



کد کنترل

670

A

صبح جمعه

۹۷/۱۲/۳

دفترچه شماره (۱)



جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»  
امام خمینی (ره)

**آزمون ورودی دوره دکتری (نیمه‌متمرکز) - سال ۱۳۹۸**

**رشته ریاضی محض - کد (۲۲۳۳)**

مدت پاسخ‌گویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی: مبانی آنالیز ریاضی - آنالیز ریاضی - مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی - مبانی جبر - جبر پیشرفته - آنالیز حقیقی	۴۵	۱	۴۵

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

۱۳۹۸

\* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب ..... با شماره داوطلبی ..... در جلسه این آزمون شرکت می‌نمایم.

امضا:

۱- فرض کنید  $\{a_n\}$  دنباله‌ای کراندار از اعداد حقیقی باشد و  $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  و  $\alpha = \sup A$ . کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر  $\alpha \notin A$  آنگاه  $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

(۲) اگر جملات دنباله  $\{a_n\}$  متمایز باشند، آنگاه  $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

(۳) اگر مجموعه حدود زیر دنباله‌ای  $\{a_n\}$  نامتناهی باشد، آنگاه  $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

(۴) اگر  $\{a_n\}$  زیردنباله‌ای صعودی داشته باشد، آنگاه  $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

۲- فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی کراندار و پیوسته یکنواخت باشد و  $g(x) = (f(x))^2$  و  $h(x) = f(x^2)$ . کدام گزینه درست است؟

(۱)  $g$  و  $h$  بر  $\mathbb{R}$  پیوسته یکنواخت هستند.

(۲)  $g$  و  $h$  لزوماً بر  $\mathbb{R}$  پیوسته یکنواخت نیستند.

(۳)  $h$  بر  $\mathbb{R}$  پیوسته یکنواخت است ولی  $g$  لزوماً بر  $\mathbb{R}$  پیوسته یکنواخت نیست.

(۴)  $g$  بر  $\mathbb{R}$  پیوسته یکنواخت است ولی  $h$  لزوماً بر  $\mathbb{R}$  پیوسته یکنواخت نیست.

۳- فرض کنید  $f: X \rightarrow Y$  یک تابع پیوسته بین دو فضای متریک باشد. آنگاه:

(۱) برای هر مجموعه باز  $U \subseteq X$ ،  $f(U)$  در  $Y$  باز است.

(۲) برای هر مجموعه فشرده  $K \subseteq X$ ،  $f(K)$  در  $Y$  فشرده است.

(۳) برای هر مجموعه بسته  $U \subseteq X$ ،  $f(U)$  در  $Y$  بسته است.

(۴) برای هر مجموعه فشرده  $K \subseteq Y$ ،  $f^{-1}(K)$  در  $X$  فشرده است.

۴- مجموعه  $A = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$  را در فضای متریک  $\mathbb{R}^2$  با متر اقلیدسی در نظر

بگیرید، کدام گزینه درست است؟

(۱)  $A$  فشرده و همبند است.

(۲)  $A$  فشرده است، اما همبند نیست.

(۳)  $A$  فشرده نیست اما همبند است.

(۴)  $A$  نه فشرده و نه همبند است.

- ۵- در فضای متریک  $\mathbb{R}$  با متر اقلیدسی، کدام گزینه نادرست است؟  
 (۱) هر زیر مجموعه ناشمارای  $\mathbb{R}$ ، نقطه حدی در  $\mathbb{R}$  دارد.  
 (۲) هر زیر مجموعه نامتناهی و همبند  $\mathbb{R}$ ، نقطه حدی گویا دارد.  
 (۳) هر زیر مجموعه ناشمارا از اعداد گنگ، نقطه حدی گویا دارد.  
 (۴) هر زیر مجموعه نامتناهی و کراندار  $\mathbb{R}$ ، نقطه حدی در  $\mathbb{R}$  دارد.
- ۶- فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متریک نامتناهی باشد به طوری که برای هر  $A, B \subseteq X$ ،  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ، کدام گزینه درست است؟  
 (۱)  $X$  همبند است.  
 (۲)  $X$  مجموعه‌ای شمارا است.  
 (۳) هر دنباله کوشی در  $X$  همگرا است.  
 (۴) هر تابع دلخواه  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته است.
- ۷- کدام گزینه نادرست است؟  
 (۱) هر فضای متریک که در آن هر دنباله دارای یک زیردنباله کوشی است، فشرده یا کامل است.  
 (۲) هر فضای متریک که در آن هر دنباله دارای یک زیردنباله همگرا است، فشرده است.  
 (۳) هر فضای متریک کامل که در آن هر دنباله دارای یک زیردنباله کوشی است، فشرده است.  
 (۴) هر فضای متریک فشرده، کامل است.
- ۸- فرض کنید تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  همه جا مشتق پذیر است. کدام گزینه نادرست است؟  
 (۱) اگر  $f'$  تابع ثابت نباشد، آنگاه حداقل یکی از مقادیر تابع  $f'$  گنگ است.  
 (۲) اگر  $f'(0) > 0$ ، آنگاه  $f'$  در یک همسایگی صفر مثبت است.  
 (۳) اگر  $f'$  تابع ثابت نباشد، آنگاه حداقل یکی از مقادیر تابع  $f'$  گویا است.  
 (۴) اگر  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  موجود باشد، آنگاه  $f'$  در صفر پیوسته است.
- ۹- سری  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^{2n}(x) \cos^2(x)$  را بر بازه  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  در نظر بگیرید، کدام گزینه درست است؟  
 (۱) سری همگرای نقطه‌ای نیست.  
 (۲) سری به طور مطلق همگرای یکنواخت است.  
 (۳) سری به طور مطلق همگرای نقطه‌ای است اما همگرای یکنواخت نیست.  
 (۴) سری همگرای یکنواخت است اما به طور مطلق همگرای یکنواخت نیست.
- ۱۰- فرض کنید  $V$  فضای برداری ماتریس‌های  $2 \times 2$  روی میدان اعداد حقیقی است و داریم:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

در این صورت بعد  $U + W$  کدام است؟

- (۱) ۱  
 (۲) ۲  
 (۳) ۳  
 (۴) ۴

۱۱- در فضای برداری  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  حداکثر چند زیرفضای غیریکریخت می توان یافت؟

(۱)  $mn$

(۲)  $m+n$

(۳)  $m+n+1$

(۴)  $(m+1)(n+1)$

۱۲- فرض کنید  $\eta: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n-1}(\mathbb{R})$  تبدیلی باشد به طوری که  $\eta(A)$  از حذف سطر اول و ستون اول ماتریس  $A$  به دست آمده باشد. بعد هسته  $\eta$  برابر است با:

(۱)  $2n$

(۲)  $2n-1$

(۳)  $(n-1)^2$

(۴)  $\frac{n(n-1)}{2}$

۱۳- اگر  $S, T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  با ضابطه های  $S \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x+y \\ x+y \end{bmatrix}$  و  $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -x+y \end{bmatrix}$  داده شده باشند، چند جمله ای

مشخصه ماتریس  $ST$  کدام است؟

(۱)  $x^2 + 2x - 3$

(۲)  $x^2 + 2x + 3$

(۳)  $x^2 - 2x - 3$

(۴)  $x^2 - 2x + 2$

۱۴- فرض کنید  $A$  ماتریسی  $7 \times 7$  با درایه های حقیقی باشد، در این صورت کدام یک از تساوی های زیر می تواند درست باشد؟

(۱)  $A^T + 2A + 3I = 0$

(۲)  $A^T + 2A + 5I = 0$

(۳)  $A^T - 2A + 4I = 0$

(۴)  $A^T - 2A + 2I = 0$

۱۵- فرض کنید  $A$  ماتریسی  $4 \times 4$  باشد که درایه های آن به دلخواه با اعداد  $1, 2, \dots, 16$  پر شده است به طوری که هر عدد دقیقاً یکبار ظاهر شده است. اگر  $J$  ماتریسی  $4 \times 4$  باشد که تمام درایه هایش ۱ هستند، در این صورت ماکزیمم مقدار ویژه  $A, J$  کدام است؟

(۱)  $500$

(۲)  $544$

(۳)  $600$

(۴)  $944$

۱۶- تعداد ایده‌آل‌های اول  $\mathbb{Z}_{1400}$  برابر است با:

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۳۰

(۴) ۴۸۰

۱۷- فرض کنیم  $G$  یک گروه آبلی متناهی و  $G_p$  مجموعه تمام اعضای  $G$  باشد که از مرتبه  $p$  هستند. اگر  $z = \prod_{g \in G} g$

آنگاه کدام صحیح است؟

(۱)  $z \notin G_p$

(۲)  $z \in G_p$

(۳)  $z = 1$

(۴)  $z = z^{-1}$

۱۸- کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد میدان اعداد حقیقی،  $\mathbb{R}$ ، درست نیست؟

(۱) زیر حلقه‌ای سره دارد که فقط یک ایده‌آل ماکسیمال دارد.

(۲) زیر حلقه‌ای دارد که با  $Q[x]$  یکرخت است.

(۳) زیر حلقه‌ای سره دارد که با  $\mathbb{R}$  یکرخت است.

(۴) زیر حلقه‌ای غیریکدار دارد که هر عضو غیرصفر آن عددی اصم است.

۱۹- گروه  $(C^*, \cdot)$  یعنی مجموعه اعداد مختلط ناصفر همراه با عمل ضرب را در نظر بگیرید. فرض کنید  $N$  مجموعه تمام اعداد

مختلطی باشد که روی دایره واحد قرار دارند. در این صورت گروه خارج قسمتی  $\frac{C^*}{N}$  با کدام گروه یکرخت است؟

(۱)  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$  گروه تمام اعداد حقیقی مثبت با عمل ضرب

(۲)  $(C^*, \cdot)$  گروه تمام اعداد مختلط ناصفر با عمل ضرب

(۳)  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$  گروه تمام اعداد حقیقی ناصفر با عمل ضرب

(۴)  $(\mathbb{R}, +)$  گروه تمام اعداد حقیقی با عمل جمع

۲۰- فرض کنیم  $G$  یک گروه نامتناهی باشد به طوری که به ازای هر دو زیر مجموعه نامتناهی  $X$  و  $Y$  از  $G$ ، اعضای

$x \in X$  و  $y \in Y$  موجود هستند و  $xy = yx$ . اگر  $|G : Z(G)|$  متناهی باشد، آنگاه کدام مورد صحیح است؟

(۱)  $G$  آبلی است.

(۲)  $|G : Z(G)| = 2$

(۳)  $\exists x \in G - \{1\} : C_G(x) = \langle x \rangle$

(۴)  $G$  دارای عنصری مانند  $x \neq 1$  صاست که مرتبه‌اش متناهی است.

۲۱- فرض کنید  $M$  یک ایده‌آل ماکسیمال چپ در حلقه یکدار  $R$  باشد. در این صورت کدام گزینه همواره درست است؟

(۱) اگر  $M^2 = M$  آنگاه عضو خود توان  $e \in R$  وجود دارد که  $M = Re$ .

(۲) اگر  $M$  شمارش پذیر باشد آنگاه  $R$  هم شمارش پذیر است.

(۳) اگر  $R$  متناهی باشد آنگاه  $M$  دو طرفه است.

(۴) اگر  $M$  یک ایده‌آل دو طرفه نباشد آنگاه  $M^2 = M$ .



\*\*\* در سوالات ۲۲ تا ۳۳ مدول‌ها یکانی هستند.

۲۲- طول یک سری ترکیبی برای  $R$  -مدول  $M$  را با  $\ell(M)$  نشان می‌دهیم. فرض کنیم  $N$  و  $L$  دو زیرمدول  $M$  با طول‌های متناهی باشند. در مورد  $\ell(N+L)$  کدام گزینه صحیح است؟

(۱)  $\ell(N+L)$  ممکن است نامتناهی باشد.

(۲)  $\ell(N+L) = \ell(N) + \ell(L)$

(۳)  $\ell(N+L) = \ell(N) + \ell(L) - \ell(N \cap L)$

(۴)  $\ell(N+L) > \ell(N) + \ell(L)$  و  $\ell(N+L)$  متناهی است

۲۳- در مورد حلقه  $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$  (با جمع و ضرب معمولی ماتریس‌ها)، کدام گزینه صحیح است؟

(۱) تعداد ایده‌آل‌های  $R$  نامتناهی است.

(۲) دقیقاً دو ایده‌آل دارد.

(۳) دقیقاً سه ایده‌آل دارد.

(۴) دقیقاً چهار ایده‌آل دارد.

۲۴- فرض کنید  $\mathbb{Z}$  مجموعه اعداد صحیح باشد. اگر  $A = \left\{ \frac{a}{17^k} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}$ ، کدام گزینه در مورد  $\mathbb{Z} -$ مدول

$\frac{A}{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}_{17}$  صحیح است؟

(۱) نوتری است.

(۲) آرئینی است.

(۳) آرئینی و نوتری است.

(۴) تصویری است.

۲۵- اگر  $p$  عددی اول باشد آنگاه  $(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}^p), \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p^\infty, \mathbb{Z}^p))$  با کدام یک از  $\mathbb{Z}$  -مدول‌های زیر یکرخت است؟

(۱)  $\mathbb{Q}$

(۲)  $\mathbb{Z}_p^\infty$

(۳)  $\mathbb{Q}$

(۴)  $(\mathbb{Z}_p^\infty)^2$

۲۶- کدام گزینه درست است؟

(۱) هر  $\mathbb{Z}_6$  -مدول پروژکتیو است اما انژکتیو نیست.

(۲) هر  $\mathbb{Z}_6$  -مدول انژکتیو است اما پروژکتیو نیست.

(۳) هر  $\mathbb{Z}_6$  -مدول هم پروژکتیو است هم انژکتیو.

(۴)  $\mathbb{Z}_6$  -مدولی وجود دارد که نه پروژکتیو است و نه انژکتیو.

۲۷- فرض کنید  $R$  حلقه‌ای یکدار باشد و  $J(R)$  رادیکال جیکوبسون حلقه  $R$  باشد. کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

(۱) اگر  $K$  یک میدان باشد، آنگاه  $J(K[[x]]) = 0$ .

(۲) اگر  $R$  یک حوزه صحیح باشد، آنگاه  $J(R) = 0$ .

(۳) اگر  $R$  یک حوزه صحیح نامتناهی باشد که تعداد متناهی عضو وارون‌پذیر دارد، آنگاه  $J(R) = 0$ .

(۴) اگر  $R$  یک حوزه صحیح باشد و  $M_n(R)$  حلقه ماتریس‌های مربعی  $n \times n$  با درایه‌ها در  $R$  باشد، آنگاه  $J(M_n(R)) = 0$ .

۲۸- گروه  $(\mathbb{Z}_{15}, +)$  با چه گروهی یکرخت است؟

(۱)  $\mathbb{Z}_5$

(۲)  $\mathbb{Z}_{15}$

(۳)  $\mathbb{Z}_{10}$

(۴)  $\mathbb{Z}_3$

۲۹- فرض کنیم  $R$  یک حلقه یکدار و  $P$  یک  $R$ -مدول تصویری باشد. فرض کنیم  $a \in R$  و  $R$ -همریختی  $g_a: P \rightarrow P$  با ضابطه  $g_a(x) = ax$  پوشا باشد. در این صورت:

(۱)  $g_a$  یک به یک است.

(۲)  $g_a$  پوچ توان است.

(۳)  $g_a$  خود توان است.

(۴)  $g_a(g_a)$  همریختی همانی است.

۳۰- کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

(۱)  $\mathbb{Z}_7[x]$  نوتری و  $2\mathbb{Z}[x]$  غیرنوتری است.

(۲)  $\mathbb{Z}_7[x]$  نوتری و  $2\mathbb{Z}[x]$  نوتری است.

(۳)  $\mathbb{Z}_7[x]$  آرتینی و  $2\mathbb{Z}[x]$  آرتینی است.

(۴)  $\mathbb{Z}_7[x]$  آرتینی و  $2\mathbb{Z}[x]$  غیرآرتینی است.

۳۱- کدام یک از مدول‌های زیر انژکتیو نیست؟

(۱)  $\mathbb{Z}$  به‌عنوان  $\mathbb{Z}$ -مدول

(۲)  $\mathbb{Q}$  به‌عنوان  $\mathbb{Z}$ -مدول

(۳)  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  به‌عنوان  $\mathbb{Z}$ -مدول

(۴)  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  به‌عنوان  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -مدول ( $p$  عدد اول است).

۳۲- فرض کنید  $R$  حوزه ایده‌آل اصلی باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

(۱) هر  $R$ -مدول تصویری، آزاد است.

(۲) هر  $R$ -مدول بخش‌پذیر، تزریقی (انژکتیو) است.

(۳) هر  $R$ -مدول یکدست، تصویری است.

(۴) هر زیرمدول یک مدول تصویری، تصویری است.

۳۳- تعداد کل  $\mathbb{Z}$  - مدول‌های دو به دو غیر یکرخت نیم ساده ناصفر با تعداد کمتر از ۱۵ عضو برابر است با:

(۱) ۱۴

(۲) ۱۳

(۳) ۱۱

(۴) ۱۲

۳۴- فرض کنید  $A \subseteq \mathbb{R}$  مجموعه‌ای نامتناهی و برای هر  $x, y \in A$ ، مقدار  $x - y$  عددی گویا باشد. کدام گزینه درست است؟ (m اندازه لبگ بر  $\mathbb{R}$  است.)

(۱) لزوماً اندازه‌پذیر لبگ نیست.

(۲)  $A$  اندازه‌پذیر لبگ است و  $m(A) = \infty$ (۳)  $A$  اندازه‌پذیر لبگ است و  $m(A) = 0$ (۴)  $A$  اندازه‌پذیر لبگ است ولی در مورد مقدار  $m(A)$  چیزی نمی‌توان گفت.

۳۵- برای مجموعه اندازه‌ناپذیر لبگ  $A \subseteq \mathbb{R}$ ، قرار می‌دهیم

$$B = \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 : x \in A\}$$

در فضای  $\mathbb{R}^2$  با متر اقلیدسی و اندازه لبگ دو بعدی کدام گزینه در مورد  $B$  درست است؟

(۱) اندازه‌پذیر نیست.

(۲) بسته است.

(۳) اندازه‌پذیر است ولی بسته نیست.

(۴) اندازه‌پذیر است ولی اندازه آن متناهی نیست.

۳۶- فرض کنید  $X$  یک مجموعه ناتهی و  $\mathcal{F}$  یک افراز متناهی  $X$  باشد. فرض کنید  $A$  و  $B$  به ترتیب جبر تولیدشده و سیگما - جبر تولید شده توسط  $\mathcal{F}$  باشند. کدام گزینه درست است؟

(۱) در حالت کلی  $A \neq B$ (۲)  $A = B$  و هر دو متناهی هستند.(۳)  $A$  متناهی است ولی  $B$  متناهی نیست.(۴)  $A$  و  $B$  متناهی هستند ولی ممکن است برابر نباشند.

۳۷- فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  انتگرال‌پذیر لبگ باشد. تابع  $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  را با ضابطه  $F(x) = \int_{(-\infty, x]} f dm$

تعریف می‌کنیم. که  $m$  اندازه لبگ روی  $\mathbb{R}$  است. کدام گزینه درست است؟

(۱)  $F$  لزوماً پیوسته نیست.(۲)  $F$  همه‌جا مشتق‌پذیر است.(۳)  $F$  پیوسته یکنواخت است.(۴)  $F$  پیوسته است ولی لزوماً پیوسته یکنواخت نیست.



۳۸- فرض کنید  $(X, M, \mu)$  یک فضای اندازه و  $f = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j}$  یک تابع ساده نامنفی باشد که  $E_j$  ها دو به دو مجزا و

در  $M$  هستند. اندازه  $\nu: M \rightarrow [0, +\infty]$  با ضابطه  $\nu(A) = \int_A f d\mu$  را در نظر بگیرید. مقدار  $\int_X f d\nu$  کدام است؟

$$\sum_{j=1}^n c_j (\mu(E_j))^2 \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n c_j (\mu(E_j))^2 \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n c_j \mu(E_j) \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n c_j^2 \mu(E_j) \quad (4)$$

۳۹- سری توانی  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$  روی  $(-1, 1)$  را در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟

(۱) این سری در  $L^1(-1, 1)$  واگراست.

(۲) این سری در  $L^1(-1, 1)$  به تابع  $\frac{-x^2}{1+x^2}$  همگراست.

(۳) این سری در  $L^1(-1, 1)$  به تابع  $\frac{1}{1+x^2}$  همگراست.

(۴) این سری بر  $(-1, 1)$  به طور نقطه‌ای به تابع  $\frac{1}{1+x^2}$  همگراست ولی در  $L^1(-1, 1)$  به تابع  $\frac{1}{1+x^2}$  همگرا

نیست.

۴۰- فرض کنید  $\{f_n\}$  دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر نامنفی روی یک فضای اندازه دلخواه باشد که برای هر  $n \geq 1$ ,

$f_n \geq f_{n+1}$  و  $f_n \rightarrow f$  (نقطه‌ای). کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر برای هر  $n \geq 1$ ،  $\int f_n = \infty$  آنگاه  $\int f = \infty$

(۲) اگر  $\int f_1 < \infty$  آنگاه  $\int f_n \rightarrow \int f$

(۳)  $\int f \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$

(۴) اگر  $\int f = \infty$  آنگاه  $\int f_n \rightarrow \int f$

۴۱- دنباله‌های توابع اندازه‌پذیر زیر را بر  $\mathbb{R}$  با اندازه لبگ در نظر بگیرید.

$$f_n = \chi_{(n, n+1)} \quad , \quad g_n = n\chi_{(0, \frac{1}{n}]}$$

کدام گزینه درست است؟

(۱)  $f_n \rightarrow 0$  در اندازه و  $g_n \rightarrow 0$  نقطه‌ای

(۲)  $f_n \rightarrow 0$  نقطه‌ای و  $g_n \rightarrow 0$  در اندازه

(۳)  $f_n \rightarrow 0$  در  $L^1(\mathbb{R})$  و  $g_n \rightarrow 0$  در اندازه

(۴)  $f_n \rightarrow 0$  نقطه‌ای و  $g_n \rightarrow 0$  در  $L^1(\mathbb{R})$

۴۲- فرض کنید  $C$  مجموعه کانتور و  $\|\cdot\|_\infty$  سوپرنرم اساسی (توابع اندازه‌پذیر) بر  $[0, 1]$  (با اندازه لبگ) باشد. آن‌گاه

برای تابع  $f(x) = \sin x \cdot \chi_{Q^c \cap [0, 1]}(x) - \cos x \cdot \chi_C(x) + x \cdot \chi_{Q^c \cap [0, 1]}(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$

$\|f\|_\infty$  برابر است با:

(۱)  $\sin 1$

(۲)  $1 + \sin 1 + \cos 1$

(۳)  $1 + \sin 1 - \cos 1$

(۴)  $1 + \sin 1$

۴۳- فضای  $[0, 1]$  را با اندازه لبگ در نظر می‌گیریم و تابع  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  تعریف می‌کنیم.

مقدار  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p$  کدام است؟

(۱) ۰

(۲)  $\frac{\pi}{2}$

(۳) ۱

(۴)  $\infty$

۴۴- فرض کنید  $C[0, 1]$  فضای توابع پیوسته بر بازه  $[0, 1]$  مجهز به نرم سوپرنرم باشد. نرم تابع خطی

$T: C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $T(f) = \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx \quad (f \in C[0, 1])$  کدام است؟

(۱)  $\|T\| = \infty$

(۲)  $\|T\| = 2$

(۳)  $\|T\| = \frac{1}{2}$

(۴)  $\|T\| = 1$

۴۵- فرض کنید  $V \subseteq L^2[0,1]$  متشکل از تمام چند جمله‌ای‌ها روی بازه  $[0,1]$  و  $V^\perp$  مکمل متعامد  $V$  (متشکل از

همه بردارهای عمود بر  $V$ ) باشد. زیر فضای  $(V^\perp)^\perp$  برابر است با:

(۱) زیر فضای همه توابع پیوسته بر  $[0,1]$

(۲)  $L^2[0,1]$

(۳)  $V$

(۴) زیر فضای همه سری‌های توانی همگرا در  $L^2[0,1]$

