

پاسخنامه تشریحی

آزمون سراسری ورودی دانشگاه‌های کشور - سال ۱۳۹۴

صبح بند شنبه
۹۴/۳/۲۱

آزمون اختصاصی
گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

مهندس حمید پیری

- ۱۰۱ - جملات دنباله $2, 39, 2, 399, 2, 3999, 2, 39999, \dots$ به یک عدد ثابت و گویا بسیار نزدیک می‌شود.
جمله دهم دنباله تفاضل آنها از این عدد ثابت کدام است؟

 10^{-10} (۲) 2×10^{-10} (۴) 10^{-11} (۱) 10^{-9} (۳)

گزینه ۱

$$\begin{aligned} a_n &\rightarrow 2/4, \quad b_n = 2/4 - a_n \\ b_n &:= 0/01, 0/001, 0/0001, \dots \\ \Rightarrow b_{10} &= 10^{-10} \end{aligned}$$

- ۱۰۲ - تابع $f(x) = \log_7(ax + b)$ فقط برای مقادیر $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$ با معنی است. اگر $f(4) = 2$ باشد،

آنگاه $(-\frac{4}{9})$ کدام است؟

۱ (۴)

 $\frac{1}{2}$ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

گزینه ۱

با توجه به دامنه داده شده حتماً ریشه پرانتز $x = -\frac{1}{2}$ است

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a + b = 2 \Rightarrow -a + 2b = 4 \\ f(4) = 2 \Rightarrow 4a + b = 9 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 1$$

$$\Rightarrow f(-\frac{4}{9}) = \log_7\left(\frac{-\frac{4}{9}+1}{9}\right) = \log_7\frac{1}{9} = -2$$

- ۱۰۳ - مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد، برابر $24\sqrt{5}$ واحد مربع است. بزرگترین ضلع این مثلث کدام است؟

۲۲ (۲)

۲۴ (۴)

۲۱ (۱)

۲۳ (۳)

گزینه ۳

روش اول: با توجه به رابطه هرون و اینکه عدد مساحت کسری نیست پس ضلع سوم عددی فرد است که نصف مساحت آن عدد غیر کسری بدست آمده است.

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

یادآوری هرون :

لذا گزینه ۱ یا گزینه ۳ درست خواهد بود

با امتحان یک گزینه مشکل حل می شود مثلا اگر گزینه ۱ امتحان شود

$$p = \frac{9+16+2}{2} = 23$$

$$S = \sqrt{23(23-9)(23-16)(23-21)} = 14\sqrt{23}$$

غلط است و گزینه ۳ درست خواهد بود

روش دوم:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C \Rightarrow 24\sqrt{5} = \frac{1}{2} \times 9 \times 16 \times \sin C \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \cos C = \pm \sqrt{1 - \sin^2 C} =$$

$$= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \pm \frac{2}{3} \xrightarrow{C > 90^\circ} \cos C = -\frac{2}{3}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow c^2 = 9^2 + 16^2 - 2 \times 9 \times 16 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 529 \Rightarrow c = \sqrt{529} = 23$$

۱۰۴- با ارقام ۹, ۱, ۲, ۳, ..., ۶، به چند طریق می‌توان یک عدد پنج رقمی ساخت، به طوری که درست ۲ رقم آن زوج باشد؟

۹۶۰۰ (۴)

۸۴۰۰ (۳)

۷۲۰۰ (۲)

۶۴۰۰ (۱)

گزینه ۲

عدد ۵ رقمی با ۵ رسم انتخاب شده و انتخاب سه عدد فرد پنج عدد فرد موجود و انتخاب ۲ عدد زوج از چهار عدد زوج موجود

$$\binom{4}{2}$$

×

$$\binom{5}{3}$$

×

$$5! = 7200$$

۱۰۵- تعداد جملات یک دنباله هندسی عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدر نسبت آن کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

 $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

گزینه ۳

تکنیک: فرض کنیم دنباله فقط ۲ جمله داشته باشد

$$a_1 + a_2 = 3a_1 \Rightarrow a_1 + a_1 q = 3a_1 \Rightarrow a_1 q = 2a_1 \Rightarrow q = 2$$

- ۱۰۶ - به ازای مقداری از a چند جمله‌ای $f(x) = x^4 + ax^3 - 8x^2$ بخش پذیر است، کوچکترین ریشه معادله $f(x) = 0$ کدام است؟

$$\begin{array}{l} 1-\sqrt{5} \\ -1-\sqrt{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} \end{array}$$

گزینه ۴

$$f(-2) = 0 \Rightarrow 16 - 8a - 16 = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^4 + 4x^3 - 8x = x(x^3 + 4x^2 - 8)$$

$$\begin{array}{c} -2 \\ -\frac{1}{1} \left| \begin{array}{c|cc|c} & 1 & 4 & + \\ & 1 & 2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & -4 \end{array} \right| \begin{array}{c} -8 \\ + \\ -8 \end{array} \end{array} \text{ است پس بنابر هورنر } x^3 + 4x^2 - 8 \text{ ریشه } x = -2 \text{ دارد.}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x(x^3 + 4x^2 - 8) = x(x+2)(x^2 + 2x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = -1 - \sqrt{5} \quad \min \\ x = -1 + \sqrt{5} \end{cases}$$

- ۱۰۷ - حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟

$$\begin{array}{l} 1 \quad (2) \\ 4 \quad (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -2 \quad (1) \\ 2 \quad (3) \end{array}$$

گزینه ۲

با فرض $x^2 + 4x + 3 = t > 0$ و توجه به $x^2 + 4x + 3 = t$ داریم:

$$t = \sqrt{t+2} \Rightarrow t^2 = t+2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 2 \Rightarrow$$

$$x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1$$

۱۰- نمودار تابع $y = |x+4| - |2x-6|$ در یک بازه اکیداً نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است؟

$$-x+5; x > 2 \quad (2)$$

$$-x+6; x < -4 \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2}x+1; -4 < x < 1 \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2}x+1; -4 < x < 2 \quad (3)$$

گزینه ۴



با توجه به ریشه های داخل قدرمطلق

باید x در فاصله ای باشیم که ضریب عددی x منفی باشد که در بازه $(-4, 1)$ رخ می دهد و معادله بصورت $y = -2x + 2$

$$\text{است و وارون آن } y^{-1} = -\frac{1}{2}x + 1 \text{ است در بازه } (-4, 1)$$

۱۱- جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin x + \sin 2x}{\cos x + \cos 2x} = \cot x$ ، کدام است؟

$$\frac{2k\pi}{5} \quad (2)$$

$$\frac{1}{5}(2k+1)\pi \quad (4)$$

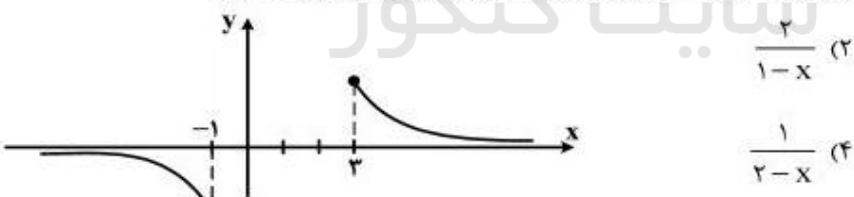
$$\frac{k\pi}{5} \quad (1)$$

$$\frac{3k\pi}{5} \quad (3)$$

گزینه ۴

به ازای $k=0$ در گزینه های ۱ و ۲ و ۳ مقدار $x=0$ است که در دامنه $\cot x$ صدق نمی کند پس گزینه ۴ درست است

۱۲- شکل روبرو، نمودار تابع $y = \sin^{-1}(U(x))$ است. ضابطه $(U(x), y)$ به کدام صورت است؟



$$\frac{\pi}{1-x} \quad (2)$$

$$\frac{2}{x-1} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2-x} \quad (4)$$

$$\frac{1}{x-2} \quad (3)$$

گزینه ۱

با توجه به اینکه تابع $x \sin^{-1}$ در مقادیر مثبت مقداری مثبت دارد پس $x > 0$ است که فقط در گزینه های ۱ و ۳ رخ

می دهد همچنین عدد $x=0$ باید در $U(x)$ مقداری بزرگتر از ۱ یا کوچکتر از ۱ - بددهد چون این نقطه در دامنه نیست

$$\frac{2}{x-1} = -2 < -1 \quad \text{پس فقط گزینه ۱ صحیح است}$$

۱۱۱- حاصل عبارت $(169 \sin(2\cos^{-1}(-\frac{5}{13}))$, کدام است؟

۶۰ (۲)

۱۲۰ (۴)

-۱۲۰ (۱)

-۶۰ (۳)

گزینه ۱

$$\cos^{-1}\left(-\frac{5}{13}\right) = \theta \Rightarrow \cos \theta = -\frac{5}{13} \Rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2} = \pm \frac{12}{13} \xrightarrow{90^\circ < \theta < 180^\circ} \sin \theta = +\frac{12}{13}$$

$$169 \sin(2\theta) = 169 \times 2 \sin \theta \cos \theta = 169 \times 2 \times \frac{12}{13} \times \left(-\frac{5}{13}\right) = -120$$

۱۱۲- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{a(1+\sqrt[3]{1-x})}{x^2 - 2x} & ; x > 2 \\ x-a & ; x \leq 2 \end{cases}$ همواره پیوسته است؟

۱/۶ (۲)

۲/۴ (۴)

۱/۲ (۱)

۲/۴ (۳)

گزینه ۳

باید در $x=2$ پیوسته باشد $2^- : 2-a$

$$2^+ : \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(1+\sqrt[3]{1-x})}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(2-x)}{x^2 - 2x} = -\frac{a}{6}$$

$f(2) = 2-a$

$$2-a = -\frac{a}{6} \Rightarrow a = \frac{12}{5} = 2/4$$

 $2e^2 (۴)$ $2e (۳)$ $e^2 (۲)$ $2e (۱)$

گزینه ۲

۱۱۳- حد دنباله $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n+3}$ وقتی $n \rightarrow \infty$, کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{2n+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+3} = e^{\frac{1 \times 2}{1}} = e^2$$

- ۱۱۴ - حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} ([2x] + [-2x]) \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1+x^2}}$ کدام است؟ (نماد [] جزو صحیح است.)
- (۱) -۳ (۲) ۰ (۳) صفر (۴) حد ندارد.

گزینه ۲

$$[2x] + [-2x] = -1 \quad \text{پس } [u] + [-u] = \begin{cases} 0 & u \in \mathbb{Z} \\ -1 & u \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

یادآوری:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-1) \frac{\frac{2x^2}{2} \times 2(1)}{1 - 1 - x^2} = +\infty$$

- ۱۱۵ - یکی از ریشه‌های حقیقی معادله $x^3 + 2x^2 - 4x - 3 = 0$ در کدام بازه است؟

- (۱) $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$ (۲) $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$
 (۳) $(0, \frac{1}{2})$ (۴) $(-\frac{1}{2}, 0)$

گزینه ۱

$$f(-\frac{1}{2}) < 0, \quad f(-\frac{3}{4}) > 0$$

قضیه مقدار میانی

- ۱۱۶ - امتداد مجانب‌های نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}$. نیمساز ناحیه اول و سوم را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. اندازه AB کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{5}$

گزینه ۲

دو مجانب افقی بدست می‌آید

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |x+1| - |x-1| = \begin{cases} x \rightarrow +\infty: y = x+1-x+1=2 \Rightarrow y=2 \\ x \rightarrow -\infty: y = -x-1+x-1=-2 \Rightarrow y=-2 \end{cases}$$

محل تقاطع این دو مجانب با $x = y$ نقاط $A(2, 2)$ و $B(-2, -2)$ است پس

۱۱۷ - اگر θ زاویه بین مماس چپ و مماس راست، نمودار تابع با خصوصیت $f(x) = [x + \frac{1}{\sqrt{x}}]x + x^2$ در نقطه

$x = \frac{1}{2}$ باشد. $\tan \theta$ کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

مسئله غلط

با توجه به اینکه تابع در نقطه Z ساز ناپیوسته است پس مشتق چپ ندارد و مسئله غلط است

۱۱۸ - از رابطه $\frac{dy}{dx} = x^2y - y^2 - 2\sqrt{x} + 4 = 0$ در نقطه $(1, 2)$ کدام است؟

$\frac{1}{6}$ (۲)

$\frac{13}{6}$ (۴)

$\frac{7}{6}$ (۱)

$\frac{11}{6}$ (۳)

گزینه ۴

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2yx - 2\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x^2 - 2y} = -\frac{2yx - \frac{1}{\sqrt{x}}}{x^2 - 2y} \Rightarrow y'(1, 2) = 1$$

$$y'' = \frac{\left(2(y'x + y) - \frac{-1}{2\sqrt{xx}}\right)(x^2 - 2y) - (2x - 2y')\left(2yx - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{(x^2 - 2y)^2} = \frac{13}{16}$$

۱۱۹ - اگر $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$ باشد، معادله خط قائم بر منحنی تابع f^{-1} در نقطه $x = 2$ واقع بر آن کدام

است؟

$$y - 3x = -5 \quad (۲)$$

$$3y - x = 1 \quad (۴)$$

$$y + 3x = 7 \quad (۱)$$

$$3y + x = 5 \quad (۳)$$

گزینه ۱

$$x^3 - x^2 + 2x = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$$

$$m = (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3} \Rightarrow m' = -3$$

$$y - 1 = -3(x - 2) \Rightarrow y + 3x = 7$$

- ۱۲۰- نمودار تابع $y = |x| e^{-x}$ در کدام بازه نزولی و تقریباً آن رویه پایین است؟
- (۱) $(-\infty, 1)$
 (۲) $(1, 2)$
 (۳) $(2, +\infty)$
 (۴) $(0, 1)$

گزینه ۳

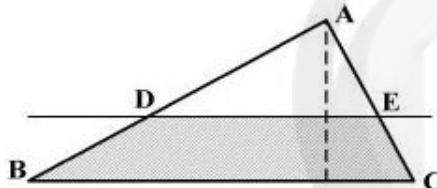
$$y = \begin{cases} x \geq 0 : y = xe^{-x} \Rightarrow y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) \leq 0 \Rightarrow x \geq 1 & (i) \\ x < 0 : \end{cases}$$

با توجه به جواب بدست آمده قسمت $x > 0$ لازم نیست بررسی گردد و گزینه های ۱ و ۲ حذف شوند.

$$y'' = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = -e^{-x}(2-x) \leq 0 \Rightarrow x \leq 2 \quad (ii)$$

$(i) \cap (ii) = (1, 2)$

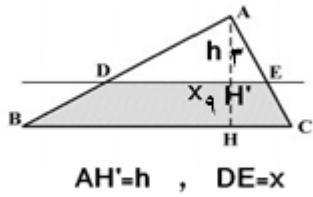
- ۱۲۱- در مثلث ABC ضلع $BC = ۲۰^\circ$ و ارتفاع $AH = ۱۲$ واحد است. خط Δ موازی BC با سرعت ثابت $\frac{۱}{۲}$ واحد در ثانیه از آن دور می شود. سرعت افزایش مساحت ذوزنقه در لحظه‌ای که فاصله دو خط موازی ۹ واحد باشد کدام است؟



- (۱) $\frac{۸}{۹}$
 (۲) $\frac{۹}{۱۰}$
 (۳) $\frac{۱}{۱۰}$
 (۴) $\frac{۱}{۲}$

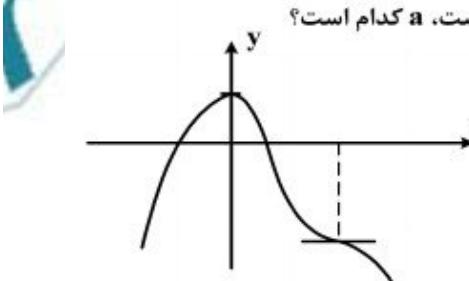
گزینه ۳

سرعت تغییرات مساحت ذوزنقه و مثلث یکسان است پس مثلث را بررسی می کنیم



$$S = \frac{1}{2}h \cdot x \xrightarrow{\frac{h}{12} = \frac{x}{20}} x = \frac{5}{3}h \rightarrow S = \frac{1}{2}h \times \frac{5}{3}h = \frac{5}{6}h^2$$

$$S' = \frac{5}{3}hh' = \frac{5}{3} \times 3 \times \frac{2}{10} = 1$$



۱۲۲- شکل رویه‌رو، نمودار تابع با خواصی است، a کدام است؟

- ۱۸ (۱)
- ۱۵ (۲)
- ۱۲ (۳)
- ۹ (۴)

گزینه ۱

تابع در یک نقطه با طول مثبت عطف افقی دارد یعنی مشتق ریشه مضاعف دارد

$$f' = -4x^3 + 24x^2 + 2ax = x(-4x^2 + 24x + 2a) = 2x(-2x^2 + 12x + a) = 0 \xrightarrow{\Delta=0}$$

$$\rightarrow 144 + 8a = 0 \Rightarrow a = -\frac{144}{8} = -18$$

۱۲۳- اگر $G(x) = x^r \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{\ln(t+2)}{t^r} dt$ باشد، $G'(4)$ چند برابر ۲ است؟

- ۱/۵ (۲)
- ۳ (۴)

۱ (۱)

۲ (۳)

گزینه ۳

$$G' = 2x \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{\ln(t+2)}{t^r} dt + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\frac{\ln(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}} \right) - 0 \right) x^r \Rightarrow$$

$$G'(4) = 2(4) \int_{\sqrt{4}}^{\sqrt{4}} \frac{\ln(t+2)}{t^r} dt + \left(\frac{1}{2\sqrt{4}} \left(\frac{\ln(\sqrt{4}+2)}{\sqrt{4}} \right) - 0 \right) (4)^r$$

$$= \dots + \frac{1}{4} \times \frac{\ln 4}{4} \times 16 = \ln 4 = 2 \ln 2$$

۱۲۴- حاصل انتگرال $\int_{\sqrt{x}}^4 \left[\frac{x}{2} \right] \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx$ کدام است؟

$4 - 2\sqrt{2} + \ln 2$ (۲)

$4 - 2\sqrt{2} - \ln 2$ (۱)

$2 - \sqrt{2} + \ln 2$ (۴)

$2 + \sqrt{2} - \ln 2$ (۳)

گزینه ۱

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & \text{بدون} & \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline 4 & 2 & \\ \hline \end{array} = \int_{\sqrt{x}}^4 \left[\frac{x}{2} \right] \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right) dx + \int_{\sqrt{x}}^4 \left[\frac{x}{2} \right] \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right) dx = 0 + 2\sqrt{x} - \ln x \Big|_{\sqrt{x}}^4 = (4 - \ln 4) - (2\sqrt{2} - \ln 2) = 4 - 2\sqrt{2} - \ln 2$$