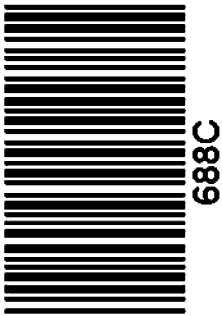


کد کنترل

688

C



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

«در زمینه مسائل علمی، باید دنبال قلّه بود.»
مقام معظم رهبری

عصر جمعه
۱۴۰۲/۱۲/۰۴

دفترچه شماره ۳ از ۳

آزمون ورودی دوره‌های دکتری (نیمه‌متمرکز) - سال ۱۴۰۳

آمار (کد ۲۲۳۲)

مدت زمان پاسخگویی: ۱۳۵ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤال‌ها

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مبانی آنالیز ریاضی - ریاضی عمومی ۱ و ۲ - احتمال ۱ و ۲	۳۰	۱	۳۰
۲	استنباط آماری ۱	۱۵	۳۱	۴۵

این آزمون، نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول زیر، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤالها، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچه سؤالها و پایین پاسخنامه را تأیید می‌نمایم.

امضا:

مبانی آنالیز ریاضی - ریاضی عمومی ۱ و ۲ - احتمال ۱ و ۲:

۱- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$, ($n \in \mathbb{N}$) کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) $+\infty$

۲- اگر به ازای اعداد حقیقی a و $c > 0$ تابع $f(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(\frac{1}{x^c}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ دارای مشتق مرتبه دوم باشد، کدام

شرط صادق است؟

(۱) $a \geq c + 2$

(۲) $a > c + 2$

(۳) $a \geq c + 1$

(۴) $a > c + 1$

۳- برای $f(x) = \int_0^{2x-x^2} \frac{\cos t}{1+t^2} dt$ کدام مورد درست است؟

(۱) تابع f در $x = 1$ ماکزیمم است.

(۲) تابع f در $x = 2$ مینیمم است.

(۳) تابع f یکنوا است.

(۴) تابع f اکسترمم ندارد.

۴- مقدار سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+3)!}$ کدام است؟ (راهنمایی: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$)

(۱) $\frac{1}{54}(e^3 - 17)$

(۲) $\frac{1}{27}(e^3 - 17)$

(۳) $\frac{1}{54}(2e^3 - 17)$

(۴) $\frac{1}{27}(2e^3 - 17)$

۵- انحنای منحنی $\vec{r}(t) = \sqrt{v} \cos t \sin t \vec{i} + \sqrt{v} \sin^2 t \vec{j} + t \vec{k}$ در لحظه $t = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

(۱) $\frac{v}{4}$

(۲) $\frac{v}{8}$

(۳) $\frac{\sqrt{v}}{4}$

(۴) $\frac{\sqrt{v}}{8}$

۶- ماکزیمم تابع $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$ روی منحنی حاصل از تقاطع $x + y - z = 0$ و $x^2 + 2z^2 = 1$ ، کدام است؟

(۱) $6\sqrt{2}$

(۲) $2\sqrt{6}$

(۳) $3\sqrt{2}$

(۴) $2\sqrt{3}$

۷- فرض کنید $x = e^s \cos t$ ، $y = e^s \sin t$ و $z = u(x, y)$ تابعی با مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته باشد.

$$(x^2 + y^2) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = e^{As} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right)$$

مقدار A کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) صفر

(۴) -۱

۸- اگر D ناحیه محدود به $0 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq x^k$ و $\iint_D \frac{dx dy}{(xy)^a}$ همگرا باشد، آنگاه کدام شرط صادق است؟

(۱) $k \geq \frac{a}{1-a}$

(۲) $k \geq \frac{a}{1+a}$

(۳) $k \leq \frac{a}{1-a}$

(۴) $k \leq \frac{a}{1+a}$

۹- شارگذرای میدان برداری $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} - x\vec{j} + (x^2 + y^2) \ln \sqrt{x^2 + y^2} \vec{k}$ از سطح $z = x + y$ که توسط

استوانه $x^2 + y^2 = 1$ بریده می‌شود، کدام است؟

(۲) $\frac{\pi}{8}$

(۴) $-\frac{\pi}{8}$

(۱) $\frac{\pi}{3}$

(۳) $-\frac{\pi}{3}$

۱۰- اگر حالت $\infty - \infty$ رخ ندهد، کدام مورد نادرست است؟

$$(۱) \quad \underline{\lim}(x_n) + \underline{\lim}(y_n) \leq \overline{\lim}(x_n + y_n)$$

$$(۲) \quad \overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}(x_n) + \overline{\lim}(y_n)$$

$$(۳) \quad \overline{\lim}(x_n) + \underline{\lim}(y_n) \leq \overline{\lim}(x_n + y_n)$$

$$(۴) \quad \overline{\lim}(x_n) + \underline{\lim}(y_n) \leq \underline{\lim}(x_n + y_n)$$

۱۱- فرض کنید $I: (\mathbb{R}, d_1) \rightarrow (\mathbb{R}, d_0)$ نگاشت همانی باشد، که در آن d_1 متر اقلیدسی و d_0 متر گسسته است.

کدام مورد نادرست است؟

(۱) I نگاشتی پیوسته است.

(۲) I نگاشتی باز است.

(۳) $I \circ I^{-1}$ نگاشتی پیوسته است.

(۴) I^{-1} از (\mathbb{R}, d_0) بروی (\mathbb{R}, d_1) نگاشتی پیوسته است.

۱۲- فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ یک متر روی X باشد. کدام مورد نادرست است؟

(۱) اگر دنباله $\{x_n\}$ در X همگرا باشد، آنگاه $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n (n \geq N \Rightarrow d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon)$

(۲) اگر دنباله $\{x_n\}$ در X همگرا باشد، آنگاه $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m \forall n (m, n \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon)$

(۳) برای هر دو دنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در X ، اگر دنباله $\{d(x_n, y_n)\}$ به $d(x, y)$ همگرا باشد، آنگاه $x_n \rightarrow x$ و $y_n \rightarrow y$.

(۴) برای هر دو دنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در X ، که $x_n \rightarrow x$ و $y_n \rightarrow y$ ، آنگاه $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$.

۱۳- فرض کنید $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی تعریف شده با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = \frac{1}{n} \\ 0 & x \neq \frac{1}{n} \end{cases} (n \in \mathbb{N})$ باشد. کدام مورد درست است؟

(۱) f روی $[0, 1]$ کراندار نیست.

(۲) f روی $[0, 1]$ انتگرال پذیر است.

(۳) f روی $[0, 1]$ در عدد گنگ α پیوسته است.

(۴) f روی $[0, 1]$ انتگرال پذیر نیست، زیرا انتگرال بالایی و انتگرال پایینی با هم برابر نیستند.

۱۴- فرض کنید، $P(A \cup B) = 0.7$ ، $P(A \cup B') = 0.9$ ، در این صورت، $P(A)$ کدام است؟

$$(۱) \quad \frac{1}{5}$$

$$(۲) \quad \frac{2}{5}$$

$$(۳) \quad \frac{3}{5}$$

$$(۴) \quad \frac{4}{5}$$

۱۵- فرض کنید تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X که در بازه 0 تا 1 تغییر می‌کند، متناسب با ریشه n ام X باشد (برای عدد صحیح مثبت n). در این صورت، نسبت صدک 30 به صدک 20 متغیر تصادفی X ، کدام است؟

$$(1) \quad n\sqrt[n]{1/5} \quad (2) \quad n\sqrt[n]{(1/5)^n}$$

$$(3) \quad \sqrt[n]{(1/5)^{n+1}} \quad (4) \quad \sqrt[n]{1/5}$$

۱۶- برای کدام توزیع‌های نمایی، نرمال و یکنواخت پیوسته، دو برابر شدن میانگین، میانه را نیز دو برابر می‌کند؟

$$(1) \quad \text{همه به جز نمایی} \quad (2) \quad \text{همه به جز یکنواخت}$$

$$(3) \quad \text{همه به جز نرمال} \quad (4) \quad \text{همه توزیع‌ها}$$

۱۷- برای یک نمونه تصادفی 3 تایی از توزیع یکنواخت روی فاصله $(0, 1)$ ، احتمال این که میانه نمونه از $\frac{1}{4}$ بیشتر باشد،

کدام است؟

$$(1) \quad \frac{25}{32}$$

$$(2) \quad \frac{27}{32}$$

$$(3) \quad \frac{24}{32}$$

$$(4) \quad \frac{26}{32}$$

۱۸- مراجعین یک پمپ بنزین بین‌راهی طبق یک فرایند پواسون با نرخ 20 اتومبیل در ساعت، به این پمپ بنزین وارد می‌شوند و بنزین دریافت می‌کنند. احتمال تقریبی این که مدت زمان سوخت‌گیری 40 اتومبیل، حداقل 2 ساعت طول بکشد، چقدر است؟

$$(1) \quad \frac{2}{5}$$

$$(2) \quad \frac{3}{5}$$

$$(3) \quad \frac{1}{2}$$

$$(4) \quad \frac{3}{4}$$

۱۹- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با تابع جرم احتمال مشترک زیر باشند، مقدار $P(X < Y)$ کدام است؟

$$P(Y = t) = P(X = t) = \frac{1}{n}, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

$$(1) \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

$$(2) \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3n}$$

$$(3) \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$$

$$(4) \quad \frac{1}{2}$$

۲۰- فرض کنید $X \sim U(0, 2)$ و $Y \sim U(0, 3)$ ، دو متغیر تصادفی مستقل باشند. مقدار $P(X < 1 \leq Y) - P(Y < 1 \leq X)$ چقدر است؟

$$\frac{1}{6} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

۲۱- اگر X و Y ، دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع نمایی با میانگین ۱ باشند و $E\left(\frac{aX+bY}{X+Y}\right) = 2$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$4 \quad (4)$$

۲۲- اگر X و Y دارای چگالی توأم زیر باشند، در این صورت، $\text{Var}(\min(X, Y))$ چقدر است؟

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-2x - \frac{y}{2}}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$\frac{15}{4} \quad (1)$$

$$\frac{17}{4} \quad (2)$$

$$\frac{5}{25} \quad (3)$$

$$\frac{4}{25} \quad (4)$$

۲۳- اگر تابع چگالی توأم (X, Y) به صورت زیر باشد، کدام مورد درست است؟

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1+xy}{4}, & |x| < 1, |y| < 1 \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) = E(X)E\left(\frac{1}{Y}\right) \quad (2)$$

$$E\left(\frac{X^2}{Y^2}\right) = \frac{E(X^2)}{E(Y^2)} \quad (1)$$

$$E\left(\frac{X^2}{Y^2}\right) = E(X^2)E\left(\frac{1}{Y^2}\right) \quad (4)$$

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{E(X)}{E(Y)} \quad (3)$$

۲۴- فرض کنید X و Y دارای چگالی توأم زیر باشند. کواریانس بین X و Y کدام است؟

$$f(x, y) = \begin{cases} x+y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{144} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{144} \quad (4)$$

۲۵- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با تابع چگالی توأم زیر باشند. مقدار ضریب همبستگی بین X و Y کدام است؟

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| + |y| < 1 \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\text{صفر} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$1 \quad (4)$$

۲۶- توزیع توأم (X, Y, Z) به صورت زیر است. مقدار $P\{2X > \frac{Y}{3} > \frac{3Z}{2}\}$ کدام مورد است؟

$$f(x, y, z) = \begin{cases} e^{-2x - \frac{y}{3} - \frac{3}{2}z}, & x > 0, y > 0, z > 0 \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$\frac{1}{6} \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

۲۷- فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی برنولی مستقل با $p = \frac{1}{4}$ و $Z = \sum_{k=1}^n X_k^k$ باشند. مقدار $E(Z^2)$ چقدر است؟

$$\frac{n^2(n+1)}{4} \quad (2)$$

$$\frac{n(n-1)}{4} \quad (1)$$

$$\frac{n^2(n-1)}{4} \quad (4)$$

$$\frac{n(n+1)}{4} \quad (3)$$

۲۸- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از متغیرهای تصادفی با تابع توزیع پیوسته F باشد. همچنین فرض کنید Y متغیری تصادفی از همان توزیع و مستقل از X_i ها باشد. حاصل $P(Y > X_{(n)})$ که در آن $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$ کدام است؟

$$\frac{1}{n+1} \quad (۱)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (۲)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{n} \quad (۴)$$

۲۹- فرض کنید X_1, X_2, \dots دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نمایی با میانگین ۱ باشد. اگر M یک متغیر تصادفی

دو جمله‌ای مستقل از X_i ها با پارامترها $n = 4$ و $p = \frac{1}{4}$ باشد، مقدار کواریانس M و $Y = \sum_{i=1}^M X_i$ چقدر است؟

$$\frac{3}{16} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۳)$$

$$۱ \quad (۴)$$

۳۰- فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع یکنواخت $U(1, 2)$ باشند و $Z_n = n(2 - X_{(n)})$

که $X_{(n)}$ آماره ترتیبی n ام است. توزیع حدی Z_n کدام است؟

$$\chi^2_{(1)} \quad (۲)$$

(۱) توزیع نمایی با میانگین ۱

(۴) توزیع نمایی با میانگین ۲

$$2\chi^2_{(2)} \quad (۳)$$

استنباط آماری:

۳۱- براساس نمونه تصادفی Y_1, \dots, Y_n از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر، برآورد گشتاوری θ کدام است؟

$$f_{\theta}(y) = \frac{3y^2}{\theta^3} \exp\left\{-\frac{y^3}{\theta^3}\right\}, y > 0$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3\bar{Y}} \quad (۱)$$

$$\frac{3\bar{Y}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \quad (۲)$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\bar{Y}}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\bar{Y}} \quad (۴)$$

۳۲- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع $N(\theta, \theta^2)$ ، $\theta > 0$ باشد. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی برای θ^2 ، کدام است؟

$$\hat{\theta}^2 = \begin{cases} \frac{x^2}{2}(\sqrt{5}-3) & x > 0 \\ \frac{x^2}{2}(\sqrt{5}+3) & x < 0 \end{cases} \quad (۲)$$

$$\hat{\theta}^2 = \begin{cases} \frac{x^2}{2}(\sqrt{5}+3) & x > 0 \\ \frac{x^2}{2}(\sqrt{5}-3) & x < 0 \end{cases} \quad (۱)$$

$$\hat{\theta}^2 = \begin{cases} \frac{x}{2}(\sqrt{5}+3) & x > 0 \\ -\frac{x}{2}(\sqrt{5}-3) & x < 0 \end{cases} \quad (۴)$$

$$\hat{\theta}^2 = \begin{cases} \frac{x}{2}(\sqrt{5}-3) & x > 0 \\ -\frac{x}{2}(\sqrt{5}+3) & x < 0 \end{cases} \quad (۳)$$

۳۳- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع هندسی با تابع احتمال زیر باشد. واریانس مجانبی برآورد ماکسیمم

درست‌نمایی برای پارامتر $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$ ، کدام است؟

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \theta(1-\theta)^{x-1}, & x = 1, 2, \dots; \quad 0 < \theta < 1 \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$\frac{1-\theta}{\theta^2} \quad (۱)$$

$$\frac{1+\theta}{\theta} \quad (۲)$$

$$\frac{\theta}{1+\theta} \quad (۳)$$

$$\frac{\theta^2}{1-\theta} \quad (۴)$$

۳۴- فرض کنید X دارای تابع احتمال زیر باشد. برآوردگر نأریب صفر براساس X ، کدام است؟

x	۰	۱	۲
$f_{\theta}(x)$	θ	2θ	$1-4\theta$

$$h(x) = \begin{cases} -3a & x = 0 \\ 0 & x = 1 \\ a & x = 2 \end{cases} \quad (۲)$$

$$h(x) = \begin{cases} a & x = 0 \\ 0 & x = 1 \\ -3a & x = 2 \end{cases} \quad (۱)$$

$$h(x) = \begin{cases} -3a & x = 0 \\ a & x = 1 \\ 0 & x = 2 \end{cases} \quad (۴)$$

$$h(x) = \begin{cases} a & x = 0 \\ -3a & x = 1 \\ 0 & x = 2 \end{cases} \quad (۳)$$

۳۵- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. کدام مورد در خصوص آماره $X_{(1)}$ نادرست است؟

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x > \theta, \theta \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

(۱) $X_{(1)}$ آماره کامل است. (۲) $X_{(1)}$ آماره بسنده برای θ است.

(۳) $X_{(1)}$ برآوردگر سازگار برای θ نیست. (۴) $X_{(1)}$ برآوردگر نآریب برای θ نیست.

۳۶- فرض کنید X_1, \dots, X_n و Y_1, \dots, Y_n دو نمونه تصادفی مستقل از هم به ترتیب از توزیع‌های $N(\theta, 1)$ و

$\text{Bin}(1, p)$ هستند. اگر قرار دهیم $Z_i = X_i Y_i$ ، در این صورت آماره بسنده مینیمال برای (θ, p) ، کدام است؟

$$(1) \left(\sum_{i=1}^n Z_i, \sum_{i=1}^n I(Z_i = 0) \right)$$

$$(2) \left(\sum_{i=1}^n Z_i, \sum_{i=1}^n Z_i I(Z_i = 1) \right)$$

$$(3) \left(\sum_{i=1}^n I(Z_i = 0), \sum_{i=1}^n Z_i I(Z_i = 0) \right)$$

$$(4) \left(\sum_{i=1}^n I(Z_i = 0), \sum_{i=1}^n I(Z_i = 1) \right)$$

۳۷- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد، برآوردگر UMVU برای θ^2 کدام

$$\text{است؟ } (N = \sum_{i=1}^n |X_i|)$$

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \theta, & \text{if } x = -1, 1, \\ 1 - 2\theta, & \text{if } x = 0, \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$$

$$(1) \left(\frac{N}{2n} \right)^2$$

$$(2) \left(\frac{N}{n} \right)^2$$

$$(3) \frac{N(N-1)}{n(n-1)}$$

$$(4) \frac{N(N-1)}{4n(n-1)}$$

۳۸- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه از متغیرهای تصادفی مستقل با تابع چگالی احتمال مشترک زیر باشد، برآوردگر UMVU برای پارامتر θ^{-1} ، کدام است؟

$$f(x) = \frac{\theta}{2(1+|x|)^{\theta+1}}, \quad \theta > 0, x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (1+|X_i|) \quad (۱)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(1+|X_i|) \quad (۲)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1+|X_i|) \quad (۳)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \log(1+|X_i|) \quad (۴)$$

۳۹- فرض کنید X_1, \dots, X_n ($n \geq 3$) نمونه‌ای تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر p باشد. UMVUE پارامتر $p(1-p)^2$ کدام است؟

$$(T = \sum_{i=1}^n X_i)$$

$$\frac{T(n-T)^2}{n^3} \quad (۱)$$

$$\frac{T(n-T-1)^2}{n(n-1)^2} \quad (۲)$$

$$\frac{T(T-1)(n-T)}{n(n-1)(n-2)} \quad (۳)$$

$$\frac{T(n-T)(n-T-1)}{n(n-1)(n-2)} \quad (۴)$$

۴۰- دایره‌ای را در نظر بگیرید که دارای شعاع نامعلوم r است. ابزار اندازه‌گیری شعاع، دارای خطای ε است که از توزیع $N(0, \sigma^2)$ با σ^2 نامعلوم پیروی می‌کند. براساس ۲ اندازه X_1 و X_2 از شعاع دایره بهترین برآوردگر نآریب مساحت دایره،

کدام است؟

$$\pi X_1 X_2 \quad (۱)$$

$$\pi(X_1 + X_2)^2 \quad (۲)$$

$$\pi\left(\bar{X}^2 + \frac{S^2}{2}\right) \quad (۳)$$

$$\pi \bar{X}^2 \quad (۴)$$

۴۱- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. اگر $T = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ و $c.T$ برآوردگری برای θ باشد، مقداری از c که میانگین توان‌های دوم خطا، MSE ، را مینیمم می‌کند، کدام است؟

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$\frac{1}{n} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{n+2} \quad (۲)$$

$$\frac{2n+2}{2n+1} \quad (۳)$$

$$\frac{n+1}{n+2} \quad (۴)$$

۴۲- فرض کنید $X \sim \text{Bin}(2, \theta)$ ، $0 < \theta < 1$. کلاس برآوردگرهای $\{X + \alpha; \alpha \in \mathbb{R}\}$ را در نظر بگیرید. ماکسیمم مخاطره برآوردگر مینمکس در این کلاس، کدام است؟

$$\frac{1}{8} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$1 \quad (۴)$$

۴۳- براساس تک‌مشاهده X از توزیع $U(-\theta, \theta)$ و تحت پیشینی با چگالی $\pi(\theta) = 4\theta^2 e^{-2\theta}$ ؛ $\theta > 0$ و تابع زیان توان دوم خطای وزنی $\frac{(d-\theta)^2}{\theta}$ ، برآورد بیزی θ ، کدام است؟

$$|X| + \frac{1}{2} \quad (۱)$$

$$|X| \quad (۲)$$

$$|X| + \frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$|X| + 1 \quad (۴)$$

۴۴- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع $U(\theta, \theta+1)$ باشد. تحت پیشین $N(0, 100)$ برای θ و براساس تابع زیان توان دوم خطا، برآورد بیزی θ کدام است؟ $\phi(x)$ و $\Phi(x)$ به ترتیب تابع چگالی و تابع توزیع نرمال استاندارد هستند.

$$\frac{1}{100} \times \frac{\phi\left(\frac{X_{(1)} + X_{(n)} - 1}{100}\right)}{\Phi\left(\frac{X_{(1)}}{100}\right) - \Phi\left(\frac{X_{(n)} - 1}{100}\right)} \quad (1)$$

$$\frac{1}{100} \times \frac{\phi\left(\frac{X_{(1)} - 1}{100}\right) - \phi\left(\frac{X_{(n)} - 1}{100}\right)}{\Phi\left(\frac{X_{(1)}}{100}\right) - \Phi\left(\frac{X_{(n)} - 1}{100}\right)} \quad (2)$$

$$100 \times \frac{\phi\left(\frac{X_{(1)} + X_{(n)} - 1}{100}\right)}{\Phi\left(\frac{X_{(1)}}{100}\right) - \Phi\left(\frac{X_{(n)} - 1}{100}\right)} \quad (3)$$

$$100 \times \frac{\phi\left(\frac{X_{(n)} - 1}{100}\right) - \phi\left(\frac{X_{(1)}}{100}\right)}{\Phi\left(\frac{X_{(1)}}{100}\right) - \Phi\left(\frac{X_{(n)} - 1}{100}\right)} \quad (4)$$

۴۵- براساس تک مشاهده $x = 2$ از توزیعی با تابع احتمال زیر، برآورد بیزی θ تحت تابع زیان قدرمطلق خطا، $|d - \theta|$ ، و با پیشین $\pi(\theta) = 12(1 - 4\theta)^2$; $0 < \theta < \frac{1}{4}$ کدام است؟

x	0	1	2	3
P(X=x)	θ	$\frac{1}{2} - \theta$	$\frac{1}{2} - 2\theta$	2θ

$0 < \theta < \frac{1}{4}$

$$\frac{\sqrt[4]{2} - 2}{18\sqrt[4]{2}} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt[4]{2} - 2}{4\sqrt[4]{2}} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt[4]{2} - 1}{4\sqrt[4]{2}} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt[4]{2} - 1}{18\sqrt[4]{2}} \quad (4)$$

