* جواب سوالات ریاضی * کنکور سراسری ۹۴ * رشته ی تجربی * کد دفترچه C

۱۲۶ - گزینه ی ۳

$(1)\ (3,5)\ (7,9,11)\ (13,15,17)\ \ldots\ldots\ \underbrace{(a,a_1,\ldots,a_{30})}$ دسته ی ۳۰ ام

$S_n=\frac{n}{2}(a+a_n) \Rightarrow S_{30}=15(a+a_{30}) \Rightarrow a+a_{30}=\frac{S_{30}}{15} \Rightarrow S_{30}=? \rightarrow$ مجموع جملات دسته ی ۳۰ ام

اگر به هر دسته دقت کنیم می بینیم که مجموع جملات هر دسته عبارت است از شماره ی آن دسته به توان ۳

$(1)\quad (3,5)\quad (7,9,11)\quad \ldots\ldots\quad (a,a_1,\ldots,a_{30})$

$S=1^3\quad 2^3\quad 3^3$

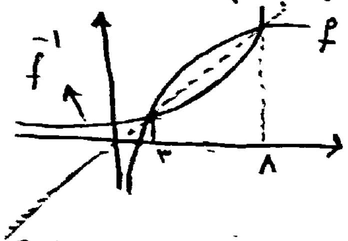
$30^3 \Rightarrow a+a_{30}=\frac{(30)^3}{15}=2\times 30^2=1800$

---

۱۲۷ - گزینه ی ۴

$\sqrt{x-f^{-1}(x)} \Rightarrow D=x\geqslant f^{-1}(x) \rightarrow$ نمودار x در کجا بالاتر از یا مساوی f^{-1} است؟

معکوس نمودار f را می‌توان رسم کرد. و در هرجا که نمودار $y=x$ بالاتر یا مساوی f^{-1} باشد، جواب است.



$x\geqslant f^{-1}(x) \Rightarrow [3,8]$

روش ②

$D: x\geqslant f^{-1}(x)$

$\Rightarrow f(x)\geqslant x \rightarrow x\in[3,8]$

نکته: اگر $y=f(x)$ باشد آنگاه: $f^{-1}(y)=x$

---

۱۲۸ - گزینه ی ۱

$$\frac{\cos 285-\sin 255}{\sin 525-\sin 105}=\frac{\cos(270+15)-\sin(270-15)}{\sin(\underset{3\pi}{540}-15)-\sin(90+15)}=\frac{\sin 15+\cos 15}{\sin 15-\cos 15}$$

صورت و مخرج را بر $\cos 15$ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{tg15+1}{tg15-1}=\frac{0.28+1}{0.28-1}=\frac{1.28}{-0.72}=\frac{128}{-72}=-\frac{16}{9}$$

---

۱۲۹ - گزینه ی ۴

ابتدا ماتریس $A-B$ را محاسبه می‌کنیم و آنگاه با به دست آوردن دترمینان $(A-B)$ معکوس را نیز محاسبه می‌کنیم

$$A-B=\begin{bmatrix}12&-8\\10&5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10&-6\\7&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2\\3&2\end{bmatrix}\Rightarrow |A-B|=4-(-6)=10$$

$$(A-B)^{-1}=\frac{1}{|A-B|}\begin{bmatrix}2&2\\-3&2\end{bmatrix}\Rightarrow (A-B)^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}2&2\\-3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2&0.2\\-0.3&0.2\end{bmatrix}$$

یادآوری: اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه معکوس A را از رابطه ی زیر حساب می‌کنند: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$

---

۱۳۰ - با توجه به نمودار مستطیلی، بزرگترین زاویه ی مرکزی، مربوط به دسته ی دوم یعنی $[15,18)$ می باشد.

که البته باید دقت کنیم که بعداز حذف داده های ۱۴، ۱۶ و ۱۲، از کل داده‌ها، بازهم دسته ی دوم، بزرگترین دسته از لحاظ فراوانی می باشد یا نه؟ ۲ تا از داده ها یعنی ۱۶ و ۱۲ مربوط به دسته ی دوم‌اند و بعداز اینکه حذف شوند، f_i مربوط به دسته ی دوم از ۲۱ به ۱۹ می آید که بازهم بزرگترین دسته از لحاظ فراوانی می باشد که بزرگترین زاویه را به خود اختصاص می دهد. پس: گزینه ی ۳

$$\alpha=\frac{f_i}{n}\times 360 \Rightarrow \alpha=\frac{19}{(60-3)}\times 360=\frac{19}{57}\times 360=\frac{360}{3}=120$$

۳ تا داده حذف شده است پس از کل داده ها کم می‌شود.

۱۳۱- گزینه‌ی ۱ : چون تعداد داده‌ها فرد است پس داده‌ای که در وسط قرار دارد میانه است.

$n=25 \to a_{13} = $ میانه $= Q_2 = 62$

چارک اول و چارک سوم را نیز می‌یابیم.

دقت شود که ۲ تا ۷۱ هست که اولی داخل جعبه می‌افتد چون قبل از Q_3 است.

$Q_1 = $ چارک اول $=$ میانه‌ی داده‌ها قبل از $Q_2 = \frac{54+56}{2} = 55$

$Q_3 = $ چارک سوم $=$ میانه‌ی داده‌ها بعد از $Q_2 = 71$

$$56 - 57 - 59 - 59 - 60 - 60 - 62 - 63 - 63 - 63 - 65 - 65 - 66 - 71$$

$$\bar{x} = \frac{(5\times 50)+(8\times 60)+71+55}{13} = \frac{806}{13} = 62 \Rightarrow \bar{x} - Q_2 = 62-62 = 0$$

۱۳۲- گزینه‌ی ۳ : از متمم استفاده می‌کنیم.

$P(\text{دو مهره همرنگ نباشند}) = 1 - P(\text{هر دو همرنگ باشند})$

انتخاب ۲ مهره از ۱۰ مهره $\to n(S)=\binom{10}{2}=45$

$P(\text{هر دو همرنگ}) = P(\text{هر دو قرمز})$ یا $P(\text{هر دو سیاه})$ یا $P(\text{هر دو سفید})$

$$=\binom{3}{2}+\binom{2}{2}+\binom{5}{2} = 14 \to P(A')=\frac{14}{45} \Rightarrow P(A)=1-P(A') = 1-\frac{14}{45}=\frac{31}{45}$$

روش ۲ می‌توانستیم با حساب کردن تمام حالتهایی که ۲ مهره همرنگ نباشند، جواب را بیابیم.

$$A=\underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{یکی سیاه}}\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{یکی سفید}}+\underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{یکی سیاه}}\underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{یکی قرمز}}+\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{یکی سفید}}\underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{یکی قرمز}} = 6+10+15=31 \to P(A)=\frac{31}{45}$$

۱۳۳- گزینه‌ی ۲ :

$$\alpha-\beta=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = \sin 2\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2\beta\right) = \cos 2\beta$$

$$tg\beta = \frac12 \Rightarrow 1+tg^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta} \Rightarrow 1+\frac14 = \frac{1}{\cos^2\beta} \Rightarrow \cos^2\beta = \frac45 \Rightarrow \cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$$

$$\cos 2\beta = 2\times\frac45 - 1 = \frac35 = 0/6$$

۱۳۴- گزینه‌ی ۴ : با توجه به تعریف داریم

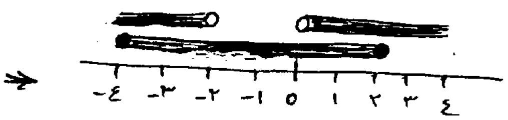
$$D_{fog} = \{x \mid x\in D_g \ , \ g(x)\in D_f\}$$

$D_f: 3-x\geq 0 \to x\leq 3 \quad \to D_{fog} = \{x \mid x>0$ یا $x<-2$ و $\log_2 (x^2+2x) \leq 3\}$

$D_g: x^2+2x>0 \Rightarrow x>0$ یا $x<-2$ (1)

$\log_2(x^2+2x)\leq 3 \Rightarrow x^2+2x\leq 8 \to x^2+2x-8\leq 0$

$(x+4)(x-2)\leq 0 \Rightarrow -4\leq x\leq 2$ (2)



$$(1)\cap(2) = [-4,-2)\cup(0,2]$$

۱۳۵- گزینه‌ی ۱

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{ax^n+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}} = -1 \Rightarrow \frac{ax^n}{3x-|2x|} = -1 \Rightarrow \frac{ax^n}{5x} = -1 \xrightarrow[\text{پس } n=1 \text{ است}]{\text{چون حد دارد}} \frac{a}{5}=-1 \Rightarrow a=-5$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{-5x+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow[\text{هوپیتال}]{H} \lim_{x\to 3}\frac{-5}{3-\frac{8x+15}{2\sqrt{4x^2+15x}}} = \frac{-5}{3-\frac{39}{2\times 9}} = \frac{-5}{3-\frac{13}{6}} = \frac{-5}{\frac{5}{6}} = -6$$

۱۳۶- گزینه‌ی ۲

$\lim_{x\to 6^+} f = a+\cos^2\frac{\pi}{6}$

$\lim_{x\to 6^-} f = \sin\frac{\pi}{6}$

$$\to \lim_{x\to 6^+} f = \lim_{x\to 6^-} f = f(6) \Rightarrow a+\frac34 = \frac12 \Rightarrow a = \frac12-\frac34 = -\frac14$$

۱۳۷- گزینه‌ی ۱

$\Delta x = 0.21$ ، $x=1$ ، $f(x)=\sqrt{x}$

آهنگ متوسط $= \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{1.21}-\sqrt{1}}{0.21} = \dfrac{1.1-1}{0.21} = \dfrac{10}{21}$

آهنگ لحظه‌ای $= f'(1) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(1)=\dfrac{1}{2} \rightarrow \dfrac{1}{2}-\dfrac{10}{21} = \dfrac{1}{42}$

۱۳۸- گزینه‌ی ۲

در هر حالت $\frac{1}{2}$ احتمال زوج یا فرد بودن داریم.

$\frac{1}{2}$ زوج $\rightarrow \binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}\times 6\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{9} = \frac{4}{27}$

$\frac{1}{2}$ فرد $\rightarrow \binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{2}\times 3\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{3} = \frac{6}{27}$

$\rightarrow \frac{4}{27}+\frac{6}{27}=\frac{10}{27}$

۱۳۹- گزینه‌ی ۴

α و β ریشه‌های معادله‌ی جدید و x_1 و x_2 ریشه‌ها معادله‌ی صورت سوال هستند:

$\alpha = \frac{1}{x_1}-1$ ، $\beta = \frac{1}{x_2}-1$ $\quad \begin{cases} \alpha+\beta = \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-2 \\ \alpha+\beta = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}-2 \end{cases}$

$S = x_1+x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$

$P = x_1x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$

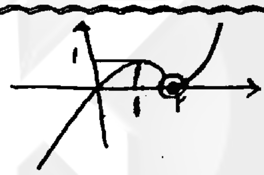
$S' = \frac{S}{P}-2 = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}-2 = -5$

$\alpha\cdot\beta = \frac{1}{x_1x_2}-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)+1 \Rightarrow P' = \frac{1}{P}-\left(\frac{S}{P}\right)+1 = \frac{1}{-\frac{1}{2}}-\left(\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}\right)+1 = -2+3+1 = 2$

وقتی S و P معادله‌ی جدید را داشته باشیم، در معادله‌ی $x^2-Sx+P=0$ جایگذاری می‌کنیم: $x^2+5x+2=0$

۱۴۰- گزینه‌ی ۳

$y=\begin{cases} x^2-2x & x\geqslant 2 \\ 2x-x^2 & x<2 \end{cases} = \begin{cases} (x-1)^2-1 & x\geqslant 2 \\ -(x-1)^2+1 & x<2 \end{cases}$



دامنه $1\leqslant x<2$ ، برد $0<y<1$ ، نزولی است.

$y=-(x-1)^2+1 \Rightarrow x=-(y-1)^2+1 \rightarrow x-1=-(y-1)^2 \Rightarrow (y-1)^2=1-x \rightarrow y-1=\pm\sqrt{1-x}$ اگر $1\leqslant y<2$

دامنه ای که در آن تابع نزولی است، $[1,2)$ است و برد این بازه $(0,1)$ است.

$y=\sqrt{1-x}+1$

دامنه‌ی معکوس، برد تابع اولیه است پس دامنه‌ی f^{-1} برابر است با برد f یعنی $(0,1)$

$y=1+\sqrt{1-x}$ ، $0<x<1$

۱۴۱- گزینه‌ی ۴

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7+4^{n-1}}{2+4^n} = \dfrac{4^{n-1}}{4^n} = \dfrac{1}{4} \rightarrow$ همگرا $\rightarrow$ کراندار

هر دنباله‌ی همگرا، کراندار است.

$a_1=\frac{7+1}{6}=\frac{8}{6}$ ، $a_2=\frac{11}{18}$ ، ...... ، $\frac{1}{4} \rightarrow$ نزولی است.

با مشخص کردن چند جمله‌ی اول و مقایسه‌ی آنها پی می‌بریم دنباله نزولی است.

۱۴۲- گزینه‌ی ۲

$70=90-40e^{-0.02t} \rightarrow 20=40e^{-0.02t} \rightarrow \frac{1}{2}=e^{-0.02t} \rightarrow \ln\frac{1}{2} = -0.02t$

$\rightarrow \ln 2^{-1} = -0.02t \rightarrow -\ln 2 = -0.02t \rightarrow 0.68 = \frac{2}{100}t \rightarrow t=\frac{68\times 100}{2\times 100}=34$

۱۴۳- گزینه‌ی ۱

$2\cos^2x-1+2\sin x\cos x=0 \Rightarrow \cos 2x+\sin 2x=0 \Rightarrow \cos 2x=-\sin 2x \Rightarrow tg 2x=-1$

$2x=k\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

۱۴۴- گزینه‌ی ۲

ابتدا fog را تشکیل می‌دهیم:

$f=\begin{cases} \frac{3}{5}x & x\geqslant 0 \\ x & x<0 \end{cases}$ ، $g=\begin{cases} 5x & x\geqslant 0 \\ 3x & x<0 \end{cases}$

$fog(x)=\begin{cases} \frac{3}{5}(5x) & x\geqslant 0 \\ (3x) & x<0 \end{cases} = \begin{cases} 3x & x\geqslant 0 \\ 3x & x<0 \end{cases} \rightarrow (fog)'(x)=\begin{cases} 3 & x\geqslant 0 \\ 3 & x<0 \end{cases}$

۱۴۵- گزینه‌ی ۳

$A(2,2) \rightarrow y-2=m(x-2) \rightarrow m=f'(2)$

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}\times e^{2-x}+(-e^{2-x})\sqrt{2x}\Big|_{x=2}=\frac{1}{2}\times 1-2=-\frac{3}{2}$

$\begin{cases} y-2=-\frac{3}{2}(x-2) \\ x=0 \end{cases}$ محل برخورد با محور yها $\Rightarrow y-2=-\frac{3}{2}(0-2)$

$y=3+2=5$

۱۴۶- گزینه‌ی ۳ : تابعی که همواره صعودی باشد یعنی $f'\geq 0$ است پس داریم:

$3x^2-2(m+2)x+3 \Rightarrow \Delta\leq 0 \rightarrow 4(m^2+4m+4)-4(3)(3)\leq 0 \rightarrow m^2+4m-5\leq 0 \rightarrow -5\leq m\leq 1$

$6x-2(m+2)=0 \rightarrow x_{\text{طول عطف}}=\frac{m+2}{3} \Rightarrow -5\leq m\leq 1 \rightarrow -3\leq m+2\leq 3 \Rightarrow -1\leq\frac{m+2}{3}\leq 1$

$-1\leq x_{\text{عطف}}\leq 1$

۱۴۷- با توجه به نمودار $f(0)=a$ چون مجانب افقی تابع $y=a$ است و حاصل $f(0)$ نیز همین a می‌باشد.

$f(0)=a \rightarrow \frac{8}{4}=a \rightarrow a=2$ $\qquad y=\frac{2x^2+bx+8}{x^2+4}$

تابع بر محور xها مماس است پس صورت معادله باید $\Delta=0$ باشد.

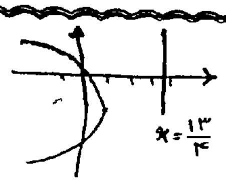
$b^2-4(2)(8)=0 \rightarrow b=\pm 8 \rightarrow b=-8$

و جواب b منفی باشد چون درست راست محور yهاست

و طول مماس باید مثبت باشد. گزینه‌ی ۲

$x=-\frac{b}{2\times 2}=\frac{-b}{4}>0 \Rightarrow b<0$ $\qquad a+b=-6$

۱۴۸- گزینه‌ی ۳ : با توجه به داده‌های سوال داریم:



نقطه‌ای که هر پرتوی از آن موازی محور xها برمی‌گردد، همان کانون است.

$x=\alpha-p$ $\qquad \alpha-p=\frac{13}{4}$ $\Rightarrow \alpha=1$

$f=(\alpha+p,\beta)$ $\qquad \alpha+p=-\frac{5}{4}$ $\quad p=-\frac{9}{4}$ $\quad \beta=-2$

$4p(x-\alpha)=(y-\beta)^2$

$-9(x-1)=(y+2)^2$

محل برخورد سهمی با محور xها یعنی $y=0$ ← $-9(x-1)=(0+2)^2 \Rightarrow x-1=-\frac{4}{9} \Rightarrow x=\frac{5}{9}$

۱۴۹- گزینه‌ی ۱ : باید مشخصات هذلولی را بیابیم.

$5(y^2-4y+4-4)-4x^2=0$

$5(y-2)^2-4x^2=20 \Rightarrow \frac{(y-2)^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$ قائم است $\begin{cases} a^2=4 \\ b^2=5 \end{cases}$ $c^2=9$ $\quad A,A'=(0,\beta\pm a)=(0,4)$ و $(0,0)$

$F,F'=(0,\beta\pm c)=(0,5)$ و $(0,-1)$

حال باید کانون بیضی مورد نظر روی رأس‌ها هذلولی باشد یعنی

$F=(0,4)$ ، $F'=(0,0) \rightarrow 2c=4 \rightarrow c=2$

و رأس‌ها بیضی در کانون‌ها هذلولی باشد یعنی

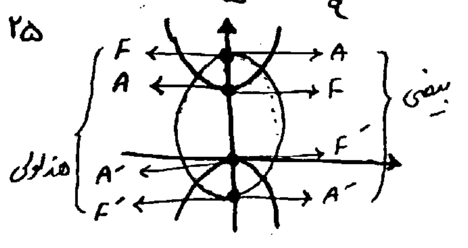
$A=(0,5)$ ، $A'=(0,-1) \rightarrow 2a=6 \rightarrow a=3$

مرکز بیضی در مرکز AA' یا FF' است پس $O\left(\frac{0+0}{2},\frac{4+0}{2}\right)$

$b^2=a^2-c^2=9-4=5 \Rightarrow \frac{(x-0)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$ $\qquad O=(0,2)$

$9x^2+5y^2-20y=25$

«سوال سخت و ترکیبی ای بود البته!!!»



۱۵۰- گزینه‌ی ۲ :

$1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2x} \rightarrow \int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{1+tg^2x}}=\int_0^{\pi}\frac{dx}{\left|\frac{1}{\cos x}\right|}=\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx$

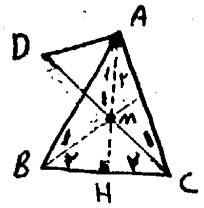
$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\cos x\,dx=\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1+1=2$

۱۵۱ – گزینه‌ی ۳

$$\int \frac{7x^2-4x}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{7x^2}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{4x}{x^{\frac{2}{3}}} = \int 7x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} = 7\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} - 4\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = 3x^{\frac{7}{3}} - 3x^{\frac{4}{3}}$$

$$= 3x^{\frac{1}{3}}(x^2 - x) \Rightarrow f(x) = x^2 - x$$

۱۵۲ – گزینه‌ی ۱



$AB = AC$
$A_1 = A_2$
$C_1 = C_2$
$B_1 = B_2$
$\hat{A} = 90$

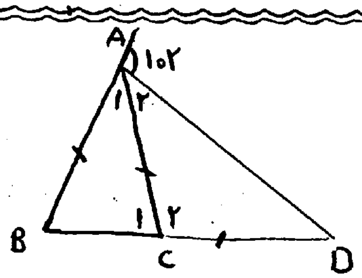
$\hat{A} + \hat{D} + \hat{C}_1 = 180$
$\hat{D} + C_1 = 90$
$\boxed{D = 90 - C_1}$ (1)

$M_1 = A_2 + C_1$
$M_1 = A_1 + B_1$
$A_1 + 2B_1 = 90 \rightarrow \underbrace{A_1 + B_1}_{M_1} + B_1 = 90$
$M_1 + B_1 = 90 \rightarrow \boxed{M_1 = 90 - B_1}$ (2)

(1)(2) $\hat{D} = M_1 \Rightarrow AD = AM$

$\Delta ABH \Rightarrow A_1 + B_1 + B_2 = 90 \rightarrow \boxed{A_1 + 2B_1 = 90}$

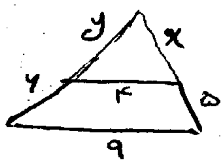
۱۵۳ – گزینه‌ی ۴



$C_1 = B$
$A_2 = D$
$A_1 + A_2 = 58$

$\boxed{C_1 = A_2 + D = 2A_2}$
$C_2 = A_1 + B = A_1 + C_1$ زاویه‌ی خارجی
$C_1 + C_2 = 180 \rightarrow 2A_2 + A_1 + C_1 = 180 \Rightarrow 2A_2 + A_1 + 2A_2 = 180$
$4A_2 + A_1 = 180 \rightarrow A_1 + A_2 + 3A_2 = 180 \rightarrow 3A_2 = 102 \rightarrow A_2 = 34$
$A_2 = 34 \Rightarrow A_1 = 44$ کوچکترین زاویه است.

۱۵۴ – گزینه‌ی ۴

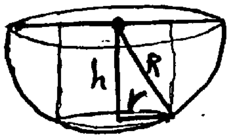


$\frac{y}{6+y} = \frac{x}{5+x} = \frac{4}{9}$ تعمیم تالس

$\frac{y}{6+y} = \frac{4}{9} \Rightarrow 24 + 4y = 9y \rightarrow y = 4.8$ $\rightarrow P = x + y + 4 = 4 + 4.8 + 4 = 12.8$

$\frac{x}{x+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow 4x + 20 = 9x \rightarrow x = 4$

۱۵۵ – گزینه‌ی ۴



$R =$ شعاع نیمکره
$h =$ ارتفاع استوانه
$r =$ شعاع مقطع استوانه

$V = \pi r^2 h = 6\pi r^2$

با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث r را می‌یابیم:

$R^2 = h^2 + r^2 \rightarrow 81 = 36 + r^2 \rightarrow r^2 = 45$

V استوانه $= 6\pi(45) = 270\pi$

موفق و مؤید باشید.

امید ولیی . بهار ۹۴