

با توجه به جوابگویی سریع احتمال خطا وجود دارد، از دوستان خواهشمند است هر اشتباهی را با اینجانب در میان بگذارید.

پاسخ سوالات ریاضی ۲ - حسابان - دیفرانسیل

۱۰۱- جملات دنباله‌ی ... ۲/۳۹, ۲/۳۹۹, ۲/۳۹۹۹, ... به یک عدد ثابت و گویا بسیار نزدیک می‌شود. جمله‌ی دهم دنباله‌ی تفاضل آن‌ها از این عدد ثابت کدام است؟

(۱) 10^{-11} (۲) 10^{-10} (۳) 10^{-9} (۴) 2×10^{-10}

۱۰۱- گزینه ۱ کاملاً مشخص است که جملات به $2/4$ نزدیک می‌شوند، داریم:
 $2/4 - 2/39 \dots 9 = 10^{-11}$ تا 10

۱۰۲- تابع $f(x) = \log_3(ax+b)$ فقط برای مقادیر $x \in (-\frac{1}{3}, +\infty)$ با معنی است. اگر $f(4) = 2$ باشد، آن‌گاه $f(-\frac{4}{9})$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۱۰۲- گزینه ۱ $ax+b > 0 \rightarrow x > -\frac{b}{a} \xrightarrow{x > -\frac{1}{2}} -\frac{b}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b$ دامنه

$f(4) = 2 \Rightarrow \log_3 2b(4) + b = 2 \rightarrow 9b = 9 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 2$; $f(-\frac{4}{9}) = \log_3 2(-\frac{4}{9}) + 1 = \log_3 \frac{1}{9} = -2$

۱۰۳- مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد، برابر $24\sqrt{5}$ واحد مربع است. بزرگ‌ترین ضلع این مثلث کدام است؟

(۱) ۲۱ (۲) ۲۲ (۳) ۲۳ (۴) ۲۴

۱۰۳- گزینه ۳ چون بزرگترین ضلع را می‌خواهد پس زاویه را منفرجه و کسینوس را منفی در نظر می‌گیریم.

$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha \Rightarrow 24\sqrt{5} = \frac{1}{2} (9)(16) \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{2}{3}$

ها کسینوسها $c^2 = 16^2 + 9^2 - 2(16)(9)(-\frac{2}{3}) \rightarrow c = 23$

۱۰۴- با ارقام ۱, ۲, ۳, ..., ۹ به چند طریق می‌توان یک عدد پنج رقمی ساخت، به طوری که درست ۲ رقم آن زوج باشد؟

(۱) ۶۴۰۰ (۲) ۷۲۰۰ (۳) ۸۴۰۰ (۴) ۹۶۰۰

$\binom{4}{2} \binom{5}{3} \times 5! = 6 \times 10 \times 120 = 7200$

۱۰۴- گزینه ۲

۱۰۵- تعداد جملات یک دنباله‌ی هندسی عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدر نسبت آن کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۰۵- گزینه ۳ اگر $n = 2k$ و در جملات فرد $q' = q^2$ و $n' = k$ فرض شود، داریم:

$3 \times \frac{a_1(1-q'^{n'})}{1-q'^2} = \frac{a_1(1-q^{2k})}{1-q} \Rightarrow 3 \times \frac{(1-q^{2k})}{1-q^2} = \frac{(1-q^{2k})}{1-q} \rightarrow \frac{3}{1+q} = 1 \Rightarrow q = 2$

۱۰۶- به ازای مقداری از a چند جمله‌ای $f(x) = x^3 + ax^2 - 8x$ بر $x+2$ بخش پذیر است. کوچک ترین ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 0$ کدام است؟

- (۱) $1 - \sqrt{3}$ (۲) $1 - \sqrt{5}$ (۳) $-1 - \sqrt{3}$ (۴) $-1 - \sqrt{5}$

۱۰۶- گزینه ۲ $f(x) = x^3 + ax^2 - 8x \Rightarrow f(-2) = 0 \Rightarrow 16 - 8a + 16 = 0 \Rightarrow a = 4$

از عبارت فاکتور گرفته، و سپس آن را بر $x+2$ تقسیم می‌کنیم، داریم: $x^3 + 4x^2 - 8x = x(x^2 + 4x - 8) = x(x+2)(x^2 + 2x - 4)$ که با حل معادله درجه دوم $(x^2 + 2x - 2)$ از روش دلتا به جواب $-1 - \sqrt{5}$ می‌رسیم.

۱۰۷- حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) 1 (۳) 2 (۴) 4

۱۰۷- گزینه ۲

غ ق ق $x^2 + 4x = a \Rightarrow a + 3 = \sqrt{a + 5} \Rightarrow a^2 + 6a + 9 = a + 5 \Rightarrow a^2 + 5a + 4 = 0 \Rightarrow a = -1, a = -4$

$$x^2 + 4x = -1 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1$$

۱۰۸- نمودار تابع $y = |2x - 6| - |x + 4| + x$ در یک بازه اکیداً نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است؟

- (۱) $-x + 6; x < -4$ (۲) $-x + 5; x > 2$ (۳) $-\frac{1}{2}x + 1; -4 < x < 3$ (۴) $-\frac{1}{2}x + 1; -4 < x < 10$

۱۰۸- گزینه ۴ ریشه درون قدرمطلق اول ۳، و برای دومی -4 است. این تابع در هر بازه مشخص یک خط است. از این رو کافی است که

فقط شیب بررسی کنیم: $x < -4 \rightarrow (-2) + 1 + 1 = 0 \rightarrow$ تابع ثابت

نزولی اکید $-4 < x < 3 \rightarrow (-2) + (-1) + 1 = -2 \rightarrow$ صعودی اکید $3 < x \rightarrow (2) + (-1) + 1 = 2 \rightarrow$ صعودی اکید

پس برای بازه $-4 < x < 3$ داریم: $-4 < x < 3 \Rightarrow y = -2x + 6 - x - 4 + x = -2x + 2$

چون برد تابع، دامنه‌ی تابع وارون است داریم: $-4 < y < 10 \rightarrow -2x + 2 > 4 \rightarrow -2x > 2 \rightarrow x < -1$ و $-4 < y < 10 \rightarrow -2x + 2 < 4 \rightarrow -2x < 2 \rightarrow x > -1$

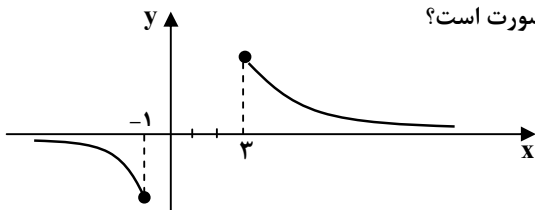
۱۰۹- جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin x + \sin 2x}{\cos x + \cos 2x} = \cot x$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{5}$ (۲) $\frac{2k\pi}{5}$ (۳) $\frac{3k\pi}{5}$ (۴) $\frac{1}{5}(2k+1)\pi$

۱۰۹- گزینه ۴

$$\frac{\sin x + \sin 2x}{\cos x + \cos 2x} = \cot x \Rightarrow \frac{2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \cot x \Rightarrow \tan \frac{3x}{2} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \Rightarrow \frac{3x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow x = \frac{1}{5}(2k+1)\pi$$

۱۱۰- شکل روبه رو، نمودار $y = \sin^{-1}(U(x))$ تابع است. ضابطه‌ی $U(x)$ ، به کدام صورت است؟



- (۱) $\frac{2}{x-1}$ (۲) $\frac{2}{1-x}$ (۳) $\frac{1}{x-2}$ (۴) $\frac{1}{2-x}$

۱۱۰- گزینه ۱

طبق شکل تابع نزولی است، و اگر $y = \sin^{-1}(U(x))$ نزولی باشد باید $U(x)$ نزولی باشد. در نتیجه گزینه‌های ۲ و ۴ حذف می‌شوند.

اگر در گزینه ۳، عدد ۱ را قرار دهیم عدد -1 را می‌دهد که در دامنه قرار دارد، در حالی که در نمودار نقطه ۱ تعریف نشده است، پس

گزینه ۱ صحیح است.

۱۱۱- حاصل عبارت $(\sin^{-1}(-\frac{5}{13})) \sin(2 \cos^{-1}(-\frac{5}{13}))$ ، کدام است؟

۱۲۰ (۴)

-۶۰ (۳)

۶۰ (۲)

-۱۲۰ (۱)

-۱۱۱- گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{\cos x}}{x^2}$$

$$169 \sin(2 \cos^{-1}(-\frac{5}{13})) \rightarrow \cos \alpha = -\frac{5}{13} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{12}{13}; \quad 169 \sin 2\alpha = 169(2 \sin \alpha \times \cos \alpha) = 169 \times 2 \times \frac{12}{13} \times -\frac{5}{13} = -120$$

۱۱۲- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a(1 + \sqrt[3]{1-x}) & ; x > 2 \\ x^2 - 2x & ; x \leq 2 \end{cases}$ همواره پیوسته است؟

۳/۲ (۴)

۲/۴ (۳)

۱/۶ (۲)

۱/۲ (۱)

-۱۱۲- گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(1 + \sqrt[3]{1-x})}{x^2 - 2x} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a \times \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}}{2x - 2} = \frac{-a}{3} = \frac{-a}{6}; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 - a$$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Rightarrow 2 - a = -\frac{a}{6} \Rightarrow a = \frac{12}{5} = 2.4$$

۱۱۳ حد دنباله $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n+2}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ ، کدام است؟

۳e^۲ (۴)

۲e (۳)

e^۲ (۲)

۲e (۱)

-۱۱۳- گزینه ۲

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{(a_n - 1)b_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) - (n+1)}{n+1} (2n+2)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{n+1}} = e^2$$

۱۱۴- حاصل $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1+x^2}}$ ، کدام است؟؟ (نماد [] به مفهوم جزء صحیح است)

حد ندارد (۴)

صفر (۳)

۳ (۲)

-۳ (۱)

-۱۱۴- گزینه ۱

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1+x^2}} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\frac{3x^2}{2}(1 + \sqrt{1+x^2})}{1 - (1+x^2)} = -3$$

۱۱۵- یکی از ریشه‌های حقیقی معادله $x^3 + 2x^2 - 4x - 3 = 0$ در کدام بازه است؟

(0, 1/4) (۴)

(-1/4, 0) (۳)

(-1, -3/4) (۲)

(-3/4, -1/2) (۱)

-۱۱۵- گزینه ۱

با استفاده از قضیه بولتزانو داریم: $f(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + 2 - 3 < 0$, $f(-\frac{3}{4}) = -\frac{27}{64} + \frac{18}{16} + 3 - 3 > 0 \Rightarrow f(-\frac{1}{4}) \times f(-\frac{3}{4}) < 0$

۱۱۶- امتداد مجانب‌های نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}$ ، نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. اندازه AB کدام است؟

$$4\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$2\sqrt{5} \quad (۳)$$

$$۴ \quad (۲)$$

$$2\sqrt{2} \quad (۱)$$

۱۱۶- گزینه ۴

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} |x+1| - |x-1| = \begin{cases} x \rightarrow +\infty \rightarrow x+1-x+1=2 \rightarrow A \begin{cases} 2 \\ 2 \end{cases} \\ x \rightarrow -\infty \rightarrow -x-1+x-1=-2 \rightarrow B \begin{cases} -2 \\ -2 \end{cases} \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

۱۱۷- اگر θ زاویه‌ی بین مماس چپ و مماس راست، نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [x + \frac{1}{x}]x + x^2$ ، در نقطه‌ی $x = \frac{1}{3}$ باشد، $\tan \theta$ کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

۱۱۷- گزینه ۲ بیوستگی چپ برای تابع در نقطه‌ی $x = \frac{1}{3}$ برقرار نیست، پس مشتق پذیر نیست. ولی با فرض فقط محاسبه خطوط نیم مماس

$$f_+(\frac{1}{3}) = x + x^2 \Rightarrow f'_+(\frac{1}{3}) = 1 + 2x = 2 = m \quad ; \quad f_-(\frac{1}{3}) = x^2 \Rightarrow f'_-(\frac{1}{3}) = 2x = 1 = m'$$

داریم:

$$\tan \theta = \frac{m - m'}{1 + mm'} = \frac{2 - 1}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

۱۱۸- از رابطه‌ی $x^2y - y^2 - 2\sqrt{x} + 4 = 0$ ، مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطه‌ی (۱, ۲) کدام است؟ مشتق

$$\frac{13}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{11}{6} \quad (۳)$$

$$\frac{8}{6} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{6} \quad (۱)$$

$$x^2y - y^2 - 2\sqrt{x} + 4 \stackrel{\text{مشتق}}{=} 0 \rightarrow 2xy + x^2y' - 2yy' - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \xrightarrow{(1,2)} 4 + y' - 4y' - 1 = 0 \rightarrow y' = 1$$

۱۱۸- گزینه ۴

$$2xy + x^2y' - 2yy' - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \rightarrow 2(y + y'x) + 2xy' + x^2y'' - 2(y'y' + y''y') + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = 0 \xrightarrow{(1,2)} 2(2+1) + 2 + y'' - 2(1+2y'') - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow y'' = \frac{13}{6}$$

$$2(2+1) + 2 + y'' - 2(1+2y'') - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow y'' = \frac{13}{6}$$

۱۱۹- اگر $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$ باشد، معادله‌ی خط قائم بر منحنی تابع f^{-1} ، در نقطه‌ی $x = 2$ واقع بر آن کدام است؟

$$3y - x = 1 \quad (۴)$$

$$3y + x = 5 \quad (۳)$$

$$y - 3x = -5 \quad (۲)$$

$$y + 3x = 7 \quad (۱)$$

۱۱۹- گزینه ۱

$$\left. \begin{matrix} 2 \\ a \end{matrix} \right\} \in f^{-1} \Rightarrow \left. \begin{matrix} a \\ 2 \end{matrix} \right\} \in f \quad ; \quad a^3 - a^2 + 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \rightarrow \left. \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \in f \quad ; \quad f' = 3x^2 - 2x + 2 \rightarrow f'(1) = 3$$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3} = m \rightarrow m' = -3 \quad , \quad \left. \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \in f^{-1} \Rightarrow \left. \begin{matrix} y \\ 1 \end{matrix} \right\} \in f \Rightarrow y = -3x + 7 \rightarrow y + 3x = 7$$

۱۲۰- نمودار تابع $y = |x|e^{-x}$ ، در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به پایین است؟

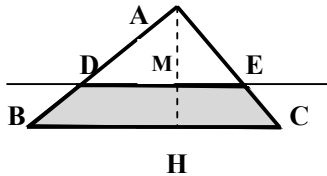
- (۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(0, 1)$ (۳) $(1, 2)$ (۴) $(2, +\infty)$

۱۲۰- گزینه ۳

$$y = |x|e^{-x} = \begin{cases} xe^{-x} & ; x \geq 0 \\ -xe^{-x} & ; x < 0 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} (1-x)e^{-x} & ; x > 0 \\ (-1+x)e^{-x} & ; x < 0 \end{cases} \rightarrow R - (0,1) \Leftrightarrow \text{نزولی (1)}$$

$$y'' = \begin{cases} (-1-1+x)e^{-x} & ; x > 0 \\ (2-x)e^{-x} & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 2 \Leftrightarrow \text{تقعر رو به پایین (2)} : \text{(1) و (2)} \Rightarrow (1,2)$$

۱۲۱- در مثلث ABC ضلع $BC = 20$ و ارتفاع $AH = 12$ واحد است. خط Δ موازی BC با سرعت ثابت $2/5$ واحد در ثانیه از آن دور می شود.



سرعت افزایش مساحت دوزنقه در لحظه ای که فاصله دو خط موازی ۹ واحد باشد کدام است؟

- (۱) $0/8$ (۲) $0/9$ (۳) 1 (۴) $1/2$

۱۲۱- گزینه ۳

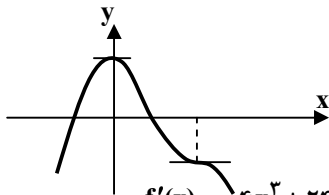
$$\frac{AM}{AH} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{(AM)'}{12} = \frac{(DE)'}{20} \Rightarrow \frac{-0/8}{3} = \frac{(DE)'}{5} \Rightarrow (DE)' = -\frac{1}{3}$$

از رابطه تالس مشتق می گیریم:

$$S \text{ دوزنقه} = \frac{(DE + BC)}{2} \times MH = (10 + \frac{DE}{2}) \times MH \rightarrow S' = \frac{(DE)'}{2} \times MH + (MH)' \times \frac{DE}{2} \Rightarrow S' = (\frac{-1}{6})(9) + \frac{2}{10}(10 + \frac{5}{2}) = 1$$

۱۲۲- شکل روبه رو، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -x^4 + 8x^3 + ax^2 + b$ است. a کدام است؟

- (۱) -18 (۲) -15 (۳) -12 (۴) -9



$$\text{عطف } f'(0) = 0, f'(a) = 0, x = a$$

۱۲۲- گزینه ۱

چون در عطف شیب صفر است، پس تابع مشتق ریشه مضاعف دارد $f'(x) = -4x^3 + 24x^2 + 2ax = -2x(x^2 - 12x - 2a)$

$$x^2 - 12x - 2a = (x - 6)^2 \rightarrow -2a = 36 \Rightarrow a = -18$$

۱۲۳- اگر $G(x) = x^2 \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\ln(t+2)}{t^2} dt$ باشد، $G'(4)$ چند برابر $\ln 2$ است؟

- (۱) 1 (۲) $1/5$ (۳) 2 (۴) 3

$$G'(x) = x^2 \left(\frac{\ln \sqrt{x} + 2}{x} \right) \frac{1}{2\sqrt{x}} = 16 \frac{\ln 4}{4} \times \frac{1}{4} = 2 \ln 2$$

۱۲۳- گزینه ۳ فقط از عامل انتگرال دار مشتق می گیریم:

$$124- \text{حاصل انتگرال } \int_0^4 \left[\frac{x}{2} \right] \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx \text{ کدام است}$$

- (۱) $4 - 2\sqrt{2} - \ln 2$ (۲) $4 - 2\sqrt{2} + \ln 2$ (۳) $2 + \sqrt{2} - \ln 2$ (۴) $2 - \sqrt{2} + \ln 2$

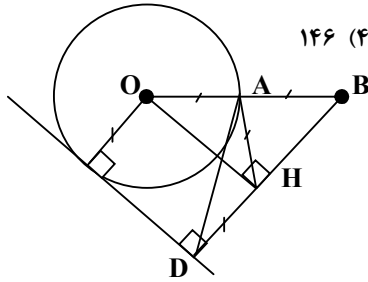
۱۲۴- گزینه ۱

$$\int_0^4 \left[\frac{x}{2} \right] \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx = \int_0^2 0 dx + \int_2^4 \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx = \int_2^4 \left(x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x} \right) dx = (2\sqrt{x} - \ln x) \Big|_2^4 = 4 - \ln 4 - (2\sqrt{2} - \ln 2) = 4 - 2\sqrt{2} - \ln 2$$

پاسخ سوالات هندسه ۱ - هندسه ۲ - هندسه تحلیلی

۱۲۵- در یک دایره به مرکز O، شعاع OA را به اندازه‌ی خود تا نقطه B امتداد می‌دهیم. از نقطه B بر مماس دل خواه دایره عمود BD را فرود

می‌آوریم. اگر $\widehat{ADB} = 34^\circ$ باشد، زاویه‌ی OAD چند درجه است؟



۱۴۶ (۴)

۱۰۲ (۳)

۷۳ (۲)

۶۸ (۱)

۱۲۵- گزینه ۳

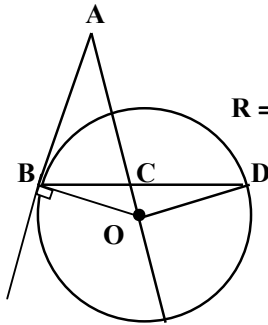
$$\begin{aligned} DH = AH &\Rightarrow \widehat{ADB} = 34^\circ = \widehat{DAH} \rightarrow \widehat{AHD} = 112^\circ \rightarrow \widehat{OHA} = 22^\circ \\ OA = AH &\Rightarrow \widehat{OHA} = \widehat{AOH} = 22^\circ \Rightarrow \widehat{OAH} = 136^\circ \\ \widehat{OAD} &= \widehat{OAH} - \widehat{DAH} = 136 - 34 = 102^\circ \end{aligned}$$

۱۲۶- در مثلث متساوی‌الساقین $(AB = AC)ABC$ ، نقطه‌ی O در امتداد AC مرکز دایره‌ای است که در نقطه‌ی B بر ضلع AB مماس است.

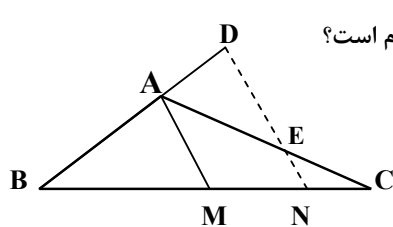
امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است. مثل OCD چگونه است؟

(۱) متساوی‌الساقین (۲) قائم‌الزاویه

(۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین (۴) غیر مشخص



۱۲۶- گزینه ۲ $R = R \rightarrow \widehat{ODC} = \widehat{OBC}$ ، $\widehat{OBC} + \widehat{B} = 90^\circ \rightarrow \widehat{ODC} + \widehat{C} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DOC} = 90^\circ$



۱۲۷- در مثلث $(AB = \frac{2}{3}AC)ABC$ ، پاره خط ND موازی میانه AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟

$\frac{5}{9}$ (۲)

$\frac{4}{9}$ (۱)

$\frac{4}{5}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$$AM \parallel DN \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BM}{MN} \xrightarrow{BM=MC} \frac{\frac{2}{3}AC}{AD} = \frac{MC}{MN} \quad (1) ; \quad EN \parallel AM \Rightarrow \frac{EC}{AE} = \frac{NC}{MN} \quad (2)$$

۱۲۷- گزینه ۳

$$EN \parallel AM \Rightarrow \frac{EC}{AC} = \frac{NC}{MC} ; \quad (2) \rightarrow \frac{EC}{AE} = \frac{MN}{MC} \Rightarrow \frac{AD}{AE} \times \frac{2}{3} \times \frac{EC}{AC} = \frac{NC}{MC} \rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{2}{3}$$

۱۲۸- در مثلث ABC، میانه‌ی AM و نیمساز داخلی AD رسم شده است. کدام نامساوی همواره درست است؟

$AD < AM$ (۴)

$AD < AB$ (۳)

$AM < AB$ (۲)

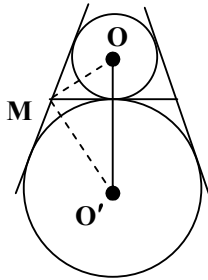
$AM < BC$ (۱)

۱۲۸- گزینه ۴

در هر مثلث نامشخص همواره برای ارتفاع، نیمساز و میانه وارد از یک رأس داریم: $\text{میانه} \leq \text{نیمساز} \leq \text{ارتفاع}$

۱۲۹- دو دایره نامساوی به مرکزهای O و O' مماس خارج اند. دایره ای به قطر OO' ، با مماس مشترک خارجی این دو دایره، کدام وضعیت را دارد؟

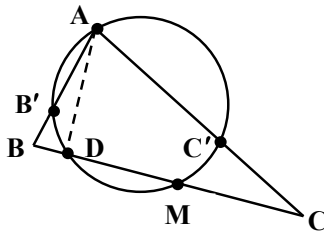
- (۱) متقاطع (۲) مماس (۳) متخارج (۴) نامشخص



۱۲۹- گزینه ۲

چون $\widehat{OMO'} = 90^\circ$ است، پس M روی دایره ای به قطر OO' قرار دارد.

۱۳۰- در مثلث ABC نقطه M وسط ضلع BC و AD نیمساز زاویه A است. دایره ی محیطی مثلث



ADM رسم شده است. نسبت $\frac{BB'}{CC'}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{AB}{AC}$ (۲) $\frac{DB}{DM}$ (۳) $\frac{AB'}{AC'}$ (۴)

۱۳۰- گزینه ۱

$$AD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{CA}{BA} = \frac{CD}{BD}$$

$$\begin{cases} CC' \times CA = CM \times CD \\ BB' \times BA = BD \times BM \end{cases} \xrightarrow{BM=CM} \frac{CC'}{BB'} \times \frac{CA}{BA} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow \frac{CC'}{BB'} = 1$$

۱۳۱- با استفاده از کدام تبدیل هندسی، داخل مثلث مفروض می توان مرتباً محاط کرد، که یک ضلع آن بر روی ضلع مثلث و دو رأس دیگر بر روی دو ضلع این مثلث قرار گیرد؟

- (۱) دوران (۲) بازتاب (۳) انتقال (۴) تجانس

۱۳۱- گزینه ۴

۱۳۲- نقطه A در خارج صفحه مثلث BCD است. صفحه گذرا بر A را طوری تعیین کنید، که نقاط D و C و B از آن به یک فاصله باشند. تعداد این نوع صفحات کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۳۲- گزینه ۴ صفحه ای که موازی صفحه BCD است ، و سه صفحه ای که از A و وسط اضلاع بگذرد جواب می باشد.

۱۳۳- نقاط $A(5, -4, 1)$ و $B(-1, 2, 4)$ و $O(0, 0, 0)$ مفروض هستند و $\overline{AM} = \frac{2}{3}\overline{AB}$ ، مقدار $|\overline{OM}|$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{11}$ (۳) $\sqrt{13}$ (۴) $\sqrt{14}$

$$\overline{AM} = \frac{2}{3}\overline{AB} \rightarrow (x_M - 5, y_M + 4, z_M - 1) = \frac{2}{3}(-6, 6, 3) \Rightarrow M = (1, 0, 3) \Rightarrow |\overline{OM}| = \sqrt{10}$$

۱۳۳- گزینه ۱

۱۳۴- فاصله‌ی دو خط به معادلات $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$ و $(x=2y+1, z=-y+2)$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{6}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{2}$

۱۳۴- گزینه ۲
 $D: (x=2y+1, z=-y+2) \Rightarrow \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow \vec{u} = (2, 1, -1)$, $A(1, 0, 2) \in D$

$D': \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$, $B(1, -2, 0) \in D'$, $D \parallel D'$, $\overline{AB} = (0, -2, -2)$

$\overline{AB} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (4, -4, 4)$; $HH' = \frac{|\overline{AB} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{2}$

۱۳۵- صفحه‌ی گذرنده بر خط به معادله‌ی $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-1}$ و نقطه $(0, 3, 0)$ ، محور Z ها را با کدام ارتفاع قطع می‌کند؟

(۱) -2 (۲) -3 (۳) 2 (۴) 3

۱۳۵- گزینه ۴
 $A(-1, 0, 2)$; $B(0, 3, 0)$, $\overline{AB} = (1, 3, -2)$; $\vec{n} = \overline{AB} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (3, 3, -3)$

$P: 3x + 3y + 3z = 9 \rightarrow x + y + z = 3 \xrightarrow[\substack{x=0 \\ y=0}]{z=3}$

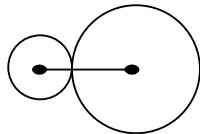
۱۳۶- دو دایره C و C' در نقطه $(0, 1)$ مماس برون‌ی هم هستند. اگر قائم‌های بر دایره C همواره از نقطه‌ی $(2, -3)$ بگذرد، مرکز دایره C' با شعاع $\sqrt{5}$ کدام است؟

(۱) $(-1, 3)$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(1, -2)$ (۴) $(1, -1)$

۱۳۶- گزینه ۱
 نقطه‌ی $O(2, -3)$ مرکز دایره‌ی C است. فاصله‌ی $A(0, 1)$ تا برابر شعاع C است.

$OA = R = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$ $OO' = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

در گزینه‌ها فقط گزینه ۱ است که $OO' = 3\sqrt{5}$ را می‌دهد.



۱۳۷- سهمی به کانون $F(3, 2)$ و خط هادی به معادله‌ی $x = -1$ ، محور x ها را در نقطه‌ی A قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی A تا کانون سهمی کدام است؟

(۱) $2/25$ (۲) $2/5$ (۳) $2/75$ (۴) 3

۱۳۷- گزینه ۲
 چون خط هادی $x = -1$ است، پس سهمی افقی است پس: $F(3, 2) = F(\alpha + p, \beta) \Rightarrow \alpha + p = 3, \beta = 2$

$x = -1 = \alpha - p$, $\alpha + p = 3 \rightarrow \alpha = 1, p = 2 \Rightarrow (y-2)^2 = 4(2)(x-1) \xrightarrow{y=0} x_A = \frac{3}{2} \Rightarrow AF = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = 2/5$

۱۳۸- ماتریس دوران A ، با رابطه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ معادله‌ی مقطع مخروطی $12 = 24xy - 2y^2 + \Delta x^2$ را به صورت استاندارد بر حسب x' و y' تبدیل می‌کند. تانژانت زاویه دوران کدام است؟

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۱۳۸- گزینه ۲
 $\tan 2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{24}{5 - (-2)} = \frac{24}{7}$, $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{24}{7} \rightarrow 12 \tan^2 \theta + 7 \tan \theta - 12 = 0 \rightarrow \tan \theta = \frac{3}{4}$

۱۳۹- اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ و $B = [b_{ij}]_{4 \times 3}$ باشند، کدام ضرب ماتریس‌ها تعریف شده است؟

AB^t (۴)

$B^t A^t$ (۳)

$A^t B$ (۲)

AB (۱)

۱۳۹- گزینه ۴ باید تعداد ستون ماتریس اول با تعداد سطر ماتریس دوم برابر باشد، که فقط در گزینه ۴ امکان پذیر است.

$$(A \rightarrow 2 \times 3 ; B^t \rightarrow 3 \times 4) \Rightarrow AB^t \rightarrow 2 \times 4$$

۱۴۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A^{-1} کدام است؟

صفر (۴)

۱ (۳)

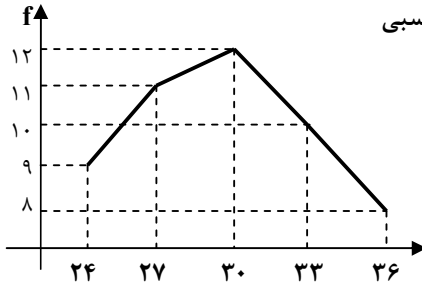
 $\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۱)

۱۴۰- گزینه ۳

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-(-1)}{1 \times 2} & \frac{1-4}{1 \times 2 \times 3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-(-1)}{2 \times 3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1$$

سایت کنکور

پاسخ سوالات آمار - جبر و احتمال - ریاضیات گسسته



۱۴۱- به داده‌های آماری با نمودار چندبر، رو به رو، دو داده ۲۹ و ۳۲ افزوده شود، درصد فراوانی نسبی

در دسته وسط جدید کدام است؟

۲۳ (۱) ۲۴ (۲)

۲۵ (۳) ۲۶ (۴)

۱۴۱- گزینه ۳ تعداد داده‌ها ۵۰ است.

طول دسته‌ها برابر ۳ است. پس ۲۹ در دسته وسط قرار می‌گیرد و یک عضو به فراوانی آن اضافه می‌شود. داریم:

$$\frac{12+1}{50+2} \times 100 = \frac{13}{52} \times 100 = 25$$

(حدود دسته وسط: (۲۸/۵, ۳۱/۵))

۱۴۲- اگر میانگین داده‌های دسته‌بندی شده، برابر ۱۶ باشد، با تعیین فراوانی دسته‌ی چهارم مقدار واریانس کدام است؟

نماینده دسته	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
فراوانی	۵	۷	۱۰	a	۳

۴/۹۲ (۲)

۴/۸۵ (۱)

۵/۷۴ (۴)

۵/۵۵ (۳)

۱۴۲- گزینه ۳

$$\bar{x} - 16 = 16 - 16 = \frac{(-4) \times 5 + (-2) \times 7 + 0 + (2) \times a + (4) \times 3}{25 + a} \Rightarrow a = 11$$

$$\sigma^2 = \frac{(-4-0)^2 \times 5 + (-2-0)^2 \times 7 + 0 + (2-0)^2 \times 11 + (4-0)^2 \times 3}{25 + 11} = \frac{200}{36} = 5/55$$

$$\sigma^2_A = \frac{1+4+1+0+1+9}{6} = \frac{8}{3}, \sigma^2_B = \frac{0+4+1+4+1+4}{6} = \frac{7}{3}$$

واریانس B کمتر است، پس دقیق‌تر است.

۱۴۳- در اثبات نامساوی $n! > 2^{n+1}$ ، به روش استقرای تعمیم یافته، عدد مناسب، و رابطه‌ی بدیهی در گام بعدی حکم، برای $k \geq m$ کدام است؟

$$k+1 > 2 \text{ و } m=6 \text{ (۲)}$$

$$k+1 > 2 \text{ و } m=5 \text{ (۱)}$$

$$(2k+1) > 4 \text{ و } m=6 \text{ (۴)}$$

$$(2k+1) > 4 \text{ و } m=5 \text{ (۳)}$$

۱۴۳- گزینه ۱ به ازای $m=5$ درست است: $n! > 2^{n+1} \xrightarrow{n=5} 120 > 64$ ؛ $P(k): k! > 2^{k+1}$ ؛ $P(k+1): (k+1)! > 2^{k+2}$ ، $n! > 2^{n+1}$

$$P(k): k! > 2^{k+1} \xrightarrow{\times(k+1)} (k+1)! > (k+1) \times 2^{k+1}$$

$$(k+1) \times 2^{k+1} > 2^{k+2} \Rightarrow (k+1) > 2$$

حال باید ثابت کنیم: $(k+1) \times 2^{k+1} > 2^{k+2}$ که داریم: $(k+1) > 2$

۱۴۴- اگر S یک زیرمجموعه ۱۱۵ عضوی از اعداد طبیعی باشد، در تقسیم عضوهای S بر ۲۷، به طور یقین، حداقل چند عضو دارای یک باقی‌مانده هستند؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۱۴۴- گزینه ۲

با توجه به اصل لانه کبوتری، اگر ۱۲۷ را تعداد کبوترها، و ۲۷ را تعداد لانه‌ها فرض کنیم، داریم $115 = 27 \times 4 + 7$ ، که بنابراین حداقل ۴+۱ عضو، یعنی ۵ عضو دارای باقی‌مانده یکسان در تقسیم بر ۲۷ می‌باشند.

۱۴۵- اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq n, 2^m \leq 2n\}$ ، آنگاه مجموعه $A_6 - A_4$ چند عضو دارد؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۱۴۵- گزینه ۲

$$A_1 = \{-1, 0, 1\}; A_6 = \{-6, -5, \dots, 2, 3\}; A_4 = \{-4, -3, \dots, 2, 3\} \Rightarrow A_6 - A_4 = \{-6, -5\}$$

$$(A_6 - A_4) \cup A_1 = \{-6, -5, -1, 0, 1\}$$

۱۴۶- رابطه‌ی $\{(x, y) : -x \geq |y|\}$ بر روی مجموعه $A = \{x : |x| \leq 3\}$ تعریف شده است. تعداد عضوهای این رابطه با مختص‌های صحیح

کدام است؟

۲۰ (۴)

۱۶ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

۱۴۶- گزینه ۳

$$R = \left\{ \underbrace{(-3, -3), (-3, -2), \dots, (-3, 2)}_7, \underbrace{(-2, -2), \dots, (-2, 2)}_5, \underbrace{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1)}_3, \underbrace{(0, 0)}_1 \right\}$$

۱۴۷- هر یک از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ بر روی شش گوی یکسان نوشته شده است. به طور تصادف متوالی هم یک گوی از جعبه خارج

می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد فرد یا زوج یک در میان خارج می‌شوند؟

۰/۲ (۴)

۰/۱۵ (۳)

۰/۱۲ (۲)

۰/۱ (۱)

۱۴۷- گزینه ۱

$$n(S) = 6!, \quad n(A) = 2 \times 3! \times 3!; \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{10} = 0/1$$

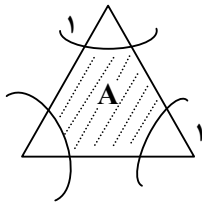
۱۴۸- یک نقطه به طور تصادفی، درون مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\sqrt{2\pi\sqrt{3}}$ انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، فاصله‌ی این نقطه تا رأس مثلث

بیش‌تر از ۱ واحد است؟

 $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

۱۴۸- گزینه ۳

$$A = \text{مساحت ناحیه} = \text{مساحت متساوی‌الاضلاع} - \text{مساحت نیم‌دایره} = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2\pi\sqrt{3}})^2 - \frac{1}{2} \pi (1)^2 = \pi$$



$$P(A) = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2\pi\sqrt{3}})^2} = \frac{\pi}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

۱۴۹- در یک گراف کامل از مرتبه ۵، چند دور با طول ۵، وجود دارد؟

۲۴ (۴)

۱۶ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

۱۴۹- گزینه ۱

$$K_p \text{ در گراف کامل } m \text{ در دور به طول } m = \binom{P}{m} \frac{(m-1)!}{2} \Rightarrow \binom{5}{5} \frac{(5-1)!}{2} = 12$$

۱۵۰- چند عدد سه رقمی وجود دارد که مضرب ۱۱ بوده و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر دو عدد ۴ و ۵، برابر ۱ باشد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۱۵۰- گزینه ۲

$$x \equiv 0 \pmod{11}, \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{4} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{20}; \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{4} \\ x \equiv 0 \pmod{11} \end{cases} \Rightarrow x \equiv 121 \pmod{44} \rightarrow x \equiv 121 \pmod{44} \Rightarrow x = 121, 341, 561, 781$$

$$abc = 11 \times 13 \times 2^2 = 572 \Rightarrow 5 + 7 + 2 = 14$$

۱۵۱- مجموع دو عدد ۲۷۷۲ و بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک آن‌ها ۲۳۱ و مخالف عدد کوچک‌تر است. تفاضل این دو عدد کدام است؟

۹۲۴ (۴)

۶۹۳ (۳)

۴۶۲ (۲)

۲۳۱ (۱)

۱۵۱- گزینه ۲

$$a + b = 2772 \rightarrow a'd + b'd = 2772 \xrightarrow{(a', b')=1} a' + b' = 12 \Rightarrow \begin{cases} a' = 7 \\ b' = 5 \end{cases}$$

$$a - b = a'd - b'd = (7 - 5) \times 231 = 462$$

۱۵۲- اگر عدد $x^2 - x - 6$ مضرب ۵۳ باشد، رقم یکان بزرگ‌ترین عدد سه رقمی کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

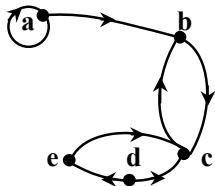
۱۵۲- گزینه ۴

تجزیه این عدد به شکل $x^2 - x - 6 = (x+3)(x-2) = 53k$ است. که چون ۵۳ عددی اول است، پس بهتر است هر عاملی را برابر مضارب

$$(x-2) = 53q \xrightarrow{q=18} x-2 = 954 \rightarrow x = 956$$

۵۳ قرار دهیم. پس داریم:

$$2x+3 = 53q' \xrightarrow{q'=37} 2x+3 = 1961 \rightarrow x = 979$$



۱۵۳- شکل زیر گراف مربوط به رابطه‌ی R است. ماتریس متناظر RoR چند درایه یک دارد؟

۸ (۲)

۷ (۱)

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۱۵۳- گزینه ۴

$$M(\text{RoR}) = [M(R)]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۵۴- تعداد جواب‌های صحیح و غیرمنفی نامساوی $x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$ کدام است؟

۳۵ (۴)

۳۳ (۳)

۳۲ (۲)

۳۰ (۱)

۱۵۴- گزینه ۴

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + y = 4 \rightarrow \begin{pmatrix} 4+4-1 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = 35$$

۱۵۵- در دو ظرف به ترتیب ۲۴ و ۱۸ مهره یکسان موجود است. در ظرف اول ۶ مهره سفید و در ظرف دوم ۳ مهره سفید است. از اولی ۷ مهره و از دومی ۵ مهره به تصادف برداشته و در ظرف دیگری می‌ریزیم. سپس از ظرف آخر یک مهره بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال این مهره سفید است؟

$$\frac{31}{144} \quad (4)$$

$$\frac{15}{72} \quad (3)$$

$$\frac{7}{36} \quad (2)$$

$$\frac{13}{72} \quad (1)$$

۱۵۵- گزینه ۴

$$\frac{7}{12} \times \frac{6}{24} + \frac{5}{12} \times \frac{3}{18} = \frac{21+10}{144} = \frac{31}{144}$$



سایت کنکور