پاسخ تشریحی سؤالات ریاضی رشته علوم تجربی

کنکور سراسری خارج از کشور سال ۱۳۹۴

توسط سیدامیر ستوده

دبیر مراکز پرورش استعدادهای درخشان

۰۹۱۲۱۶۱۴۲۹۶

۱۲۶-گزینه ۱

دسته‌بندی مورد نظر به‌صورت زیر است:

	اعداد دسته	جمله‌ی اول دسته	جمله‌ی آخر دسته
دسته‌ی اول	۱	۱	۱
دسته‌ی دوم	۲ ، ۳	۲	۳
دسته‌ی سوم	۴ ، ۵ ،۶	۴	۶
دسته‌ی چهارم	۷ ، ۸ ، ۹ ، ۱۰	۷	۱۰

جمله‌ی اول تمامی دسته‌ها تشکیل یک دنباله‌ی با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{n(n-۱)}{۲} + ۱$ می‌دهد همچنین جمله‌ی آخر تمامی دسته‌ها نیز یک دنباله با جمله‌ی عمومی $b_n = (\frac{n(n-۱)}{۲} + ۱) + (n-۱)$ است. پس جمله‌ی اول دسته‌ی بیستم برابر $a_n = \frac{۲۰(۲۰-۱)}{۲} + ۱ = ۱۹۱$ و جمله‌ی آخر آن برابر $b_n = ۱۹۱ + (۲۰-۱) = ۲۱۰$ است.
بنابراین جدول فوق به‌صورت زیر تکمیل می‌شود:

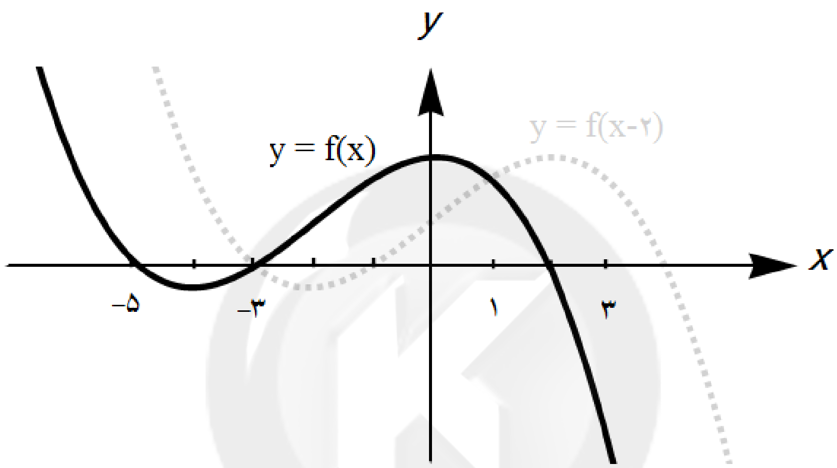
	اعداد دسته	جمله‌ی اول دسته	جمله‌ی آخر دسته
دسته‌ی اول	۱	۱	۱
دسته‌ی دوم	۲,۳	۲	۳
دسته‌ی سوم	۴,۵,۶	۴	۶
دسته‌ی چهارم	۷,۸,۹,۱۰	۷	۱۰
⋮	⋮	⋮	⋮
دسته‌ی بیستم	۱۹۱,۱۹۲,۱۹۳,...,۲۱۰	۱۹۱	۲۱۰

حال می‌خواهیم مجموع اعداد طبیعی از ۱۹۱ تا ۲۱۰ را محاسبه کنیم. این مجموع برابر است با:

$$\frac{(۱۹۱+۲۱۰) \times ۲۰}{۲} = ۴۰۱۰$$

۱۲۷-گزینه ۴

نمودار تابع $y = f(x)$ ، با دو واحد انتقال نمودار تابع $y = f(x-۲)$ به سمت چپ به‌دست می‌آید. برای تعیین دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{x\,f(x)}$ ، لازم است که $x\,f(x)\geq ۰$ ، بنابراین x و $f(x)$ باید هم علامت باشند یعنی یا هر دو مثبت، یا هر دو منفی باشند لذا قسمتی از دامنه‌ی تابع $y = f(x)$ که نمودار آن در نواحی اول و سوم است ، دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{x\,f(x)}$ می‌شود. پس دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{x\,f(x)}$، $[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$ است.



۱۲۸-گزینه ۳

$$\frac{\sin ۲۵۰^\circ+\sin ۷۰۰^\circ}{\cos ۵۶۰^\circ-\cos ۱۱۰^\circ}=\frac{\sin(۲۷۰-۲۰)^\circ+\sin(۷۰۰-۲\times ۳۶۰)^\circ}{\cos(۵۶۰-۳۶۰)^\circ-\cos(۹۰+۲۰)^\circ}=\frac{-\cos ۲۰^\circ+\sin(-۲۰)^\circ}{\cos ۲۰۰^\circ+\sin ۲۰^\circ}=\frac{-\cos ۲۰^\circ-\sin ۲۰^\circ}{-\cos ۲۰^\circ+\sin ۲۰^\circ}$$

$$=\frac{\frac{-\cos ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}-\frac{\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}}{\frac{-\cos ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}+\frac{\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}}=\frac{-۱-\tan ۲۰^\circ}{-۱+\tan ۲۰^\circ}=\frac{-۱-۰/۴}{-۱+۰/۴}=\frac{-۱/۴}{-۰/۶}=\frac{۷}{۳}$$

۱۲۹-گزینه ۱

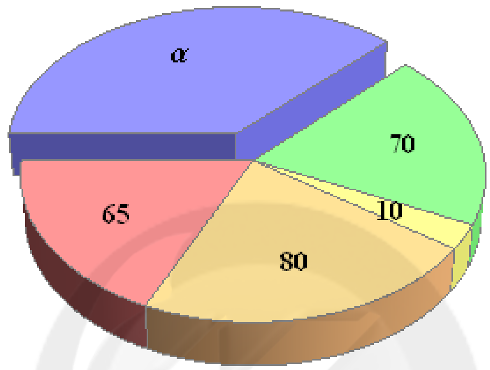
$$A\times B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\Rightarrow (A\times B)^{-۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰/۵ & ۰/۵ \end{bmatrix}$$

۱۳۰-گزینه ۴

مجموع زوایای داده شده برابر ۳۶۰ درجه است. پس داریم:

$$\alpha+۷۰+۱۰+۸۰+۶۵=۳۶۰ \Rightarrow \alpha=۱۳۵^\circ$$

بنابراین گروه سنی با زاویه‌ی مرکزی α ، شامل $۳۷/۵=۱۰۰\times\frac{۱۳۵}{۳۶۰}$ درصد از این جامعه است.



۱۳۱-گزینه ۲

فرض کنیم طول اضلاع مربع‌ها $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ باشند. با توجه به این‌که میانگین طول اضلاع برابر ۸ است داریم $\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=۸$. همچنین از این‌که میانگین مساحت مربع‌ها برابر ۶۵/۴۴ است نتیجه می‌شود که $\frac{\sum x_i^۲}{n}=۶۵/۴۴$. از طرفی انحراف معیار طول اضلاع مربع برابر است با $\delta=\sqrt{\frac{\sum x_i^۲}{n}-\bar{x}^۲}$ که حاصل آن $\delta=\sqrt{۶۵/۴۴-۸^۲}=\sqrt{۱/۴۴}=۱/۲$ است. بنابراین ضریب تغییرات طول اضلاع مربع‌ها که نسبت انحراف معیار به میانگین داده‌ها است، به‌دست می‌آید.

$$c.v=\frac{\delta}{\bar{x}}=\frac{۱/۲}{۸}=۰/۱۵$$

۱۳۲-گزینه ۳

۷ مهره‌ی سفید، ۵ مهره‌ی سیاه و ۲ مهره‌ی قرمز داریم. در انتخاب ۴ مهره، احتمال این‌که یک مهره قرمز و حداقل دو مهره سفید باشد برابر است با:

$$\frac{\binom{۲}{۱}\left(\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۱}+\binom{۷}{۳}\binom{۵}{۰}\right)}{\binom{۷+۵+۲}{۴}}=\frac{۲(۲۱\times۵+۳۵\times۱)}{\binom{۱۴}{۴}}=\frac{۲۸۰}{\frac{۱۴!}{۴!۱۰!}}=\frac{۲۸۰}{\frac{۱۴\times۱۳\times۱۲\times۱۱}{۴\times۳\times۲}}=\frac{۲۸۰}{۷\times۱۳\times۱۱}=\frac{۴۰}{۱۴۳}$$

۱۳۳-گزینه ۳

$$\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲}=۱ \Rightarrow \tan\frac{x}{۲}-\frac{۱}{\tan\frac{x}{۲}}=۱ \Rightarrow \frac{\tan^۲\frac{x}{۲}-۱}{\tan\frac{x}{۲}}=۱ \Rightarrow \tan^۲\frac{x}{۲}-\tan\frac{x}{۲}-۱=۰$$

از حل این معادله‌ی درجه‌ی دوم $\tan\frac{x}{۲}=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$ به‌دست می‌آید. از طرفی داریم:

$$\tan x=\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۱-(۱\pm\sqrt{۵})^۲}=-۲$$

در نهایت مقدار $\tan ۲x$ به‌دست می‌آید:

$$\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}=\frac{-۴}{۱-۴}=\frac{۴}{۳}$$

۱۳۴-گزینه ۱

دامنه‌ی تابع g ، مجموعه‌ی اعداد حقیقی و دامنه‌ی تابع f ، مجموعه جواب نامعادله‌ی $-x^۲+x+۲>۰$ است.

مجموعه جواب این نامعادله در جدول تعیین علامت زیر مشخص شده است.

x		-۱		۲	
$-x^۲+x+۲$	$-$	۰	$+$	۰	$-$
			مورد قبول		

بنابراین $D_g=R$ و $D_f=(-۱,۲)$.

حال دامنه‌ی تابع fog را به‌دست می‌آوریم:

$$D_{fog}=\left\{x\in D_g\ :\ g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in R\ :\ g(x)\in(-۱,۲)\right\}=\left\{x\in R\ :\ -۱<(\frac{۱}{۴})^x<۲\right\}$$

$$=\left\{x\in R\ :\ (\frac{۱}{۴})^x<۲\right\}=\left\{x\in R\ :\ ۲^{-۲x}<۲^۱\right\}=\left\{x\in R\ :\ -۲x<۱\right\}=\left\{x\in R\ :\ x>\frac{-۱}{۲}\right\}$$

$$=(\frac{-۱}{۲},+\infty)$$

۱۳۵-گزینه ۲

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+\sqrt{x^۲-۳x}}{ax^n-۶}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x-\frac{۳}{۲}}{ax^n-۶}$$

چون این حد برابر یک عدد حقیقی ناصفر است، لازم است که $n=۱$. پس داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+\sqrt{x^۲-۳x}}{ax-۶}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x-\frac{۳}{۲}}{ax-۶}=\frac{۳}{a}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=-۶$$

حال حد تابع f را در $x=-۱$ به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to-۱} f(x)=\lim_{x\to-۱}\frac{۲x+\sqrt{x^۲-۳x}}{-۶x-۶}\overset{H}{=}\lim_{x\to-۱}\frac{۲+\frac{۲x-۳}{۲\sqrt{x^۲-۳x}}}{-۶}=-\frac{۱}{۸}$$

۱۳۶-گزینه ۴

شرط پیوستگی را در نقطه به‌طول $x=\frac{\pi}{۲}$ برقرار می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\frac{\cos ۳x}{\cos x}\overset{H}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\frac{-۳\sin ۳x}{-\sin x}=-۳$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\sin ۵x-a=۱-a$$

$$f(\frac{\pi}{۲})=۱-a$$

برای پیوستگی در نقطه به‌طول $x=\frac{\pi}{۲}$ باید $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} f(x)=f(\frac{\pi}{۲})$. بنابراین:

$$۱-a=-۳\Rightarrow a=۴$$

۱۳۷-گزینه ۴

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\frac{x-۱}{\sqrt{x}}$ نسبت به تغییر متغیر x، در نقطه به‌طول $x=۱$ با نمو ۰/۴۴ برابر $\frac{f(۱/۴۴)-f(۱)}{۰/۴۴}=\frac{۵}{۶}$ است و آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه به‌طول $x=۱$ برابر است با مشتق تابع در $x=۱$ پس داریم:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x-۱)}{x} \;\Rightarrow\; f'(۱)=۱$$

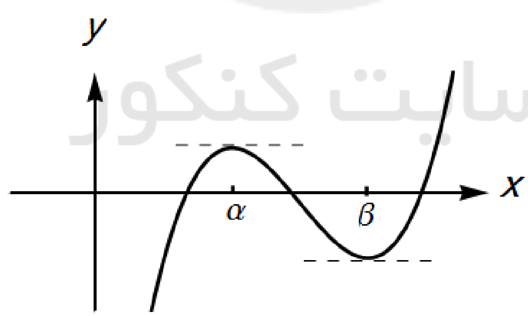
اختلاف این دو مقدار برابر $۱-\frac{۵}{۶}=\frac{۱}{۶}$ است.

۱۳۸-گزینه ۲

$$\frac{۱}{۲}\binom{۵}{۱}(\frac{۳}{۵})^۱(\frac{۲}{۵})^۴+\frac{۱}{۲}\binom{۳}{۱}(\frac{۳}{۵})^۱(\frac{۲}{۵})^۲=\frac{۱۴}{۶۲۵}$$

۱۳۹-گزینه ۱

تابع $f(x)=x^۳+(a-۱)x^۲+(۴-a)x-۴$ را در نظر می‌گیریم. چون f دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز و مثبت است نمودار آن به‌صورت زیر است:



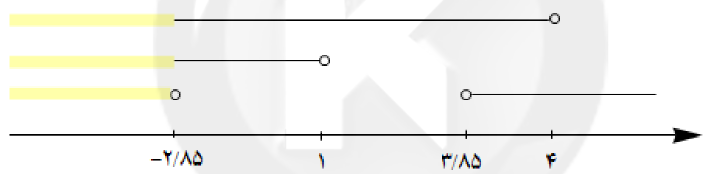
در شکل فوق نقاط به‌طول α و β ریشه‌های مشتق تابع f اند. در حقیقت α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $f'(x)=۳x^۲+۲(a-۱)x+۴-a$ اند. این معادله باید دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز و مثبت باشد بنابراین در این معادله باید $\Delta>۰$ ، جمع و ضرب ریشه‌ها نیز مثبت باشد.

$$\Delta>۰ \Rightarrow ۴(a-۱)^۲-۴\times۳(۴-a)>۰ \Rightarrow a^۲-a-۱۱>۰$$

ریشه‌های معادله‌ی $a^{۲}-a-۱۱=۰$ اعداد $\frac{۱\pm ۳\sqrt{۵}}{۲}\approx\begin{cases}-۲/۸\\ ۳/۸\end{cases}$ اند و جدول تعیین علامت نامعادله‌ی $a^{۲}-a-۱۱>۰$ به‌صورت زیر است:

a		$-۲/۸$		$۳/۸$	
$a^{۲}-a-۱۱$	+	۰	−	۰	+
	مورد قبول		غیر قابل قبول		مورد قبول

جمع ریشه‌های معادله‌ی $f'(x)=۳x^{۲}+۲(a-۱)x+۴-a$ نیز باید مثبت باشد یعنی $\frac{-۲(a-۱)}{۳}>۰$ که نتیجه می‌دهد $a<۱$. از طرف دیگر ضرب ریشه‌های معادله نیز باید مثبت باشد پس $\frac{۴-a}{۳}>۰$ یا معادل آن $a<۴$. اشتراک این جواب‌ها در شکل زیر نشان داده شده است.



بنابراین محدوده‌ی a ، بازه‌ی $(-\infty,\frac{۱-۳\sqrt{۵}}{۲})$ است و چون $(-\infty,-۴)$ نیز در این محدوده قرار دارد؛ به ازای $a<-۴$ نیز شرایط برقرار است.

۱۴۰-گزینه ۳

$$f(x)=|۲x-۶|-|x+۱|=\begin{cases}-۲x+۶-(-x-۱) & x<-۱\\ -۲x+۶-(x+۱) & -۱\le x<۳\\ ۲x-۶-(x+۱) & ۳\le x\end{cases}=\begin{cases}-x+۷ & x<-۱\\ -۳x+۵ & -۱\le x<۳\\ x-۷ & ۳\le x\end{cases}$$

با توجه به ضابطه، تابع به‌ازای $x\le ۳$ صعودی است. به‌ازای $۳\le x$ ، $-۴\le y$ و داریم:

$$y=x-۷\Rightarrow x=y+۷\Rightarrow f^{-۱}(x)=x+۷\ ,\ x\ge -۴$$

۱۴۱-گزینه ۲

چون $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3^n}{5+3^{n-1}}=3$ پس دنباله همگرا و لذا کراندار است. از طرفی $a_1=\frac{4}{5}$ و $a_2=\frac{5}{4}$ پس دنباله نزولی نیست. با توجه به گزینه‌ها ، گزینه‌های ۱، ۳ و ٤ اشتباه اند.

۱۴۲-گزینه ۴

چون جمعیت اولیه‌ی شهر ۵۰۰۰۰ با نرخ رشد سالیانه‌ی ۲/۵ درصد است، تابع رشد آن به‌صورت $f(t)=50000\,e^{\frac{2/5}{100}t}$ است. می‌خواهیم معادله‌ی $f(t)=50000e^{\frac{2/5}{100}t}=60000$ را حل کنیم. داریم:

$$50000\,e^{\frac{2/5}{100}t}=60000 \Rightarrow e^{\frac{2/5}{100}t}=\frac{6}{5}=1/2 \Rightarrow \frac{2/5}{100}t=\ln 1/2=0/18 \Rightarrow t=\frac{0/18\times 100}{2/5}=7/2$$

۱۴۳-گزینه ۱

$$\cos 3x+\cos x=0 \Rightarrow \cos 3x=-\cos x=\cos(\pi-x)$$

$$\Rightarrow 3x=2k\pi\pm(\pi-x)=\begin{cases}3x=2k\pi+(\pi-x)\\ 3x=2k\pi-(\pi-x)\end{cases}=\begin{cases}x=k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\\ x=k\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

به ازای $x=k\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$ ، $\cos x=0$ پس این دسته جواب قابل قبول نیست و جواب مورد نظر $x=k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ است.

۱۴۴-گزینه ۲

فرض کنیم x از سمت راست به $\sqrt{2}$ نزدیک شود در این‌صورت x^2 نیز از سمت راست به ۲ نزدیک می‌شود و لذا در این همسایگی $[2x^2]=4$. بنابراین ضابطه‌ی تابع در این همسایگی به‌صورت $f(x)=x^3-4x$ است که نتیجه می‌دهد:

$$f'(x)=3x^2-4 \Rightarrow f'_+(\sqrt{2})=3(\sqrt{2})^2-4=2$$

به همین ترتیب فرض کنیم x از سمت چپ به $\sqrt{2}$ نزدیک شود در این‌صورت x^2 نیز از سمت چپ به ۲ نزدیک می‌شود و لذا در این همسایگی $[2x^2]=3$. بنابراین ضابطه‌ی تابع در این همسایگی به‌صورت $f(x)=x^3-3x$ است که نتیجه می‌دهد:

$$f'(x)=3x^2-3 \Rightarrow f'_-(\sqrt{2})=3(\sqrt{2})^2-3=3$$

بنابراین: $f'_+(\sqrt{2})-f'_-(\sqrt{2})=2-3=-1$

۱۴۵-گزینه ۲

مختصات نقطه‌ی تماس به‌صورت $(۲,۰)$ است.

$$y=\ln\frac{\sqrt{۴x+۱}}{x^{۲}-۲x+۳} \Rightarrow y'=\frac{\dfrac{\dfrac{۴}{۲\sqrt{۴x+۱}}(x^{۲}-۲x+۳)-(۲x-۲)\sqrt{۴x+۱}}{(x^{۲}-۲x+۳)^{۲}}}{\dfrac{\sqrt{۴x+۱}}{x^{۲}-۲x+۳}}$$

بنابراین شیب خط مماس در نقطه به‌طول $x=۲$ برابر $m=-\frac{۴}{۹}$ است و معادله‌ی خط مماس به‌صورت زیر:

$$y-۰=\frac{-۴}{۹}(x-۲) \Rightarrow y=\frac{-۴}{۹}+\frac{۸}{۹}$$

عرض از مبدا خط مماس بر منحنی در نقطه به‌طول $x=۲$ ، $\frac{۸}{۹}$ است.

۱۴۶-گزینه ۳

$$y=\frac{۲}{۳}x^{۳}-(m-۱)x^{۲}+۸x \Rightarrow y'=۲x^{۲}-۲(m-۱)x+۸$$

ریشه‌های این معادله‌ی درجه‌ی دوم، طول نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع اند و چون طول ماکزیمم و مینیمم منفی است این معادله باید دارای دو ریشه‌ی متمایز منفی باشد. بنابراین در این معادله باید $\Delta>۰$ ، جمع ریشه‌ها منفی و ضرب ریشه‌ها مثبت باشد. پس داریم:

$$\Delta=۴(m-۱)^{۲}-۶۴>۰ \Rightarrow m<-۳ \text{ یا } m>۵$$

و جمع ریشه‌ها $۰>\frac{۲(m-۱)}{۲}$ و لذا $m-۱<۰$

اشتراک این مجموعه جواب‌ها حدود m را مشخص می‌کند. بنابراین محدوده‌ی m به‌صورت $m<-۳$ است.

اما طول نقطه‌ی عطف این توابع، ریشه‌ی مشتق دوم تابع است. بنابراین:

$$y''=۴x-۲m+۲=۰ \Rightarrow x=\frac{m-۱}{۲}$$

بنابراین داریم:

$$m<-۳ \Rightarrow m-۱<-۴ \Rightarrow x=\frac{m-۱}{۲}<-۲$$

۱۴۷-گزینه ۱

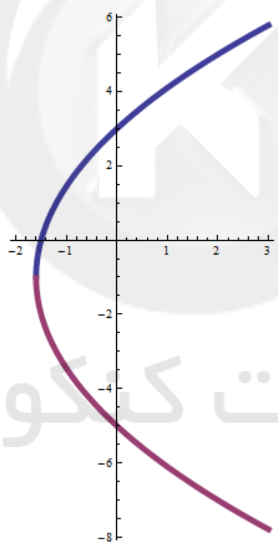
با توجه به شکل تابع دارای دو مجانب قائم با طول‌های قرینه است. بنابراین ضرب ریشه‌های عبارت واقع در مخرج ، منفی و جمع آن‌ها برابر صفر است. بنابراین داریم:

ضرب ریشه‌ها : $\frac{۱}{a} < ۰ \Rightarrow a < ۰$

جمع ریشه‌ها : $\frac{-b}{a} = ۰ \Rightarrow b = ۰$

۱۴۸-گزینه ۲

طبق خاصیت بازتابندگی سهمی‌ها، هر پرتوی که به موازات محور تقارن سهمی بر سهمی بتابد، در بازتابش از کانون می‌گذرد. بنابراین سهمی مورد نظر افقی، راس آن $S = (-۱/۶,-۱)$، کانون آن $F = (۰/۹,-۱)$ و فاصله‌ی کانون تا راس آن $p = ۰/۹ - (-۱/۶) = ۲/۵$ است.



معادله‌ی سهمی به‌صورت زیر است.

$$(y-(-۱))^۲ = ۴p(x-(-۱/۶)) \Rightarrow (y+۱)^۲ = ۱۰\,(x+۱/۶)$$

تقاطع این سهمی با محور y ها با جایگذاری $x = ۰$ در معادله‌ی سهمی به‌دست می‌آید:

$$(y+۱)^۲ = ۱۰\,(۰+۱/۶) \Rightarrow (y+۱)^۲ = ۱۶ \Rightarrow y = \begin{cases} ۳ \\ -۵ \end{cases}$$

۱۴۹-گزینه ۳

خروج از مرکز بیضی در فرم گسترده $Ax^۲+By^۲+Cx+Dy+E=۰$ را از رابطه‌ی $e=\sqrt{۱-\frac{\min\{A,B\}}{\max\{A,B\}}}$ می‌توان محاسبه نمود. بنابراین:

$$e=\sqrt{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۵۰-گزینه ۴

$$\int_۰^{۲\pi}\sqrt{۲-۲\cos x}\,dx=\int_۰^{۲\pi}\sqrt{۲(۱-\cos x)}\,dx=\int_۰^{۲\pi}\sqrt{۴\sin^۲\frac{x}{۲}}\,dx$$

$$=۲\int_۰^{۲\pi}\left|\sin\frac{x}{۲}\right|dx=۲\int_۰^{۲\pi}\sin\frac{x}{۲}\,dx=-۴\cos\sin\frac{x}{۲}=-۴(\cos\pi-\cos۰)=-۴(-۱-۱)=۸$$

۱۵۱-گزینه ۳

$$\int\frac{۴x^۲-۱}{\sqrt[۳]{x}}dx=\int\frac{۴x^۲-۱}{x^{\frac{۱}{۳}}}dx=\int ۴x^{\frac{۵}{۳}}-x^{\frac{-۱}{۳}}\,dx=۴\times\frac{۱}{\frac{۵}{۳}+۱}x^{\frac{۵}{۳}+۱}-\frac{۱}{-\frac{۱}{۳}+۱}x^{-\frac{۱}{۳}+۱}$$

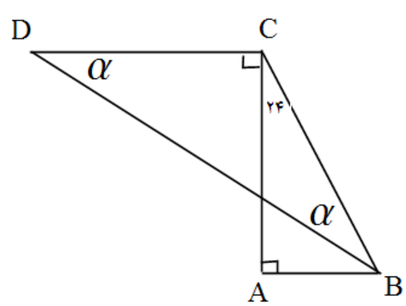
$$=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۸}{۳}}-\frac{۳}{۲}x^{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۲}{۳}}(x^۲-۱)+c$$

در مقایسه با فرض مساله داریم: $f(x)=x^۲-۱$

۱۵۲-گزینه ۱

با توجه به فرض مثلث BDC ، متساوی‌الساقین است بنابراین داریم:

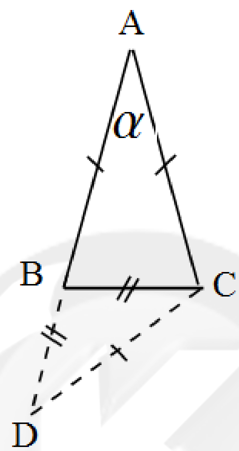
$$۲\alpha+۹۰+۲۴=۱۸۰\ \Rightarrow\ \alpha=۳۳^\circ$$



۱۵۳-گزینه ۴

$$\hat{B}=\frac{۱۸۰-\alpha}{۲}=۹۰-\frac{\alpha}{۲} \Rightarrow \hat{D}=\frac{۱۸۰-(۱۸۰-\hat{B})}{۲}=\frac{\hat{B}}{۲}=۴۵-\frac{\alpha}{۴}$$

$$\hat{A}=\hat{D} \Rightarrow \alpha=۴۵-\frac{\alpha}{۴} \Rightarrow \alpha=۳۶^\circ$$



۱۵۴-گزینه ۱

با دو بار استفاده از قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{OC}{CD}=\frac{OB}{BE} \quad , \quad \frac{OC}{CD}=\frac{OA}{AB} \Rightarrow \frac{OB}{BE}=\frac{OA}{AB} \Rightarrow \frac{۳+۵}{BE}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow BE=\frac{۴۰}{۳}=۱۳\frac{۱}{۳}$$

۱۵۵-گزینه ۴

قطر مکعب مستطیل داده‌شده و قطر کره با هم برابراند. بنابراین داریم:

$$d=۲r \Rightarrow \sqrt{۳^۲+۴^۲+۵^۲}=۲r \Rightarrow r=\frac{\sqrt{۵۰}}{۲}$$

فرمول مساحت کره به‌صورت $S=۴\pi r^۲$ است بنابراین:

$$S=۴\pi r^۲=۴\pi(\frac{\sqrt{۵۰}}{۲})^۲=۵۰\pi$$