم.

$$v_{av_{4-8}} = v_6 \xrightarrow{t=6} v_6 = -\frac{5}{4} \times 6 + 20 = +\frac{50}{4} \frac{m}{s}$$

$$v_{av_{18-24}} = v_{21} \xrightarrow{t=21} v_{21} = -\frac{5}{4} \times 21 + 20 = +\frac{25}{4} \frac{m}{s}$$

$$\frac{v_6}{v_{21}} = -\frac{50}{25} = -2$$



حل با نمودار:

تست پلاس: معادله حرکت جسمی در SI به صورت $x = -2t^2 + 10t - 8$ است. در بازه زمانی که متحرک تغییر جهت می‌دهد تا دومین لحظه‌ای که جهت بردار مکان عوض می‌شود، سرعت متوسط متحرک چند متر بر ثانیه است؟

$$6 \hat{i} \quad (4)$$

$$-6 \hat{i} \quad (3)$$

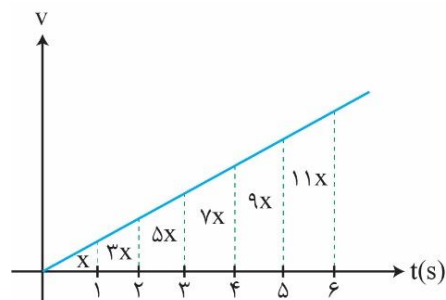
$$-3 \hat{i} \quad (2)$$

$$3 \hat{i} \quad (1)$$

مبحث: کنکور تجربی - تیر ۱۴۰۳

گزینه «۲»

اگر جابجایی متحرک در ثانیه اول حرکت برابر x در نظر گرفته شود، جابجایی متحرک در ثانیه‌های بعدی را، بر حسب x ، مطابق نمودار روبرو تعیین می‌کنیم.



$$\text{ثانیه سوم } (t_1 = 2s \text{ تا } t_2 = 3s) \rightarrow \Delta x = 5x$$

$$\text{ثانیه سوم } (t_1 = 4s \text{ تا } t_2 = 6s) \rightarrow \Delta x' = 9x + 11x = 20x$$

$$\frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{20x}{5x} = 4$$

تست پلاس: متحرکی در لحظه $t_1 = 0s$ روی محور x از حال سکون، با شتاب ثابت، شروع به حرکت می کند. اگر در بازه زمانی

$t_1 = 0s$ تا $t_2 = 12s$ ، مسافت $216m$ را طی کند، در کدام بازه زمانی داده شده برحسب ثانیه، مسافت 36 متر را طی می کند؟

(۴) ۴ تا ۶

(۳) ۵ تا ۷

(۲) ۶ تا ۸

(۱) ۷ تا ۹

مبحث: کنکور تجربی - تیر ۱۴۰۴

گزینه «۳»

درجه دشواری: متوسط

مبحث: فیزیک دوازدهم - معادله سرعت-جابجایی در حرکت با شتاب ثابت

۳۳-گزینه ۲

$$x_0 = ?$$

$$v_0 = 0$$

سرعت متحرک در نقاط بیان شده، به شکل روبروست.

$$x_1 = 10m$$

$$v_1 = 8 \frac{m}{s}$$

معادله مستقل از زمان را دو مرحله به کار می بریم.

$$x_2 = 35m$$

$$v_2 = 12 \frac{m}{s}$$

$$(x_0, x_1) \rightarrow 8^2 - 0 = 2a(10 - x_0) \rightarrow \frac{64}{80} = \frac{10 - x_0}{25}$$

$$(x_1, x_2) \rightarrow 12^2 - 8^2 = 2a(35 - 10)$$

$$\frac{4}{5} = \frac{10 - x_0}{25} \rightarrow 20 = 10 - x_0 \rightarrow x_0 = -10m$$

درجه دشواری: سخت

مبحث: فیزیک دوازدهم - فصل ۱- ترکیبی از مباحث فصل

۳۴-گزینه ۲

$$\Delta x = v\Delta t = 40 \times 0.5 = 20m$$

ابتدا مسافت طی شده در زمان واکنش را به دست می آوریم.

خودرو در ۳ ثانیه آخر، ۱۸ متر حرکت کرده و متوقف شده است.

$$\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 \rightarrow 18 = -\frac{1}{2} \times a \times 3^2 \rightarrow a = -4 \frac{m}{s^2}$$

مسافت طی شده از شروع ترمز تا توقف کامل برابر است با:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \rightarrow 0 - 40^2 = -8\Delta x \rightarrow \Delta x = 200m$$

به این مسافت باید، مسافت طی شده در زمان واکنش نیز اضافه شود.

$$\ell = 200 + 20 = 220m$$

تست پلاس: متحرکی روی محور x با شتاب ثابت $\frac{3}{2} \frac{m}{s^2}$ ترمز می کند و پس از طی مسافت 200 متر می ایستد. در ۳ ثانیه آخر

حرکتش، چند متر جابه جا می شود؟

(۴) ۲۷

(۳) ۱۸

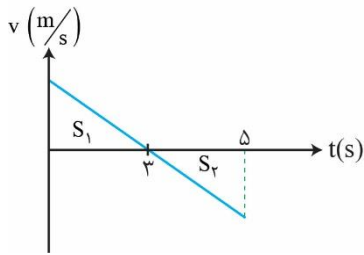
(۲) ۱۳/۵

(۱) ۹

مبحث: کنکور تجربی - اردیبهشت ۱۴۰۴

گزینه «۲»

نمودار سرعت-زمان متحرک را در ۵ ثانیه اول حرکت رسم می کنیم. اگر مساحت مثلث ها را S_1 و S_2 در نظر بگیریم:



$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

نسبت جابجایی ها در این بازه ها به صورت مقابل است.

$$\Delta x_{0-3} = 9X$$

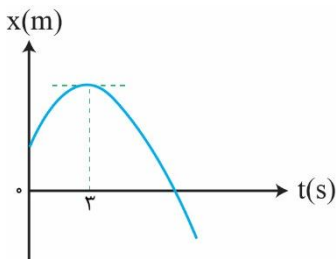
$$\Delta x_{3-5} = -4X$$

نسبت جابجایی و مسافت در ۵s اول حرکت برابر است با:

$$\frac{\Delta x_{0-5}}{\ell_{0-5}} = \frac{9X - 4X}{9X + 4X} = \frac{5}{13} \rightarrow \frac{v_{av}}{v_{av}} = \frac{5}{13} \rightarrow v_{av} = \frac{5}{13} \times 6/5 \rightarrow v_{av} = 2/5 \frac{m}{s}$$

تست پلاس: نمودار مکان-زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می کند، مطابق شکل است. اگر بزرگی شتاب برابر

$2 \frac{m}{s^2}$ باشد، مسافت طی شده در چهار ثانیه اول چند برابر مسافت طی شده در ۴ ثانیه دوم است؟



$$\frac{1}{4} (2)$$

$$\frac{1}{3} (1)$$

$$\frac{5}{12} (4)$$

$$\frac{3}{4} (3)$$

مبحث: کنکور تجربی - اردیبهشت ۱۴۰۳

گزینه «۴»

دقت کنید در صورت سوال زمان لازم برای ترک کامل تونل توسط قطار خواسته شده است، بنابراین از لحظه ی وارد شدن قطار به تونل تا زمانی که آخرین واگن آن از تونل خارج می شود را باید در نظر بگیریم. در این حالت قطار به اندازه ی مجموع طول تونل و طول خود باید جابه جا شود و چون در مسیری مستقیم با سرعت ثابت حرکت می کند، داریم:

$$\Delta x = L_{\text{تونل}} + L_{\text{قطار}} = 0.1 + 0.125 \Rightarrow \Delta x = 0.225 \text{ km}$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{0.225 \text{ km}}{45 \frac{\text{km}}{\text{h}}} \Rightarrow \Delta t = \frac{5}{1000} \text{ h} \xrightarrow{1 \text{ h} = 3600 \text{ s}} \Delta t = \frac{5}{1000} \times 3600 = 18 \text{ s}$$

بزرگی سرعت متوسط در مسیر رفت برابر است با:

$$v_{(av)1} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \Rightarrow v_{(av)1} = \frac{v(\frac{\Delta t}{2}) + v(\frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} = \frac{3}{4} v$$

بزرگی سرعت متوسط در مسیر برگشت برابر است با:

$$v_{(av)r} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_r}{\Delta t_1 + \Delta t_r} \Rightarrow v_{(av)r} = \frac{\Delta x}{\frac{\Delta x}{v} + \frac{\Delta x}{2v}} = \frac{1}{\frac{1}{2v} + \frac{1}{v}} = \frac{2}{3} v$$

بررسی تندی متوسط در کل مسیر حرکت برابر است با:

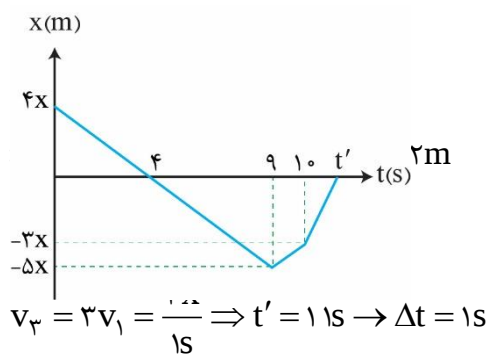
$$s_{av} = \frac{2\Delta x}{\Delta t_1 + \Delta t_r} = \frac{2\Delta x}{\frac{\Delta x}{v_{(av)1}} + \frac{\Delta x}{v_{(av)r}}} \Rightarrow s_{av} = \frac{2\Delta x}{\frac{\Delta x}{\frac{3}{4}v} + \frac{\Delta x}{\frac{2}{3}v}} = \frac{2}{\frac{4}{3v} + \frac{3}{2v}} = \frac{12}{17} v$$

درجه دشواری: سخت

مبحث: فیزیک دهم - حرکت با سرعت ثابت

۳۸- گزینه ۴

باتوجه به تشابه نقاط روی محور X نمودار را به صورت پارامتری مشخص می‌کنیم و با دانستن اینکه تندی در قسمت اول حرکت نصف تندی در قسمت دوم حرکت است مکان متحرک در $t = 10s$ را تعیین می‌کنیم.



حال اگر از مکان $-3x$ با تندی سه برابر تندی قسمت اول حرکت کنیم ($3v_1 = 3 \times \frac{x}{1s}$) داریم:

$$v_3 = 3v_1 = \frac{3x}{1s} \Rightarrow t' = 11s \rightarrow \Delta t = 1s$$

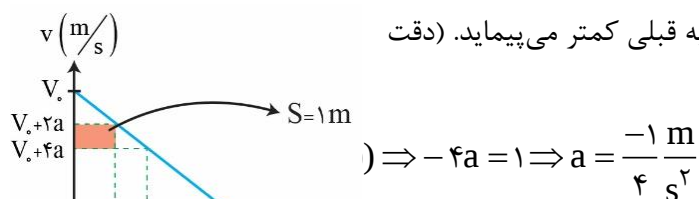
درجه دشواری: سخت

مبحث: فیزیک دوازدهم - حرکت با شتاب ثابت

۳۹- گزینه ۲

نمودار فرضی سرعت-زمان متحرک را رسم می‌کنیم:

مساحت مشخص شده همان مقدار مسافتی است که متحرک نسبت به دو ثانیه قبلی کمتر می‌پیماید. (دقت کنید: $a < 0$)



$$\Rightarrow -4a = 1 \Rightarrow a = \frac{-1}{4} \frac{m}{s^2}$$

حال برای بدست آوردن v_0 از معادله‌ی مستقل از زمان استفاده می‌کنیم:

$$v' - v_0 = 2a\Delta x \Rightarrow -v_0 = 2 \times \frac{-1}{4} \times 578 \Rightarrow v_0' = 289 \Rightarrow |v_0| = 17 \frac{m}{s}$$

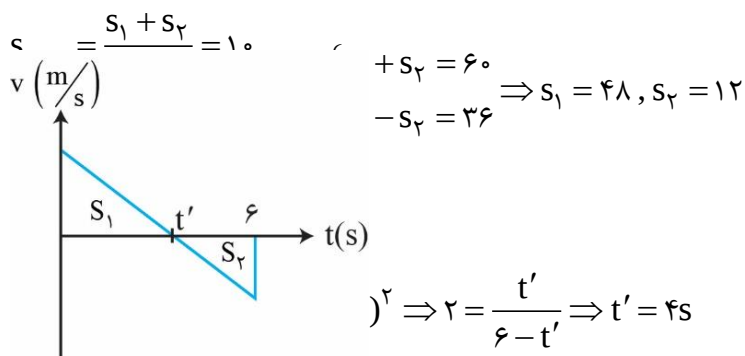
حرکت متحرک با شتاب ثابت بوده و در انتها متوقف شده است. ($a = \frac{-1}{4}$)، پس v_0 مثبت است و $v_0 = +17 \frac{m}{s}$.

درجه دشواری: سخت

مبحث: فیزیک دوازدهم- فصل ۱- حرکت با شتاب ثابت-ص ۱۵

۴۰- گزینه ۱

در ۶ ثانیه اول تندی متوسط از سرعت متوسط بیشتر بوده است، در نتیجه متحرک تغییر جهت داده است. بردار سرعت متوسط مثبت است پس: $S_1 > S_2$



از تشابه داریم:

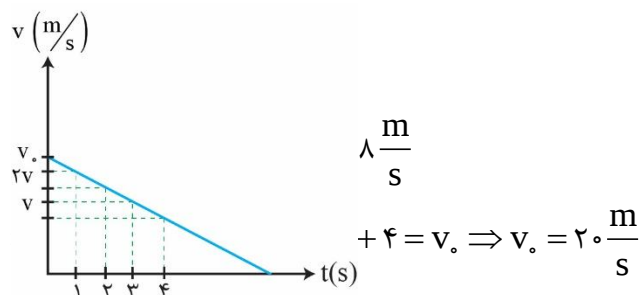
$$\Rightarrow S_2 = \frac{1}{2} (6 - 4) |v_6| = 12 \Rightarrow v_6 = -12 \frac{m}{s}$$

درجه دشواری: متوسط

مبحث: فیزیک دوازدهم- حرکت با شتاب ثابت

۴۱- گزینه ۴

متحرک در جهت مثبت محور در حرکت است و سرعت متوسط در ۲ ثانیه دوم کمتر از ۲ ثانیه اول است. در نتیجه شتاب حرکت منفی است.



سرعت متوسط ۲ ثانیه اول (سرعت در ثانیه ۱): ۲۷

سرعت متوسط ۲ ثانیه دوم (سرعت در ثانیه ۲): ۷

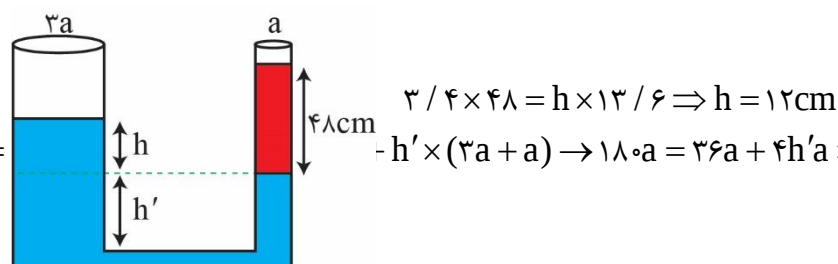
درجه دشواری: سخت

مبحث: فیزیک دهم- فصل ۲- محاسبه فشار در شاروها

۴۲- گزینه ۲

ابتدا حالت مایعات را بعد از باز کردن شیر در نظر می گیریم:

سپس ارتفاع h را بدست می آوریم.



حجم جیوه ای که از ابتدا در لوله موجود بوده است:

ارتفاع جیوه بعد از باز کردن شیر:

جابجایی سطح جیوه:

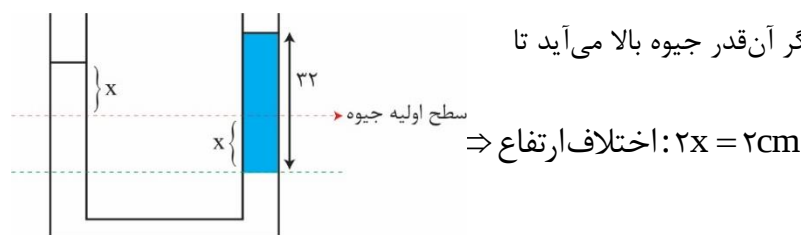
درجه دشواری: متوسط

مبحث: فیزیک دهم- فصل ۲- مثال ۲-۳- ص ۳۵

۴۳- گزینه ۲

با اضافه شدن الکل در یکی از ستون های لوله U شکل، در طرف دیگر آن قدر جیوه بالا می آید تا

طبق رابطه ی $\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$ تعادل برقرار شود.



باتوجه به اطلاعات سوال فشار هوا ۷۰ سانتی متر جیوه است.

$$P_{\text{هوای لوله}} = P_{\text{هوای}} - P_{\text{ستون مایع موجود}} = 70 - 50 = 20 \text{ cmHg}$$

$$F = PA = 20 \times 1360 \times 2 \times 10^{-4} = 5 / 44 \text{ N}$$

درجه دشواری: ساده

مبحث: فیزیک دهم- تعریف فشار

۴۵- گزینه ۱

چون جرم تغییر نکرده پس نسبت فشارها برابر با عکس نسب مساحتها خواهد بود.

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{F_2}{A_2}}{\frac{F_1}{A_1}} = \frac{\frac{A_1 m_2 g}{A_2 m_1 g}}{\frac{A_1}{A_2}} \xrightarrow{m_1 = m_2} \frac{A_1}{A_2} = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = 4$$

درجه دشواری: متوسط

مبحث: فیزیک دهم- فشار در شارهها

۴۶- گزینه ۳

ابتدا حجمی را که در قسمت با سطح مقطع بزرگتر جا می شود را به دست می آوریم:

$$130 \times 10 = 1300 \text{ cm}^3$$

$$2000 - 1300 = 700 \text{ cm}^3 \Rightarrow \frac{700}{4} = 175 \text{ cm}$$

ارتفاع مایع در لوله ی بلند:

$$h_{\text{کل}} = 175 + 130 = 305 \text{ cm}$$

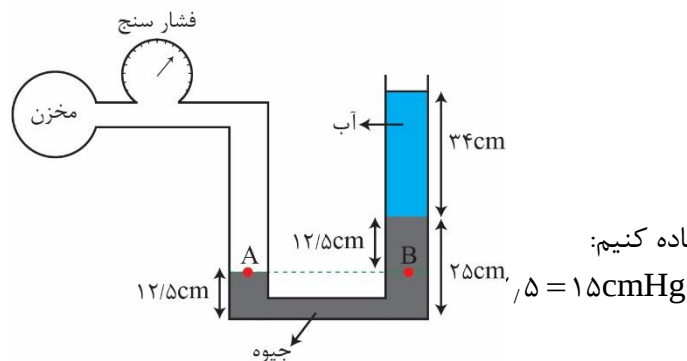
$$F = PA = \rho ghA = 2000 \times 10 \times \frac{305}{100} \times 10 \times 10^{-4} = 61 \text{ N}$$

درجه دشواری: سخت

مبحث: فیزیک دهم- فشارسنج شارهها (مانومتر)

۴۷- گزینه ۳

در مرحله اول فشار ستون آب را بر حسب cmHg به دست می آوریم:



برای به دست آوردن فشار پیمانه ای مخزن، کافی است از قاعده هم فشاری استفاده کنیم:

فشارسنج، فشار پیمانه ای مخزن را نشان می دهد. بنابراین از نسبت داده شده، فشار هوا را محاسبه می کنیم:

$$\frac{P_{\text{پیمانه ای}}}{P_{\text{مطلق}}} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{15}{P_{\text{مطلق}}} = \frac{1}{6} = 90 \text{ cmHg} \Rightarrow P_{\text{مطلق}} - P_0 \Rightarrow 15 = 90 - P_0 \Rightarrow P_{\text{پیمانه ای}} = P_{\text{مطلق}} \Rightarrow P_0 = 75 \text{ cmHg}$$

درجه دشواری: متوسط

مبحث: فیزیک دهم- فصل ۲- معادله ۱-۲- ص ۳۳

۴۸- گزینه ۲

در گام اول باید محاسبه کنیم که وقتی سطح آزاد مایع ۵۱ سانتی متر بالا می رود، پیستون و سطح پایین چند سانتی متر بالا آمده است. پس می توان نوشت:

$$\Rightarrow A \times 51 = 3A \times h \quad \Delta V_{\text{سطح بالا}} = \Delta V_{\text{سطح پایین}}$$

$$\Rightarrow h' = 17 \text{ cm}$$

چون سطح بالایی ۵۱ cm بالا رفته و سطح پایینی نیز ۱۷ cm بالا رفته پس ارتفاع مایع در مجموع ۳۴ cm افزایش پیدا کرده است و در گام بعدی، فشار ۳۴ cm از مایع را به سانتی متر جیوه تبدیل می‌کنیم:

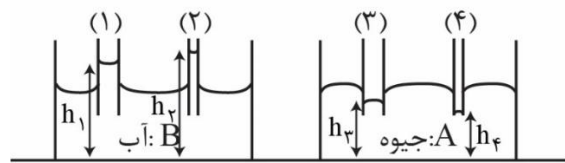
$$\rho_{\text{جیوه}} h_{\text{جیوه}} = \rho_{\text{مایع}} \times h_{\text{مایع}} \Rightarrow h_{\text{جیوه}} = \frac{3/4 \times 34}{13/6} = 8/5 \text{ cmHg}$$

درجه دشواری: ساده

مبحث: فیزیک دهم- فصل ۲- اثر موینگی- ص ۳۱

۴۹- گزینه ۳

چون در مایع A نیروی هم‌چسبی بزرگ‌تر از نیروی چسبندگی (دگرچسبی) بین مولکول‌های مایع و مولکول‌های شیشه است، به همین دلیل، می‌توانیم مایع A را جیوه فرض کنیم و به همین ترتیب مایع B را آب فرض کنیم. هرچه قطر لوله‌ی موین باریک‌تر باشد، سطح آزاد مایع در آب بالاتر و در جیوه پایین‌تر قرار می‌گیرد. بنابراین خواهیم داشت:



درجه دشواری: متوسط

مبحث: فیزیک دهم- فصل ۲- محاسبه فشار در شاره‌ها- ص ۳۳

۵۰- گزینه ۲

ظرف حاوی دو مایع مخلوط نشدنی را مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم. باتوجه به نمودار پس از ۴۵ cm که از کف ظرف بالا می‌آییم، فشار ثابت و برابر با ۷۵ cmHg می‌شود، پس به سطح مایع رسیده‌ایم. در نتیجه:

مطابق با نمودار، فشار در کف ظرف ۱۰۵ cmHg است، بنابراین:

$$h_2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho}{4} \text{ مایع} \\ \rho \text{ جیوه} \end{array} \right. \Rightarrow h_1 + h'_2 = 30 \quad (2)$$

$$h_1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho}{4} \text{ مایع} \\ \rho \text{ جیوه} \end{array} \right. \Rightarrow h'_2 = \frac{h_2}{4} \quad (3)$$

که در آن h'_2 فشار حاصل از مایع بالایی است که به سانتی متر جیوه تبدیل شده است:

با استفاده از رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} h_1 = 25 \text{ cm} \\ h_2 = 20 \text{ cm} \end{cases} \begin{cases} \xrightarrow{(2),(3)} h_1 + \frac{h_2}{4} = 30 \\ \xrightarrow{(1)} h_1 + h_2 = 45 \end{cases}$$

$$P = 105 - h_1 = 105 - 25 \Rightarrow P = 80 \text{ cmHg}$$

در پایان واکنش یونهای Na^+ و Cl^- محلول در آب هستند.

$$\text{Cl}^-, \text{Na}^+ \text{ مول یونهای } = \text{غلظت} \times \text{حجم محلول} = 1 \times 0.8 = 0.8 \text{ mol} \Rightarrow 0.4 \text{ mol NaCl}$$

$$\frac{\text{Na}_2\text{SO}_4 \text{ مول}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{NaCl مول}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{0.4}{2} \Rightarrow x = 0.2$$

$$\text{Na}_2\text{SO}_4 \text{ غلظت مولی} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{غلظت مولی} = \frac{10ad}{\text{جرم مولی}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{10 \times a \times 1/42}{142} \Rightarrow a = 6/6$$

تست پلاس: به ۲۰۰ میلی لیتر محلول پتاسیم هیدروکسید، مقدار کافی فسفریک اسید برای واکنش کامل اضافه شده است. اگر ۵۳ گرم پتاسیم فسفات تشکیل شود، غلظت باز شرکت کننده در واکنش، چند مول بر لیتر است؟ (تجربی داخل کشور ۱۴۰۰)

$$(H = 1, O = 16, P = 31, K = 39 : \text{g.mol}^{-1})$$



$$1/58 (4)$$

$$1/85 (3)$$

$$3/75 (2)$$

$$3/25 (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

انحلال پذیری KNO_3 در 40°C ، 60°C گرم است و هر مترمکعب آب، 10°C گرم جرم دارد.

$$\frac{60 \text{ گرم نمک}}{6 \times 10^6} \quad \frac{100 \text{ گرم آب}}{x} \Rightarrow x = 36 \times 10^5 \text{ g} = 3/6 \text{ ton}$$

$$\Rightarrow 4 - 3/6 = 0.4 \text{ ton}$$

اکنون غلظت مولی نمک را تعیین می کنیم.

$$\text{درصد جرمی} = \frac{100s}{100+s} = \frac{6000}{160} = 37/5 \text{ درصد}$$

$$\text{غلظت مولی} = \frac{10 \times \text{درصد جرمی} \times \text{چگالی}}{\text{جرم مولی}} = \frac{10 \times 37/5 \times 1/33}{100} \approx 0.5 \text{ mol.L}^{-1}$$

راه حل دوم:

انحلال پذیری KNO_3 ، 60°C در 100°C آب است، پس:

$$6 \text{ m}^3 \text{ آب} \times \frac{10^6 \text{ g آب}}{1 \text{ m}^3 \text{ آب}} \times \frac{60 \text{ g KNO}_3}{100 \text{ g آب}} \times \frac{1 \text{ ton}}{10^6 \text{ g}} = 3/6 \text{ ton KNO}_3$$

پس 0.4 ton باقی می ماند.

و از طرفی در 1000 mL محلول:

$$1000 \text{ mL} \times \frac{1/33 \text{ g}}{1 \text{ mL محلول}} \times \frac{60 \text{ g KNO}_3}{160 \text{ g}} \times \frac{1 \text{ mol}}{100 \text{ g KNO}_3} = 0.5 \text{ mol}$$

پس محلول 0.5 M است.

مبحث: شیمی ۳، صفحات ۴ تا ۶ درجه دشواری: ساده

۵۳- گزینه ۴

بررسی گزینه‌ها:

(۱) نادرست: هر دو به هر نسبتی در آب حل می‌شوند.

(۲) نادرست: اوره و اسید چرب با آب پیوند هیدروژنی ایجاد می‌کنند.

(۳) نادرست: تعداد کربن‌های وازلین از گریس بیشتر است و قوی‌تر به پلی‌استر می‌چسبد. پس گریس بهتر از سطح پلی‌استر پاک می‌شود.

فرمول تقریبی گریس: $C_{18}H_{38}$

فرمول تقریبی وازلین: $C_{25}H_{52}$

(۴) درست: HCl و $CuSO_4$ به صورت یونی در آب حل می‌شوند و جاذبه یون - دو قطبی ایجاد می‌کنند.

(تجربی دی ماه ۱۴۰۱)

تست پلاس: چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- اضافه کردن جوش شیرین به شوینده می‌تواند باعث افزایش قدرت پاک‌کنندگی آن شود.
- عسل، اوره و اتیلن گلیکول از طریق جاذبه‌های بین‌مولکولی مشابه، در آب حل می‌شوند.
- «ایجاد کف» یکی از شواهد عینی تعیین عملکرد صابون در پاک‌کنندگی آلاینده‌های موجود در محیط است.
- مهم‌ترین تفاوت صابون و پاک‌کننده‌های غیرصابونی، بخش قطبی تشکیل‌دهنده بار منفی در ساختار آن‌ها است.

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه (۲): «میزان کف»!

مبحث: شیمی ۳، صفحات ۶ تا ۱۲ درجه دشواری: ساده

۵۴- گزینه ۳

بخش قطبی شوینده صابونی $\left[\begin{array}{c} \cdot\ddot{O}: \\ | \\ \text{---} \text{C} \text{---} \ddot{O}: \\ | \\ \cdot\ddot{O}: \end{array} \right]^-$ با جرم مولی $\frac{44 \text{ g}}{\text{mol}}$ و بخش قطبی شوینده غیرصابونی $\left[\begin{array}{c} \cdot\ddot{O}: \\ | \\ \text{---} \text{S} \text{---} \ddot{O}: \\ | \\ \cdot\ddot{O}: \end{array} \right]^-$ با جرم مولی $\frac{60 \text{ g}}{\text{mol}}$ می‌باشد.

شوینده‌های صابونی در آب سخت رسوب می‌کنند ولی شوینده‌های غیرصابونی محلول باقی می‌مانند و هیچکدام با آلاینده واکنش نمی‌دهند.

اگر بخش قطبی صابون (COO^-) با بخش غیرصابونی (SO_3^-) جایگزین شود:

- جرم مولی افزایش می‌یابد.
- میزان جاذبه با یون Mg^{2+} کاهش می‌یابد.
- جفت الکترون ناپیوندی افزایش می‌یابد.
- شوینده صابونی و غیرصابونی با آلاینده‌ها واکنش نمی‌دهند.

مبحث: شیمی ۱، صفحات ۹۴ و ۹۵ و شیمی ۳، صفحات ۱۶ تا ۱۹ درجه دشواری: ساده

۵۵- گزینه ۴

ابتدا با کمک حجم و چگالی، جرم محلول را به دست آورده و با کمک غلظت، جرم H_3O^+ را به دست می‌آوریم. با توجه به تبدیل SO_3 به H_2SO_4 و تفکیک H_2SO_4 می‌توانیم به جرم SO_3 برسیم.



$$5 \text{ m}^3 \times \frac{1.06 \text{ mL}}{1 \text{ m}^3} \times \frac{1 \text{ g}}{1 \text{ mL}} \times \frac{1.06 \text{ g H}_3\text{O}^+}{1.06 \text{ g}} \times \frac{1 \text{ mol H}_3\text{O}^+}{18 \text{ g H}_3\text{O}^+} \times \frac{1 \text{ mol SO}_3}{2 \text{ mol H}_3\text{O}^+} \times \frac{80 \text{ g}}{1 \text{ mol}} = 8000 \text{ g SO}_3$$

درجه دشواری: ساده

مبحث: شیمی ۳، صفحات ۱۲ و ۱۳

۵۶- گزینه ۴

بررسی عبارت‌ها:

الف) با توجه به «با هم بیندیشیم» صفحه ۱۲ کتاب درسی، کاغذ pH در محلول جوهرنمک و سرکه سفید، قرمز و در صابون و محلول سود، آبی رنگ می‌شود.

ب) واکنش این مخلوط با آب گرماده است که به انحلال فرآورده‌ها کمک می‌کند.

پ) پاک‌کننده‌های خورنده، علاوه بر برهم‌کنش، با ذره‌های آلاینده واکنش شیمیایی هم انجام می‌دهند اما شوینده‌های صابونی واکنش نمی‌دهند.

ت) سدیم هیدروکسید چربی‌هایی که در لوله باعث انسداد شده‌اند را به یک ماده محلول (صابون) تبدیل می‌کند. که عبارات (پ) و (ت) نادرست هستند.

درجه دشواری: دشوار

مبحث: شیمی ۳، صفحات ۵ تا ۸

۵۷- گزینه ۱

هر چهار عبارت درست هستند.

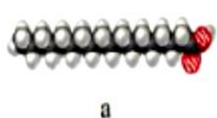
الف) اگر ترکیب C که یک استر بلندزنجیر با جرم مولی زیاد است پیوند کربن - کربن دوگانه نداشته باشد (مانند چربی کوهان شتر) حالت فیزیکی آن مانند ترکیب b جامد است.

ب) در هر سه ترکیب پیوند $C=O$ دوگانه در گروه عاملی وجود دارد.

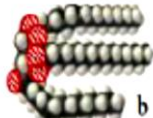
پ) صابون‌ها (b) را می‌توان هم از اسید چرب و هم از استر با جرم مولی زیاد تهیه کرد.

ت) چربی‌ها را می‌توان مخلوطی از اسیدهای چرب (a) و استرهای با جرم مولی زیاد (c) دانست.

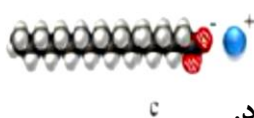
تست پلاس: شکل‌های زیر، مدل فضاپُرکن سه ترکیب آلی را نشان می‌دهد. کدام موارد از مطالب زیر، درباره آن‌ها، درست است؟ (تجربی داخل کشور ۱۴۰۱)



a



b



c

الف) b و c هر دو از اجزای سازنده چربی‌اند.

ب) a و c، هم در چربی و هم در آب حل می‌شوند.

پ) از هریک از ترکیب‌های a و b، می‌توان c را به دست آورد.

ت) مخلوط b با آب، با اضافه کردن c، به یک کلوئید تبدیل می‌شود.

ث) a نمایانگر یک کربوکسیلیک اسید با زنجیره بلند کربنی و c یک پاک‌کننده غیرصابونی است.

(۴) پ - ت

(۳) پ - ت - ث

(۲) الف - ت

(۱) الف - ب - ث

پاسخ: گزینه (۴)

گزینه ۱) pH محلول‌ها برابر است، پس غلظت یون هیدرونیوم در دو محلول برابر است؛ اگر هر دو اسید تک پروتون‌دار باشند، برای تولید هر یون هیدرونیوم یک آنیون هم تولید می‌شود که در نتیجه تعداد یون‌ها و رسانایی الکتریکی محلول‌ها برابر می‌شود. و در غیر این صورت هم محلولی که برای تولید مقدار یون هیدرونیوم برابر تعداد یون بیشتری ایجاد می‌کند رسانایی بالاتری دارد. رسانایی محلول‌ها ارتباطی با قدرت اسیدی اسیدها ندارد.

گزینه ۲) با توجه به اینکه باریم هیدروکسید باز دو ظرفیتی است، غلظت $[OH^-]$ محلول آن از غلظت $[OH^-]$ محلول NaOH بیشتر بوده و pH بالاتری دارد.

گزینه ۳) نیتریک اسید یک اسید قوی با یونش تقریباً کامل است، در نتیجه دما اثر چندانی بر میزان یونش و pH آن ندارد ولی استیک اسید ضعیف بوده و با تغییر دما، یونش آن کاملاً تغییر می‌کند.

گزینه ۴) برای باز AOH ، $[A^+] = [OH^-]$ است. در نتیجه وقتی $[OH^-]$ در باز BOH بیشتر از AOH باشد، pH آن بیشتر است.

فقط (الف) درست است.

(الف) مانند اسیدها و برخی بازها که مولکولی هستند ولی یونیده می‌شوند.

(ب) $Ca_3(PO_4)_2$ در آب نامحلول است و افزودن آن به آب باعث سختی آن نمی‌شود.

(پ) اگر R در اسید واکنش‌دهنده تعداد کمی کربن داشته باشد از ابتدا محلول در آب است.

گزینه ۱) اکسیدهایی مانند CO، NO و N_2O در آب مولکولی حل می‌شوند و یون تولید نمی‌کنند.

گزینه ۲) جرم برابر از لیتیم اکسید و کلسیم اکسید حاوی تعداد متفاوتی از آن‌ها بر حسب مول بوده و pH متفاوت است.

گزینه ۳) هر مول دی‌نیتروژن پنتاکسید، ۴ مول یون تولید می‌کند ولی هر مول گوگرد تری‌اکسید تعداد یون کمتری ایجاد می‌کند. چون با

وجود قوی بودن H_2SO_4 ، HSO_4^- قوی نیست و به طور کامل به H^+ و SO_4^{2-} تبدیل نمی‌شود.

گزینه ۴) از انحلال لیتیم اکسید (Li_2O) در آب، ۴ یون و باریم اکسید (BaO) در آب ۳ یون تولید می‌شود.

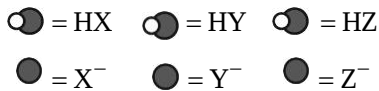
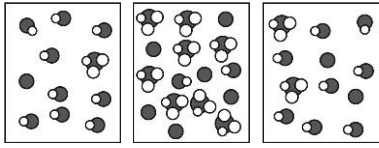
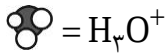
درجه یونش از تقسیم تعداد مولکول‌های یونیده شده به شمار کل مولکول‌های حل شده به دست می‌آید. پس

$$\alpha = \frac{\text{تعداد مولکول یونیده شده}}{\text{تعداد مولکول یونیده شده} + \text{تعداد مولکول یونیده نشده}}$$

$$\alpha_{HA} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$\alpha_{HB} = \frac{1}{4} = 0.25$$

تست پلاس: در شکل زیر، محلول اسیدهای HX، HY و HZ، با غلظت مولی و دمای یکسان، نشان داده شده است و برای سادگی مولکول‌های آب حذف شده است. چند مورد از مطالب زیر، درباره آن‌ها درست است؟ (تجربی داخل کشور ۱۴۰۰)



• در میان اسیدها، HX ضعیف‌ترین اسید است.

• واکنش یونش هر سه اسید در آب، تعادلی است.

• قدرت اسیدی اتانویک اسید، به یقین از HY کمتر است.

• ثابت یونش HZ، از ثابت یونش HX بزرگتر و از ثابت یونش HY کوچک‌تر است.

• اگر HX، هیدروسیانیک اسید باشد، HZ می‌تواند هیدروفلوئوریک اسید باشد.

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

پاسخ: گزینه (۴)

مبحث: شیمی ۳، صفحات ۵ و ۶ درجه دشواری: ساده

۶۲- گزینه ۳

همه صابون‌ها دارای یک پیوند دوگانه در گروه کربوکسیلات خود هستند. با توجه به مایع بودن صابون، کاتیون آن K⁺ می‌باشد و فرمول پاک‌کننده C_{۲۰}H_{۳۹}O_۲K است که جرم مولی آن:

$$\frac{20 \times 12 + 39 + 2 \times 16 + 39}{\text{mol}} = 350 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

می‌باشد.

تست پلاس: با توجه به مطالب کتاب درسی، اگر تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن و کربن در یک پاک‌کننده غیرصابونی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، برابر ۱۱ باشد، جرم مولی آن، برابر چند گرم است؟ (تجربی خارج کشور ۱۴۰۳)

(H = ۱, C = ۱۲, O = ۱۶, Na = ۲۳, S = ۳۲ : g.mol⁻¹)

(۴) ۳۵۲

(۳) ۳۵۰

(۲) ۳۴۸

(۱) ۳۴۶

پاسخ: گزینه (۲)

درجه دشواری: متوسط

مبحث: شیمی ۳، صفحات ۱۶ تا ۲۸

۶۳- گزینه ۴

رسانایی الکتریکی محلول‌ها به مجموع غلظت یون‌ها بستگی دارد.

$$80 \text{ g NaOH} \times \frac{1 \text{ mol NaOH}}{40 \text{ g NaOH}} \times \frac{2 \text{ mol یون}}{1 \text{ mol NaOH}} = 4 \text{ mol یون}$$

(الف)

$$\frac{4 \text{ mol یون}}{2 \text{ L}} = \frac{2 \text{ mol یون}}{\text{L}}$$

(ب) اصلاً الکترولیت نیست.

$$0.1 \frac{\text{mol}}{\text{L}} \text{CaCl}_2 \times \frac{3 \text{ mol یون}}{1 \text{ mol CaCl}_2} = \frac{0.3 \text{ mol یون}}{\text{L}}$$

(پ)

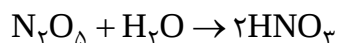
$$2 \frac{\text{mol}}{\text{L}} \text{HF} \times \alpha \times \frac{2 \text{ mol یون}}{1 \text{ mol HF}} = \frac{0.4 \text{ mol یون}}{\text{L}}$$

(ت)

درجه دشواری: دشوار

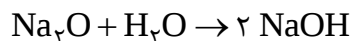
مبحث: شیمی ۳، صفحات ۱۸ تا ۲۸

۶۴- گزینه ۴



$$54\text{g N}_2\text{O}_5 \times \frac{1\text{ mol N}_2\text{O}_5}{108\text{g N}_2\text{O}_5} \times \frac{2\text{ mol HNO}_3}{1\text{ mol N}_2\text{O}_5} = 1\text{ mol HNO}_3$$

$$\text{pH} = -\log M = -\log \frac{1}{2} = 0.3$$



$$124\text{g Na}_2\text{O} \times \frac{1\text{ mol Na}_2\text{O}}{62\text{g Na}_2\text{O}} \times \frac{2\text{ mol NaOH}}{1\text{ mol Na}_2\text{O}} = 4\text{ mol NaOH}$$

$$\text{pH} = 14 + \log M = 14 + \log \frac{4}{10} = 13.6$$

$$13.6 - 0.3 = 13.3$$

درجه دشواری: ساده

مبحث: شیمی ۳، صفحات ۲۴ تا ۲۸

۶۵- گزینه ۱

$$\left. \begin{aligned} [\text{H}^+][\text{OH}^-] &= 10^{-14} \\ \frac{[\text{H}^+]}{[\text{OH}^-]} &= 2/5 \times 10^{-4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow [\text{H}^+]^2 = 2/5 \times 10^{-10} \Rightarrow [\text{H}^+] = 5 \times 10^{-5/5}$$

$$\text{pH} = -\log 5 \times 10^{-5/5} = 4.8$$

تست پلاس: مقدار pH در یک نمونه محلول آمونیاک برابر ۱۰/۷ است. غلظت یون هیدروکسید در آن برابر چند مول بر لیتر و چند برابر غلظت مولار یون هیدرونیوم در آن است؟ (۲/۰ = ۱۰^{۰/۷}) (تجربی خارج کشور ۱۳۹۸)

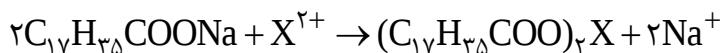
(۱) 4×10^{-6} و 5×10^{-4} (۲) 2×10^{-4} و 4×10^{-6} (۳) 2×10^{-4} و $2/5 \times 10^{-7}$ (۴) 5×10^{-4} و $2/5 \times 10^{-7}$

پاسخ: گزینه (۴)

درجه دشواری: دشوار

مبحث: شیمی ۳، صفحات ۶ تا ۹

۶۶- گزینه ۲



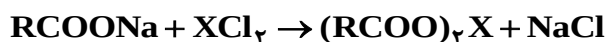
$$20\text{L آب} \times \frac{0.04\text{ mol X}^{2+}}{1\text{L}} \times \frac{2\text{ mol صابون}}{1\text{ mol X}^{2+}} \times \frac{306\text{g}}{1\text{ mol صابون}} = 489.6\text{g}$$

$$\text{پاک کننده ی غیرصابونی} = 800 - 489.6 = 310.4$$

$$\% \text{ پاک کننده ی غیرصابونی} = \frac{310.4}{800} \times 100 = 38.8$$

تست پلاس: غلظت یون کلسیم و منیزیم در یک نمونه آب سخت به ترتیب ۰/۰۰۲۵۰ مولار و ۲۶۴ppm است اگر ۲۷ گرم صابون جامد با جرم مولی ۳۰۰ گرم بر مول به ۲/۵ لیتر از این نمونه آب اضافه شود چند درصد از صابون خاصیت پاک کنندگی خود را از دست می دهد و با توجه به این که نرم کننده های آب سخت این یون ها را با یون سدیم مبادله می کنند به تقریب چند گرم یون سدیم لازم است؟ (جرم هر میلی لیتر از این نمونه آب را یک گرم بگیرد)

(ریاضی داخل کشور ۱۴۰۱)



۰/۷۸، ۷۵ (۴)

۰/۷۸، ۲۵ (۳)

۱/۵۵، ۲۵ (۲)

۱/۵۵، ۷۵ (۱)

پاسخ: گزینه (۱)

درجه دشواری: ساده

مبحث: شیمی ۳، صفحات ۲۰ تا ۲۴

۶۷- گزینه ۳

بررسی عبارات:

(الف) با گذشت زمان تعداد یون های موجود در محلول HCl و در نتیجه رسانایی الکتریکی آن کاهش می یابد.

(ب) با گذشت زمان، تعداد یون ها و در نتیجه رسانایی الکتریکی افزایش می یابد.

(پ) در هر دو محلول واکنش تا مصرف تمام Mg ادامه خواهد یافت و حجم گاز H_۲ تولید شده در پایان هر دو واکنش برابر است.

(ت) با توجه به غلظت بیشتر یون هیدرونیوم در محلول HCl، سرعت واکنش در این محلول بیشتر است.

تست پلاس: در دما و غلظت آغازی یکسان، مقایسه سرعت واکنش محلول آبی کدام اسید با فلز منیزیم درست است؟

(تجربی اردیبهشت ماه ۱۴۰۳)

HNO_۳ > HBr (۴)HF > CH_۳COOH (۳)H_۲CO_۳ > HCl (۲)

HCN > HCOOH (۱)

پاسخ: گزینه (۳)

درجه دشواری: متوسط

مبحث: شیمی ۳، صفحات ۱۸ تا ۲۰

۶۸- گزینه ۴

بررسی عبارت ها:

(۱) درجه یونش و درصد یونش یک اسید به غلظت وابسته هستند.

$$\frac{M_1}{M_2} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2$$

(۲) درجه یونش یک اسید تنها برای اسیدهای تک پروتون دار که شمار مول های یونیده شده اسید با شمار مول های هر کدام از یون های حاصل

برابر است، از رابطه $\frac{[H^+]}{M}$ پیروی می کند.

(۳) در رابطه درجه یونش به جای شمار مولکول ها، می توان شمار مول ها یا غلظت مولی گونه ها را قرار داد.

(۴) از آنجایی که، $\alpha = \frac{\text{شمار مولکول های یونیده شده}}{\text{شمار کل مولکول های حل شده}}$ است، بنابراین این عبارت درست است.

۶۹- گزینه ۴

مبحث: شیمی ۳، صفحات ۱۴ تا ۱۸

درجه دشواری: متوسط

بررسی عبارت‌ها:

الف) HCl به حالت گازی، هیدروژن کلرید نام دارد. (ص ۱۵)ب) انحلال گاز آمونیاک در آب به دو صورت مولکولی و یونی انجام می‌گیرد، بنابراین علاوه بر مولکول‌های آمونیاک (NH_3) حاصل از انحلالمولکولی، گونه نیتروژن‌دار دیگری (NH_4^+) نیز از انحلال یونی آن به دست می‌آید. (شکل صفحه ۱۵)پ) اسیدی‌تر بودن یک محلول، وابسته به غلظت $[\text{H}^+]$ در محیط است. این عامل علاوه بر قدرت اسیدی، وابسته به غلظت محلول نیز می‌باشد.

ت) متن کتاب درسی صفحه ۱۴

۷۰- گزینه ۲

مبحث: شیمی ۳، صفحات ۱۳ تا ۱۶

درجه دشواری: ساده

مواد و ترکیب‌هایی که با حل شدن در آب، غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید را افزایش می‌دهند به ترتیب اسید و باز آرنیوس هستند. در

واقع رفتار اسید و باز آرنیوس را می‌توان بر اساس غلظت یون‌های $\text{H}^+(\text{aq})$ و $\text{OH}^-(\text{aq})$ توصیف کرد. از بین این مواد، HF ، CO_2 و SO_3 در محلول H^+ تولید می‌کنند. و اسید آرنیوس به شمار می‌آیند.

تست پلاس: کدام اکسیدها، اسید آرنیوس به شمار می‌آیند و محلول کدام یک از آن‌ها در آب، اسید قوی‌تری است؟

(تجربی داخل کشور ۱۴۰۰)

a) K_2O ، b) CO_2 ، c) SO_3 ، d) BaO

c; c, b (۴)

b; c, b (۳)

a; d, a (۲)

d; d, a (۱)

پاسخ: گزینه ۴ (۴)