کد کنترل

275

E

275E

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

دفترچهٔ شمارهٔ (۱)
صبح جمعه
۹۸/۱۲/۹

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دورهٔ دکتری (نیمه‌متمرکز) ــ سال ۱۳۹۹

رشتهٔ فیزیک ــ کد (۲۲۳۸)

تعداد سؤال: ۴۵ — مدت پاسخ‌گویی: ۱۵۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شمارهٔ سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شمارهٔ	تا شمارهٔ
۱	مجموعه دروس تخصصی: مکانیک کوانتومی و مکانیک کوانتومی پیشرفته ــ الکترومغناطیس و الکترودینامیک ــ ترمودینامیک و مکانیک آماری پیشرفته ۱	۴۵	۱	۴۵

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

این آزمون نمرهٔ منفی دارد.

۱۳۹۹

*** داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به‌منزلهٔ عدم حضور شما در جلسهٔ آزمون است.**

اینجانب .... با شمارهٔ داوطلبی .... با آگاهی کامل، یکسان‌بودن شمارهٔ صندلی خود را با شمارهٔ داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخ‌نامه و دفترچهٔ سؤالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچهٔ سؤالات و پائین پاسخ‌نامه‌ام را تأیید می‌نمایم.   **امضا:**

۱- دو عملگر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ دارای خاصیت $\hat{A}f(q)=f(q+\ell)$ و $\hat{B}f(q)=f(-q)$ هستند. حاصل $\exp(\hat{A}\,\hat{B}\,\hat{A}^{2}\,\hat{B}\,\hat{A})f(q)$ کدام است؟

۱) $e^{1}\,f(q)$

۲) $e^{-1}\,f(q)$

۳) $e^{\frac{q}{\ell}}\,f(q)$

۴) $e^{-\frac{q}{\ell}}\,f(q)$

۲- معادله شرودینگر مستقل از زمان برای ذره‌ای به جرم m در پتانسیل $V(\vec{r})$ در فضای تکانه برحسب $V(\vec{p})=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3}}\int V(\vec{r})\,e^{\frac{i\vec{p}.\vec{r}}{\hbar}}\,d^{3}r$ کدام است؟

۱) $\frac{P^{2}}{2m}\phi(\vec{p})+\iint V(\vec{p}')e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}'-\vec{p}).\vec{r}}\phi(\vec{p}')d^{3}r\,d^{3}p'=E\,\phi(\vec{p})$

۲) $\frac{P^{2}}{2m}\phi(\vec{p})+\iint V(\vec{p}'-\vec{p})e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}'-\vec{p}).\vec{r}}\phi(p')\,d^{3}r\,d^{3}p'=E\,\phi(\vec{p})$

۳) $\frac{P^{2}}{2m}\phi(\vec{p})+\int V(\vec{p}')\phi(\vec{p}')d^{3}p'=E\,\phi(\vec{p})$

۴) $\frac{P^{2}}{2m}\phi(\vec{p})+\int V(\vec{p}'-\vec{p})\phi(\vec{p}')d^{3}p'=E\,\phi(\vec{p})$

۳- هامیلتونی دستگاهی به‌صورت $H=\epsilon_{1}a^{\dagger}a+\epsilon_{2}b^{\dagger}b+\epsilon_{12}(a^{\dagger}b+b^{\dagger}a)$ است. عملگرهای a و b در روابط جابه‌جاگری $[a,b]=[a,b^{\dagger}]=0$ و پاد جابه‌جاگری $\{a,a\}=\{b,b\}=0$ و $\{a,a^{\dagger}\}=\{b,b^{\dagger}\}=1$ صدق می‌کنند. اگر عملگر N به شکل $N=a^{\dagger}a+b^{\dagger}b$ تعریف شود، در تصویر هایزنبرگ حاصل $\frac{dN}{dt}$ کدام است؟

۱) صفر

۲) $\frac{i\epsilon_{12}}{\hbar}(a^{\dagger}b+b^{\dagger}a)$

۳) $\frac{4i\epsilon_{12}}{\hbar}(a^{\dagger}ab^{\dagger}b)$

۴) $\frac{i\epsilon_{12}}{\hbar}(a^{\dagger}b-b^{\dagger}a)$

۴- هامیلتونی یک دستگاه کوانتومی به شکل $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) + \hbar\Omega(a^\dagger + a)$ است که در آن ω و Ω ضرایبی مثبت هستند و $[a, a^\dagger] = 1$. عملگر $b = a + \gamma I$ که γ ضریبی حقیقی و ثابت و I عملگر واحد است، چنان تعریف می‌شود که هامیلتونی به شکل $H = \hbar\omega b^\dagger b + \beta I$ درآید. مقدار ضریب‌های γ و β کدامند؟

۱) $\beta = \hbar(\frac{\omega}{2} + \frac{\Omega^2}{\omega})\ ,\ \gamma = \frac{\Omega}{\omega}$

۲) $\beta = \hbar(\frac{\omega}{2} + \frac{\Omega^2}{\omega})\ ,\ \gamma = -\frac{\Omega}{\omega}$

۳) $\beta = \hbar(\frac{\omega}{2} - \frac{\Omega^2}{\omega})\ ,\ \gamma = \frac{\Omega}{\omega}$

۴) $\beta = \hbar(\frac{\omega}{2} - \frac{\Omega^2}{\omega})\ ,\ \gamma = -\frac{\Omega}{\omega}$

۵- یک ذره با اسپین $\frac{1}{2}$ با ممان مغناطیسی μ در میدان مغناطیسی وابسته به زمان $\vec{B}(t)$ که در راستای z است قرار می‌گیرد. اگر در لحظه $t = 0$ بردار حالت ذره $\begin{pmatrix} \cos\alpha\ e^{-i\beta} \\ \sin\alpha\ e^{i\beta} \end{pmatrix}$ باشد، راستای $\hat{n}$ که اندازه‌گیری اسپین در آن راستا در لحظه دلخواه $t > 0$ مقدار $+\frac{\hbar}{2}$ را نتیجه دهد، کدام است؟ (θ و φ راستای $\hat{n}$ را در مختصات کروی مشخص می‌کنند.)

۱) $\theta = 2\alpha\ ,\ \varphi = 2\beta + \frac{2\mu}{\hbar} B(t)$

۲) $\theta = 2\alpha\ ,\ \varphi = 2\beta + \frac{2\mu}{\hbar} \int_0^t B(t')\,dt'$

۳) $\theta = \alpha\ ,\ \varphi = \beta + \frac{\mu}{\hbar} B(t)$

۴) $\theta = \alpha\ ,\ \varphi = \beta + \frac{\mu}{\hbar} \int_0^t B(t')\,dt'$

۶- ذره‌ای به جرم m درون استوانه‌ای به شعاع a و ارتفاع L محبوس است. در دستگاه مختصاتی که محور z منطبق بر محور استوانه و مبدأ مختصات منطبق بر مرکز قاعده پایین استوانه باشد، تابع موج ذره در مختصات استوانه‌ای کدام است؟ (A ضریب بهنجارش، $J_m(x)$ و $N_m(x)$ توابع بسل و نویمن مرتبه m و $k_{m\nu}$ برابر با νاُمین صفر تابع $J_m(x)$ یا $N_m(x)$ است. $\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$)

۱) $\psi(\rho,\varphi,z) = A\,N_m\left(\frac{k_{m\nu}}{a}\rho\right)\sinh\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\sin(m\varphi)$

۲) $\psi(\rho,\varphi,z) = A\,J_m\left(\frac{k_{m\nu}}{a}\rho\right)\sinh\left(\frac{n\pi z}{L}\right)e^{im\varphi}$

۳) $\psi(\rho,\varphi,z) = A\,N_m\left(\frac{k_{m\nu}}{a}\rho\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\sin(m\varphi)$

۴) $\psi(\rho,\varphi,z) = A\,J_m\left(\frac{k_{m\nu}}{a}\rho\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)e^{im\varphi}$

۷- تبدیل فوریه انتشارگر ذره‌ای به جرم m به شکل زیر داده شده است.

$$\tilde{K}(x,x';E)=\int_{0}^{\infty}dt\,e^{iEt/\hbar}K(x,t;x',0)=A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nrx)\sin(nrx')}{E-\frac{\hbar^{2}r^{2}}{2m}n^{2}}$$

که A و r ضریب‌های ثابتی هستند. این ذره تحت‌تأثیر چه پتانسیلی قرار دارد؟

۱) نوسانگر هماهنگ یک بعدی با بسامد زاویه‌ای $\frac{h\pi^{2}}{mr^{2}}$

۲) چاه پتانسیل نامتناهی یک بُعدی با عرض $\frac{1}{r}$

۳) چاه پتانسیل نامتناهی یک بُعدی با عرض $\frac{\pi}{r}$

۴) نوسانگر هماهنگ یک بُعدی با بسامد زاویه‌ای $\frac{\hbar}{mr^{2}}$

۸- ویژه حالت تکانه زاویه‌ای مداری $|\ell=2\,,\,m=0\rangle$ را در نظر بگیرید. فرض کنید این حالت به اندازهٔ θ حول محور y دوران یابد. p(m) احتمال به‌دست آوردن حالت‌های جدید در ۲± و ۱± و $m=0$ کدام است؟

۱) $p(0)=\cos^{2}\theta \;,\; p(\pm1)=\frac{1}{4}\sin^{2}\theta\cos^{2}\theta \;,\; p(\pm2)=\frac{1}{2}\sin^{2}\theta$

۲) $p(0)=\cos^{2}\theta \;,\; p(\pm1)=\frac{1}{2}\sin^{2}\theta\cos^{2}\theta \;,\; p(\pm2)=\frac{1}{4}\sin^{2}\theta$

۳) $p(0)=\frac{1}{4}(3\cos^{2}\theta-1)^{2} \;,\; p(\pm1)=\frac{3}{2}\sin^{2}\theta\cos^{2}\theta \;,\; p(\pm2)=\frac{3}{8}\sin^{4}\theta$

۴) $p(0)=\frac{1}{4}(3\cos^{2}\theta-1)^{2} \;,\; p(\pm1)=\frac{3}{8}\sin^{2}\theta\cos^{2}\theta \;,\; p(\pm2)=\frac{3}{2}\sin^{4}\theta$

۹- برای دو ذره ۱ و ۲ هر یک با اسپین $\frac{1}{2}$ حالت‌های $|\pm\rangle_{1}$ ($|\pm\rangle_{2}$) ویژه بردار هم‌زمان عملگرهای $\hat{S}_{1}^{2}$ و $\hat{S}_{1z}$ ($\hat{S}_{2}^{2}\,,\,\hat{S}_{2z}$) هستند. اگر حالت $|s,m\rangle$ ویژه بردار هم‌زمان عملگرهای $\hat{S}_{z}$ و $\hat{S}^{2}$ باشد که $\hat{S}=\hat{S}_{1}+\hat{S}_{2}$ و بنویسیم:

$$\begin{pmatrix}|1,1\rangle\\|1,0\rangle\\|0,0\rangle\\|1,-1\rangle\end{pmatrix}=U\begin{pmatrix}|+\rangle_{1}|+\rangle_{2}\\|+\rangle_{1}|-\rangle_{2}\\|-\rangle_{1}|+\rangle_{2}\\|-\rangle_{1}|-\rangle_{2}\end{pmatrix}$$

حاصل عملگر $e^{i\pi U}$ برحسب U و I (ماتریس ۴×۴ واحد) کدام است؟

۱) $-I$

۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}(-I+iU)$

۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}(I+iU)$

۴) iU

۱۰- اگر H هامیلتونی یک سیستم کوانتومی باشد، کدام سیستم دارای هر دو تقارن پاریته و وارونی زمان است؟ (α، β، γ، ξ و δ ضرایب حقیقی و $\vec{r}$ عملگر مکان، $\vec{p}$ عملگر تکانه خطی، $\vec{L}$ عملگر تکانه زاویه‌ای مداری و $\vec{S}$ عملگر اسپین ذاتی است.)

۱) $H=\alpha\vec{p}.\vec{r}-\frac{\gamma}{r}\vec{r}.\vec{S}$

۲) $H=\frac{P^2}{2m}+\frac{\beta}{r}\vec{L}.\vec{S}$

۳) $H=\alpha\vec{r}.\vec{p}+\frac{\delta}{r^2}\vec{L}.\vec{S}$

۴) $H=\frac{p^2}{2m}+\xi\vec{p}.\vec{L}$

۱۱- بعضی از مولکول‌های دو اتمی (مثلاً NaCl) دارای گشتاور دو قطبی الکتریکی $\vec{p}$ هستند. در حضور میدان الکتریکی خارجی یکنواخت $E_0\hat{z}$ هامیلتونی مولکولی به شکل $H=\frac{L^2}{2I}-PE_0\cos\theta$ است که $L^2=L_x^2+L_y^2+L_z^2$، I لختی دورانی مولکول و θ زاویه قطبی در مختصات کروی است. تا اولین مرتبهٔ غیرصفر $\frac{P^2E_0^2I}{\hbar^2}$ انرژی حالت پایه این مولکول چقدر است؟ $\left(Y_1^0(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\ ,\ Y_0^0(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\right)$

۱) $-\frac{1}{3}\frac{P^2E_0^2I}{\hbar^2}$

۲) $\frac{3}{8}\frac{P^2E_0^2I}{\hbar^2}$

۳) $\frac{\hbar^2}{I}-PE_0+\frac{3}{8}\frac{P^2E_0^2I}{\hbar^2}$

۴) $\frac{\hbar^2}{I}-PE_0-\frac{1}{3}\frac{P^2E_0^2I}{\hbar^2}$

۱۲- ذره‌ای به جرم m در لحظهٔ $t=0$ ابتدا در حالت پایه چاه پتانسیل یک بُعدی بی‌نهایت که دیواره‌هایش در $x=0$ و $x=a$ است، قرار دارد. این ذره در بازه $0\leq t<\infty$ تحت‌تأثیر پتانسیل اختلالی وابسته به زمان $V(x,t)=\beta x^2e^{-t/\tau}$ قرار می‌گیرد که τ و β ثابت‌های مثبتی هستند. تا مرتبه اول اختلال وابسته به زمان، احتمال این‌که در $t\to\infty$ ذره در اولین حالت برانگیخته انرژی باشد، چقدر است؟ [اگر $\langle x|1\rangle$ و $\langle x|2\rangle$ توابع موج حالت پایه و اولین حالت برانگیخته ذره در چاه پتانسیل یک بعدی نامتناهی باشند $\langle 2|x^2|1\rangle=-\frac{16}{9}\frac{a^2}{\pi^2}$.]

۱) $\left(\frac{16a^2\tau\beta}{3\hbar\pi}\right)^2\left(1+\frac{3\hbar^2\pi^2\tau^2}{4m^2a^4}\right)^{1}$

۲) $\left(\frac{4a^2\tau\beta}{9\hbar\pi^2}\right)^2\left(1+\frac{9\hbar^2\pi^2\tau^2}{2m^2a^4}\right)^{-1}$

۳) $\left(\frac{4a^2\tau\beta}{3\hbar\pi^2}\right)^2\left(1+\frac{3\hbar^2\pi^4\tau^2}{2m^2a^4}\right)^{-1}$

۴) $\left(\frac{16a^2\tau\beta}{9\hbar\pi^2}\right)^2\left(1+\frac{9\hbar^2\pi^4\tau^2}{4m^2a^4}\right)^{-1}$

۱۳- به روش وردش و با تابع موج آزمون $\psi(x)=\frac{1}{x^2+a^2}$ انرژی حالت پایه نوسانگر هماهنگ ساده یک بعدی $H=\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ چقدر است؟ $\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1\times 3\times 5.....(2n-3)}{2\times 4\times 6.....(2n-2)}\frac{\pi}{a^{2n-1}}\quad;\quad n=2,3,.....\right)$

۱) $\frac{1}{2}\hbar\omega$

۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}\hbar\omega$

۳) $\sqrt{2}\hbar\omega$

۴) $2\hbar\omega$

۱۴- دامنهٔ پراکندگی ذرات پر انرژی به جرم m و انرژی $E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$ از پتانسیل یوکاوا $V(r)=V_0a\frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r}$ تاتقریب مرتبه اول بورن به شکل $f(\theta)\approx\frac{-2mV_0a^3}{\hbar^2}\frac{1}{1+4k^2a^2\sin^2\frac{\theta}{2}}$ است که θ زاویهٔ بین راستای موج (ذرات) فرودی و راستای مشاهده (آشکارساز) است. سطح مقطع کل پراکندگی کدام است؟

۱) $\left(\frac{4m^2V_0^2a^6}{\hbar^4}\right)4\pi(1+4k^2a^2)\ln(1+4k^2a^2)$

۲) $\left(\frac{4m^2V_0^2a^6}{\hbar^4}\right)4\pi\ln(1+4k^2a^2)$

۳) $\left(\frac{4m^2V_0^2a^6}{\hbar^4}\right)\frac{4\pi}{1+4k^2a^2}$

۴) $\left(\frac{4m^2V_0^2a^6}{\hbar^4}\right)\frac{4\pi(1+2k^2a^2)}{1+4k^2a^2}$

۱۵- در پراکندگی کشسان ذره‌ای به جرم m با انرژی $E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$ و تکانه زاویه‌ای $\ell=0$ (پراکندگی موج S) از پتانسیل متقارن و کروی $V(r)=\begin{cases}-V_0 & 0<r\le a\\ 0 & r\ge a\end{cases}$، $(V_0>0)$ تابع موج شعاعی در ناحیه $0<r\le a$ به‌صورت $R(r)=C_1\frac{\sin(qr)}{r}$ و در ناحیه $r\ge a$ به‌صورت $R(r)=C_2\frac{\sin(kr+\delta_0)}{r}$ است که $q^2=\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}$. سطح مقطع کل پراکندگی در انرژی‌های پایین $E\ll V_0$ کدام است؟

۱) $\pi a^2\left(\frac{\tan(qa)}{qa}+1\right)^2$

۲) $4\pi a^2\left(\frac{\tan(qa)}{qa}+1\right)^2$

۳) $\pi a^2\left(\frac{\tan(qa)}{qa}-1\right)^2$

۴) $4\pi a^2\left(\frac{\tan(qa)}{qa}-1\right)^2$

۱۶- مرزهای یک ناحیه دو بعدی (نامتناهی در امتداد z) $۱ \le x \le ۰$ و $۱ \le y \le ۰$ در پتانسیل صفر نگه داشته شده‌اند. در داخل حجم این ناحیه بار الکتریکی به‌طور یکنواخت توزیع شده است، به‌طوری‌که چگالی آن در واحد طول امتداد z، برابر واحد است. با تابع پتانسیل آزمون $\phi(x,y) = Axy(1-x)(1-y)$ و روش وردش بهترین مقدار A کدام است؟ (راهنمایی: وردش معادلهٔ $I[\phi] = \frac{1}{2}\int_V \vec{\nabla}\phi.\vec{\nabla}\phi dV - \int_V \rho\phi dV$ منجر به معادله پواسون می‌شود و $\varepsilon_0 = 1$)

۱) $\frac{2}{5}$

۲) $\frac{4}{5}$

۳) $\frac{5}{2}$

۴) $\frac{5}{4}$

۱۷- بار نقطه‌ای Q در فاصله d از مرکز یک پوستهٔ رسانای کروی به شعاع R $(d > R)$ که در پتانسیل صفر نگه داشته شده است، قرار دارد. کار لازم برای بردن بار نقطه‌ای Q به فاصله بی‌نهایت از مرکز پوسته کروی چقدر است؟

۱) $\frac{Q^2 R}{8\pi \epsilon_0 (d^2 - R^2)}$

۲) $\frac{Q^2 R}{4\pi \epsilon_0 (d^2 - R^2)}$

۳) $-\frac{Q^2 R}{8\pi \epsilon_0 (d^2 - R^2)}$

۴) $-\frac{Q^2 R}{4\pi \epsilon_0 (d^2 - R^2)}$

۱۸- تابع گرین معادله لاپلاس برای فضای آزاد (بدون مرز) دو بُعدی (نامتناهی در امتداد z) در مختصات استوانه‌ای، $G(\rho,\varphi;\rho',\varphi')$، کدام است؟ [راهنمایی: برای $x < 1$ داریم: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\cos n\theta = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right)$]

۱) $-2\ln\rho_< + 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{\rho_>}{\rho_<}\right)^m \cos m(\varphi-\varphi')$

۲) $-2\ln\left(\frac{\rho_>}{\rho_<}\right) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{\rho_<}{\rho_>}\right)^m \cos m(\varphi-\varphi')$

۳) $-2\ln\rho_> + 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{\rho_<}{\rho_>}\right)^m \cos m(\varphi-\varphi')$

۴) $-2\ln\left(\frac{\rho_<}{\rho_>}\right) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{\rho_>}{\rho_<}\right)^m \cos m(\varphi-\varphi')$

۱۹- پتانسیل الکتریکی در فضای بین دو صفحهٔ تخت نامتناهی رسانا واقع در $z=0$ و $z=L$ که بار نقطه‌ای q در نقطهٔ $z=z_0$ $(0<z_0<L)$ از این فضا قرار دارد برحسب توابع بسل I_0 و K_0 کدام است؟ (دو صفحهٔ تخت رسانا در پتانسیل الکتریکی صفر نگه داشته شده‌اند.)

۱) $\frac{q}{\pi \in_0 L}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2n\pi z_0}{L}\right)\sin\left(\frac{2n\pi z}{L}\right)K_0\left(\frac{2n\pi\rho}{L}\right)$

۲) $\frac{q}{\pi \in_0 L}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z_0}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)I_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right)$

۳) $\frac{q}{\pi \in_0 L}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z_0}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)K_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right)$

۴) $\frac{q}{\pi \in_0 L}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2n\pi z_0}{L}\right)\sin\left(\frac{2n\pi z}{L}\right)I_0\left(\frac{2n\pi\rho}{L}\right)$

۲۰- بار الکتریکی Q به‌صورت غیریکنواخت روی سطح کره‌ای به شعاع R متناسب با $\sin^2\theta\cos^2\varphi$ توزیع شده است. θ و φ زاویه قطبی و سمتی در دستگاه مختصات کروی است که مبدأ آن منطبق بر مرکز کره است. بردار گشتاور دو قطبی الکتریکی وابسته به این توزیع بار کدام است؟

۱) صفر

۲) $\frac{QR}{8}(3\hat{i}-2\hat{j})$

۳) $\frac{QR}{8}(3\hat{i}+\hat{k})$

۴) $\frac{3QR}{4}\hat{i}$

۲۱- پتانسیل الکتریکی یک توزیع بار در فضای اطراف آن تا مرتبهٔ چهار قطبی الکتریکی به‌صورت:

$$\phi(x)=\phi(0)+\sum_i x_i\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(0)+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j x_i x_j\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}(0)+\cdots$$

است. بارهای نقطه‌ای $+q$ و $-q$ به‌ترتیب در نقاط $z=a$ و $z=-a$ از محور z واقع‌اند. انرژی الکتریکی برهم‌کنش بارهای نقطه‌ای با توزیع بار تا مرتبهٔ چهار قطبی کدام است؟

۱) $2aq\frac{\partial\phi}{\partial z}(0)$

۲) $2q\phi(0)+a^2q\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}(0)$

۳) $2aq\frac{\partial\phi}{\partial z}(0)+a^2q\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}(0)$

۴) $2q\phi(0)+2aq\frac{\partial\phi}{\partial z}(0)+a^2q\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}(0)$

۲۲- برای یک توزیع بار حجمی در فضا با چگالی $\rho(\vec{r}) = \rho_\circ \left(\frac{r}{R}\right)^{۲} e^{-\frac{r}{R}} \cos^{۲}\theta$، کدام‌یک از گشتاورهای چند قطبی کروی q_{lm} غیرصفراند؟ ((r,θ,φ) مختصات کروی یک نقطه از فضا است.)

$$Y_{\circ\circ} = \frac{۱}{\sqrt{۴\pi}} \ , \ Y_{۱\circ} = \sqrt{\frac{۳}{۴\pi}}\cos\theta \ , \ Y_{۲\circ} = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۵}{۴\pi}}(۳\cos^{۲}\theta - ۱) \ , \ Y_{۳\circ} = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۷}{۴\pi}}(۵\cos^{۲}\theta - ۳)\cos\theta$$

۱) $q_{۲,\circ}$ ، $q_{۱,\circ}$ ، $q_{\circ\circ}$

۲) $q_{۳,\circ}$ ، $q_{۱,\circ}$

۳) $q_{۳,\circ}$ ، $q_{۲,\circ}$ ، $q_{۱,\circ}$

۴) $q_{۲,\circ}$ ، $q_{\circ\circ}$

۲۳- در ناحیه‌ای خارج از مبدأ مختصات توزیع جریانی بـه شـکل $\vec{J} = J(r,\theta)\hat{\varphi}$ (در مختصـات کـروی) وجـود دارد. پتانسیل برداری مغناطیسی در نقاط داخل این توزیع جریان کدام است؟

$$Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(۲\ell+۱)(\ell-m)!}{۴\pi(\ell+m)!}}\ P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

$$\frac{۱}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = ۴\pi\sum_{\ell=\circ}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\frac{۱}{۲\ell+۱}\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+۱}}\,Y_{\ell m}^*(\theta',\varphi')Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

۱) $\vec{A}(r,\theta) = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\sum_{\ell=\circ}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\frac{۱}{\ell(\ell+۱)}\left[\int d^{۳}x'\, r'^{(-\ell-۱)}\, P_\ell^m(\cos\theta')J(r',\theta')\right] r^\ell P_\ell^m(\cos\theta)\hat{\theta}$

۲) $\vec{A}(r,\theta) = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\sum_{\ell=\circ}^{\infty}\frac{۱}{\ell(\ell+۱)}\left[\int d^{۳}x'\, r'^{(-\ell-۱)} P_\ell^۱(\cos\theta')J(r',\theta')\right] r^\ell P_\ell^۱(\cos\theta)\hat{\varphi}$

۳) $\vec{A}(r,\theta) = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\sum_{\ell=\circ}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\frac{۱}{\ell(\ell+۱)}\left[\int d^{۳}x'\, r'^{\ell}\, P_\ell^m(\cos\theta')J(r',\theta')\right] r^\ell P_\ell^m(\cos\theta)\hat{\theta}$

۴) $\vec{A}(r,\theta) = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\sum_{\ell=\circ}^{\infty}\frac{۱}{\ell(\ell+۱)}\left[\int d^{۳}x'\, r'^{\ell} P_\ell^۱(\cos\theta')J(r',\theta')\right] r^\ell P_\ell^۱(\cos\theta)\hat{\varphi}$

۲۴- اگر $\Phi(\vec{x},t)$ و $\vec{A}(\vec{x},t)$ به‌ترتیب پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی و $\rho(\vec{x},t)$ چگالی حجمی بـار الکتریکـی باشند، در چه شرایطی رابطهٔ $\nabla^{۲}\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_\circ}$ در محیط خلأ برقرار است؟

۱) به شرط آن‌که $\vec{\nabla}.\vec{A} + \frac{۱}{c^{۲}}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \circ$ باشد.

۲) به شرط آن‌که $\vec{\nabla}\Phi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \circ$ باشد.

۳) به شرط آن‌که $\vec{\nabla}.\vec{A} = \circ$ باشد.

۴) همواره برقرار است.

۲۵- اگر $\left[\rho(\vec{x}',t')\right]_{ret}=\rho(\vec{x}',t-\frac{R}{c})$ باشد که در آن $\vec{R}=\vec{x}-\vec{x}'$ و $R=|\vec{R}|$، کدام رابطه همواره درست است؟

۱) $\vec{\nabla}'[\rho]_{ret}=[\vec{\nabla}'\rho]_{ret}-\rho\frac{\vec{R}}{R^{2}}$

۲) $\vec{\nabla}'[\rho]_{ret}=[\vec{\nabla}'\rho]_{ret}+\frac{1}{c}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t'}\right]_{ret}\frac{\vec{R}}{R}$

۳) $\vec{\nabla}'|\rho|_{ret}=|\vec{\nabla}'\rho|_{ret}+\rho\frac{\vec{R}}{R^{2}}$

۴) $\vec{\nabla}'[\rho]_{ret}=[\vec{\nabla}'\rho]_{ret}-\frac{1}{c}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t'}\right]_{ret}\frac{\vec{R}}{R}$

۲۶- یک موج تخت الکترومغناطیسی با بسامد زاویه‌ای ω از فضای آزاد با ضریب شکست $n=1$ عمود بر سطح یک ماده غیرمغناطیسی $(\mu=\mu_0)$ رسانا که رسانندگی آن σ است می‌تابد. ضریب شکست این ماده $n'=c\sqrt{\epsilon\mu}$ است که $\epsilon\simeq\frac{i\sigma}{\omega}$. اگر E_0 دامنه موج فرودی و E''_0 دامنه موج بازتابی باشد، کدام عبارت بیانگر ضریب بازتاب $R=\left|\frac{E''_0}{E_0}\right|^{2}$ برحسب عمق پوسته $\delta=\sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$ است؟

۱) $\frac{4c^{4}+2c^{2}\delta^{2}\omega^{2}}{(2c^{2}+2c\delta\omega+\delta^{2}\omega^{2})^{2}}$

۲) $\frac{2c^{2}\delta^{2}\omega^{2}+\delta^{4}\omega^{4}}{(2c^{2}+2c\delta\omega+\delta^{2}\omega^{2})^{2}}$

۳) $\frac{4c^{4}+2c^{2}\delta^{2}\omega^{2}+\delta^{4}\omega^{4}}{(2c^{2}+2c\delta\omega+\delta^{2}\omega^{2})^{2}}$

۴) $\frac{4c^{4}+\delta^{4}\omega^{4}}{(2c^{2}+2c\delta\omega+\delta^{2}\omega^{2})^{2}}$

۲۷- یک سیم مستقیم نامتناهی در امتداد محور z در نظر بگیرید. اگر جریانی به‌صورت $I(t)=q_0\delta(t)$ از سیم بگذرد که t زمان و $\delta(t)$ تابع دلتای دیراک است، میدان الکتریکی در نقطه‌ای از فضا به فاصلهٔ ρ $(t>\frac{\rho}{c})$ از سیم کدام است؟

۱) $\frac{\mu_0 q_0 c}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{c^{2}t^{2}-\rho^{2}}}\hat{z}$

۲) $\frac{\mu_0 q_0 c}{2\pi}\frac{ct}{\rho\sqrt{c^{2}t^{2}-\rho^{2}}}\hat{z}$

۳) $\frac{\mu_0 q_0 c^{2}}{2\pi}\frac{ct}{\left(c^{2}t^{2}-\rho^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$

۴) $\frac{\mu_0 q_0 c^{2}}{2\pi}\frac{ct-\rho}{\left(c^{2}t^{2}-\rho^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$

۲۸- سرعت الکترونی به جرم m و بار الکتریکی $-e$ از مقدار اولیه v_0 با شتاب کند شونده ثابت a به صفر می‌رسد. چه کسری از انرژی جنبشی اولیه آن به‌صورت تابش تلف می‌شود؟ (فرض کنید $v_0 << c$)

۱) $\frac{2e^2\mu_0 a}{3\pi m v_0 c}$

۲) $\frac{e^2\mu_0 a}{3\pi m v_0 c}$

۳) $\frac{c^2 a v_0}{3\pi\varepsilon_0 c^3}$

۴) $\frac{c^2 a v_0}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$

۲۹- دو عدد دو قطبی الکتریکی واقع در مبدأ مختصات به‌صورت $\vec{P}_1 = P_0 \cos\omega t\,\hat{i}$ و $\vec{P}_2 = (P_0\cos\phi_0\hat{i} + P_0\sin\phi_0\hat{j})\sin\omega t$ با زمان نوسان می‌کنند که $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بردارهای یکه‌اند. در فواصل دور موج تابشی در $\theta = \frac{\pi}{2}$ دارای چه قطبشی است؟ (θ و ϕ به‌ترتیب زوایای قطبی و سمتی بردار مکان $\vec{r}$ در مختصات کروی‌اند، میدان الکتریکی دو قطبی $\vec{P}(t) = \vec{p}\cos\omega t$ در فواصل دور $\vec{r} = r\hat{r}$ متناسب است با $\left(\vec{E}(\vec{r},t) \sim \mathrm{Re}\left[(\hat{r}\times\vec{p})\times\hat{r}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\right]\right.$.

۱) خطی

۲) دایروی

۳) بیضوی

۴) بسته به مقدار ϕ_0 هر یک از قطبش‌های خطی، دایروی و بیضوی امکان‌پذیر است.

۳۰- سطح مقطع پراکندگی دیفرانسیلی یک موج الکترومغناطیسی تخت تک‌فام فرودی، $\vec{E} = \vec{\epsilon}_0 E_0 e^{ik\hat{n}_0\cdot\vec{x}-i\omega t}$، از یک هدف کوچک تا اولین جملات غیرصفر به‌صورت $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4}{(4\pi\varepsilon_0 E_0)^2}\left|\vec{\epsilon}^*\cdot\vec{p} + \frac{1}{c}(\hat{n}\times\vec{\epsilon}^*)\cdot\vec{m}\right|^2$ است که $\vec{\epsilon}_0$، $\hat{n}_0$، $\hat{n}$ و $\vec{\epsilon}$ به‌ترتیب راستای انتشار و قطبش موج فرودی و موج پراکنده شده می‌باشد. همچنین $\vec{p}$ و $\vec{m}$ بردار گشتاور دوقطبی الکتریکی و مغناطیسی القایی هدف است. برای یک کره دی‌الکتریک غیرمغناطیسی کوچک به شعاع a و ثابت دی‌الکتریک K داریم $\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{K-1}{K+2}\right)a^3\vec{E}$. سطح مقطع پراکندگی کل کدام است؟

۱) $\frac{2\pi}{3}k^4a^6\left(\frac{K-1}{K+2}\right)^2$

۲) $2\pi k^4a^6\left(\frac{K-1}{K+2}\right)^2$

۳) $\frac{4\pi}{3}k^4a^6\left(\frac{K-1}{K+2}\right)^2$

۴) $\frac{8\pi}{3}k^4a^6\left(\frac{K-1}{K+2}\right)^2$

۳۱- در دمای $T \geq T_\circ$ رابطه فشار و حجم یک گاز غیر ایده‌آل به‌شکل $P = P_\circ \operatorname{Ln}\frac{V}{V_\circ}$ است که $V_\circ$ و $P_\circ$ حجم و فشار گاز در دمای $T_\circ$ هستند. اگر ضریب‌های $\beta_\circ = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ و $K_\circ = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ ثابت باشند، در دمای $T > T_\circ$ رابطه فشار و دما کدام است؟

۱) $P = P_\circ + \frac{\beta_\circ}{K_\circ}(T - T_\circ)$

۲) $P = P_\circ + \frac{2\beta_\circ P_\circ}{K_\circ P_\circ + 1}(T - T_\circ)$

۳) $P = P_\circ + 2\frac{\beta_\circ}{K_\circ}(T - T_\circ)$

۴) $P = P_\circ + \frac{\beta_\circ P_\circ}{K_\circ P_\circ + 1}(T - T_\circ)$

۳۲- نیروی کشش یک فنر به‌صورت $F(X,T) = C_\circ T^2 (X - X_\circ)$ تابع دمای T و مقدار کشیدگی فنر نسبت به طول عادی آن، $X - X_\circ$، است. اگر ظرفیت گرمایی فنر در طول ثابت در حالت کشیده نشده $X = X_\circ$ برابر $3C_\circ T X_\circ^2$ باشد، ظرفیت گرمایی در طول ثابت و درحالت کشیده شده $X \neq X_\circ$ کدام است؟

۱) $C_\circ T(2X_\circ^2 + 2XX_\circ - X^2)$

۲) $C_\circ T(X_\circ^2 + XX_\circ + X^2)$

۳) $C_\circ T(X^2 - 2XX_\circ + 4X_\circ^2)$

۴) $C_\circ T(2X^2 - XX_\circ + 2X_\circ^2)$

۳۳- تابع پارش یک ذره به جرم m در یک چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی به عرض L در دمای T به‌صورت $Z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\theta}{T}n^2}$ است که $\theta = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2 k_B}$. گرمای ویژه در حجم ثابت این دستگاه در حد دماهای پایین $T \ll \theta$ کدام است؟

۱) $3k_B\left(\frac{\theta}{T}\right)e^{-3\theta/T}$

۲) $4k_B\left(\frac{\theta}{T}\right)^2 e^{-2\theta/T}$

۳) $9k_B\left(\frac{\theta}{T}\right)^2 e^{-3\theta/T}$

۴) $2k_B\left(\frac{\theta}{T}\right)e^{-2\theta/T}$

۳۴- تابع پارش یک سیستم متشکل از N ذره در حجم V و دمای T در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$Z(T,V,N)=\alpha^{\frac{3N}{m}-\frac{3N}{2}}Z(\alpha T,\alpha^{\frac{-3}{m}}V,N)$$

که درآن α و m مقادیر ثابت مثبتی هستند. کدام رابطه درست است؟

۱) $\frac{m}{3N}T\left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_{V,N}=\frac{2}{3N}V\left(\frac{\partial Z}{\partial V}\right)_{T,N}$

۲) $T\left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_{V,N}-\frac{3V}{m}\left(\frac{\partial Z}{\partial V}\right)_{T,N}=3N\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m}\right)Z$

۳) $T\left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_{V,N}=3N\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m}\right)V\left(\frac{\partial Z}{\partial V}\right)_{T,N}$

۴) $\left(-\frac{3N}{m}\right)T\left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_{V,N}+\frac{2V}{m}\left(\frac{\partial Z}{\partial V}\right)_{T,N}=3NZ$

۳۵- تعداد N نوسانگر هماهنگ یک بعدی یکسان کوانتومی با بسامد زاویه‌ای ω_0 در دمای T را درنظر بگیرید. اگر $k_BT \gg \hbar\omega_0$ باشد و ذرات برهمکنشی با یکدیگر نداشته باشند، انرژی متوسط این مجموعه کدام است؟

۱) $Nk_BT\left[1+\frac{1}{12}\left(\frac{\hbar\omega_0}{k_BT}\right)^2\right]$

۲) $Nk_BT\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\hbar\omega_0}{k_BT}\right)\right]$

۳) $Nk_BT\left[1-\frac{1}{12}\left(\frac{\hbar\omega_0}{k_BT}\right)^2\right]$

۴) $Nk_BT\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{\hbar\omega_0}{k_BT}\right)\right]$

۳۶- یک گاز ایده‌آل کلاسیک متشکل از N مولکول دواتمی که هر یک ممان دوقطبی الکتریکی P_0 دارند ظرفی به حجم V را اشغال کرده‌اند. این گاز در یک میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}_0$ قرار دارد. با چشم پوشی از برهمکنش میان مولکول‌ها، قطبش الکتریکی این گاز در دمای T کدام است؟ $(\beta=\frac{1}{k_BT})$

۱) $\frac{NP_0}{V}\left[\cosh(\beta E_0P_0)-\frac{1}{\beta E_0P_0}\right]$

۲) $\frac{NP_0}{V}\left[\coth(\beta E_0P_0)+\frac{1}{\beta E_0P_0}\right]$

۳) $\frac{NP_0}{V}\left[\cosh(\beta E_0P_0)+\frac{1}{\beta E_0P_0}\right]$

۴) $\frac{NP_0}{V}\left[\coth(\beta E_0P_0)-\frac{1}{\beta E_0P_0}\right]$

۳۷- معادله حالت یک گاز تک اتمی متشکل از N اتم و چگالی تعداد n $(n=\frac{N}{V})$ در دمای T به‌شکل $P=k_B T\sum_{j=1}^{\infty}B_j(T)\,n^j$ است. باتوجه به این که در حد $n\to 0$ گاز ایده‌آل است، مقدار کمیت ($F-F_{\text{گاز ایده‌آل}}$) کدام است؟ (F انرژی آزاد هلمهولتز گاز است.)

۱) $Nk_BT\sum_{j=1}^{\infty} j\,B_{j-1}(T)n^j$

۲) $Nk_BT\sum_{j=1}^{\infty} B_{j+1}(T)n^j$

۳) $Nk_BT\sum_{j=1}^{\infty} B_{j-1}(T)\frac{n^j}{j}$

۴) $Nk_BT\sum_{j=1}^{\infty} B_{j-1}(T)n^j$

۳۸- معادله منحنی تبخیر آمونیاک در نزدیکی نقطهٔ سه‌گانه به‌صورت $\ln\frac{P}{P_0}=24-\frac{3000}{T}$ می‌باشد که T برحسب کلوین است. گرمای نهان تبخیر در نزدیکی نقطهٔ سه‌گانه چند $\frac{kJ}{mol}$ است؟ $\left(R=8/3\frac{J}{K.mol}\right)$

۱) ۲۵

۲) ۳۰

۳) ۷۵

۴) ۹۰

۳۹- احتمال این‌که دو ذره یکسان بدون برهم‌کنش هر یک به جرم m که از تابع توزیع ماکسولی سرعت‌ها پیروی می‌کنند، یکی سرعتی بین $\vec{V_1}$ و $\vec{V_1}+d\vec{V_1}$ و دیگری سرعتی بین $\vec{V_2}$ و $\vec{V_2}+d\vec{V_2}$ داشته باشند به شکل

$$P(\vec{V}_1,\ \vec{V}_2)d^3V_1d^3V_2=\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^3 e^{-\frac{1}{2k_BT}\left(mV_1^2+mV_2^2\right)}d^3V_1d^3V_2$$

است. اگر $\vec{V}=\vec{V_1}-\vec{V_2}$ بردار سرعت نسبی دو ذره باشد، مقدار متوسط $\langle V\rangle$ چقدر است؟ $(V=|\vec{V}|)$

۱) $\sqrt{\frac{4k_BT}{\pi m}}$

۲) $\sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{k_BT}{m}}$

۳) $\sqrt{\frac{16}{\pi}\frac{k_BT}{m}}$

۴) $\sqrt{\frac{32}{\pi}\frac{k_BT}{m}}$

۴۰- یک دستگاه ترمودینامیکی شامل دو ذره در تعادل گرمایی با منبعی به دمای T در نظر بگیرید. هر ذره ممکن است در یکی از سه حالت انرژی ۰، ∈ و ۲∈ باشد. اگر ذرات یکسان ولی تمیزپذیر باشند، تابع پارش این دستگاه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}+e^{\frac{-\epsilon}{KT}}+e^{\frac{-۲\epsilon}{KT}}+\frac{۱}{۲}e^{\frac{-۳\epsilon}{KT}}+e^{\frac{-۴\epsilon}{KT}}$

۲) $\frac{۱}{۲}+e^{\frac{-\epsilon}{KT}}+\frac{۳}{۲}e^{\frac{-۲\epsilon}{KT}}+e^{\frac{-۳\epsilon}{KT}}+\frac{۱}{۲}e^{\frac{-۴\epsilon}{KT}}$

۳) $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}e^{\frac{-\epsilon}{KT}}+\frac{۳}{۲}e^{\frac{-۲\epsilon}{KT}}+\frac{۱}{۲}e^{\frac{-۳\epsilon}{KT}}+\frac{۱}{۲}e^{\frac{-۴\epsilon}{KT}}$

۴) $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}e^{\frac{-\epsilon}{KT}}+e^{\frac{-۲\epsilon}{KT}}+\frac{۱}{۲}e^{\frac{-۳\epsilon}{KT}}+e^{\frac{-۴\epsilon}{KT}}$

۴۱- در دمای $۱۰۰۰K$ تراز انرژی ∈ الکترون‌های اتم مس با احتمال ۰/۸ اشغال شده است. اگر $\epsilon_F=۷/۰۰eV$ باشد، مقدار ∈ بر حسب eV کدام است؟ (ثابت بولتزمن $k_B=۱/۳۸\times۱۰^{-۲۳}\,J/K$ و $\ln ۲\approx ۰/۶۹$ است.)

۱) ۷/۶۹

۲) ۷/۱۲

۳) ۶/۸۸

۴) ۶/۳۱

۴۲- دمای فرمی یک گاز الکترونی کاملاً تبهگن دو بعدی غیر نسبیتی متشکل از ذرات بدون برهم‌کنش، هر یک به جرم m، برحسب n تعداد ذرات در واحد سطح چقدر است؟

۱) $\frac{۲\pi h^۲}{m k_B}n$

۲) $\frac{\pi\hbar^۲}{m k_B}n$

۳) $\frac{۴\pi h^۲}{m k_B}n$

۴) $\frac{\pi\hbar^۲}{۲m k_B}n$

۴۳- الکترون‌های رسانش درون یک تیغه فلزی نازک در دماهای نزدیک صفر مطلق تشکیل یک گاز الکترونی کاملاً تبهگن غیرنسبیتی دو بعدی می‌دهند. میانگین انرژی جنبشی هر الکترون (به جرم m_e) برحسب n تعداد الکترون‌ها در واحد سطح چقدر است؟

۱) $\frac{6\pi\hbar^2 n}{5m_e}$

۲) $\frac{\pi\hbar^2 n}{m_e}$

۳) $\frac{\pi\hbar^2 n}{4m_e}$

۴) $\frac{\pi\hbar^2 n}{2m_e}$

۴۴- در مدل دبای، انرژی داخلی یک جامد متشکل از N اتم که حول حالت تعادل خود در دمای T نوسان می‌کنند به شکل $U = \frac{9}{8}N\hbar\omega_D + 3N k_B T f(x_D)$ است که $x_D = \frac{\hbar\omega_D}{k_B T}$ و $f(x_D) = \frac{3}{x_D^3}\int_0^{x_D}\frac{x^3 dx}{e^x - 1}$ است. ظرفیت گرمایی در حجم ثابت جامد کدام است؟

۱) $3Nk_B f(x_D)\left(1 - x_D\frac{\partial f(x_D)}{\partial x_D}\right)$

۲) $3Nk_B f(x_D)\left(1 - x_D\frac{\partial \ln f(x_D)}{\partial x_D}\right)$

۳) $3Nk_B f(x_D)\left(1 - \frac{x_D\hbar\omega_D}{k_B T}\frac{\partial f(x_D)}{\partial x_D}\right)$

۴) $3Nk_B f(x_D)\left(1 - \frac{x_D\hbar\omega_D}{k_B T}\frac{\partial \ln f(x_D)}{\partial x_D}\right)$

۴۵- معادله حالت گاز دیتریچی به شکل $P(v-b) = RT\, e^{-\frac{a}{vRT}}$ است که P فشار، v حجم ویژه مولی (برای n مول $v = \frac{V}{n}$)، T دما، R ثابت جهانی گازها و a و b ضرایب ثابتی هستند. در نزدیکی دمای بحرانی T_c ضریب تراکم‌پذیری هم دما به‌صورت $\kappa_T \sim |\epsilon|^{\gamma}$ رفتار می‌کند که $\epsilon = \frac{T}{T_c} - 1$ است، مقدار γ چقدر است؟ (اگر (T_c, v_c, P_c) مختصات نقطهٔ بحرانی باشد $v_c = 2b$، $T_c = \frac{a}{4bR}$ و $P_c = \frac{a}{4b^2e^2}$)

۱) ۱

۲) ۲

۳) −۲

۴) −۱