پاسخ تشریحی سؤالات ریاضی

کنکور سراسری خارج از کشور سال ۱۳۹۴

توسط سیدامیر ستوده

دبیر مراکز پرورش استعدادهای درخشان

۰۹۱۲۱۶۱۴۲۹۶

۱۰۱-گزینه ۱

$$a_۱ = ۱/۴۵, \qquad a_۲ = ۱/۴۵۴۵$$

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = ۱/\overline{۴۵} = \frac{۱۴۴}{۹۹}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{A} = \frac{۹۹}{۱۴۴} = ۰/۶۸۷۵$$

۱۰۲- گزینه ۱

$$f(x) = \log_{\frac{۱}{۲}}(ax+b)$$

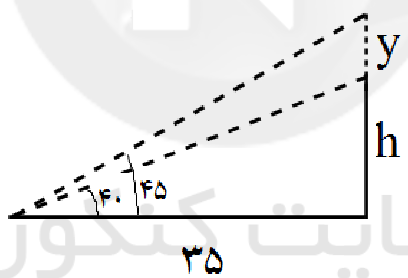
و ضمناً $f(-۱) = ۰$ و $f(۱) = -۱$. بنابراین داریم:

$$\log_{\frac{۱}{۲}}(a+b) = -۱ \Rightarrow a+b = ۲$$

و

$$\begin{cases} a+b = ۲ \\ -a+b = ۱ \end{cases} \Rightarrow ۲b = ۳ \Rightarrow b = \frac{۳}{۲}$$

۱۰۳- گزینه ۴



$$\tan ۴۵^\circ = \frac{y+h}{۳۵} = ۱ \Rightarrow y+h = ۳۵$$

$$\tan ۴۰^\circ = \frac{h}{۳۵} = ۰/۸ \Rightarrow h = ۰/۸ \times ۳۵ = ۲۸$$

$$\Rightarrow y = ۷$$

۱۰۴. گزینه ۴

$$\binom{۴}{۱} \times \binom{۴}{۱} \times ۵ \times ۴ \times ۳ = ۹۶۰$$

۱۰۵. گزینه ۳

$۲, ۷, ۱۲, ۱۷, ۲۲, \ldots$

$۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ۲۰, \ldots$

اولین عدد مشترک در دو دنباله ۱۷ است. دنباله‌ی جملات مشترک نیز دنباله‌ای حسابی با قدر نسبت ک.م.م دو دنباله یعنی $۱۵ = ۳ \times ۵$ است بنابراین:

$$a_n = ۱۷ + (n - ۱) \times ۱۵ = ۱۵n + ۲$$

$$۱۰۰ \le ۱۵n + ۲ \le ۹۹۹ \Rightarrow ۹۸ \le ۱۵n \le ۹۹۷$$

$$\Rightarrow n = ۷, \ldots, ۶۶$$

تعداد این جملات ۶۰=۱+۷-۶۶ است.

۱۰۶. گزینه ۴

عبارت $p(x) = x^۴ + ax^۲ - bx + ۴$ را در نظر می گیریم واضح است که $P(۱) = ۰$ و $P'(۱) = ۰$
بنابراین $P(۱) = ۱ + a - b + ۴ = ۰ \Rightarrow a - b = -۵$ و $P'(۱) = ۴ + ۲a - b = ۰$. از حل دستگاه به‌دست آمده داریم: $b = ۶$

۱۰۷. گزینه ۲

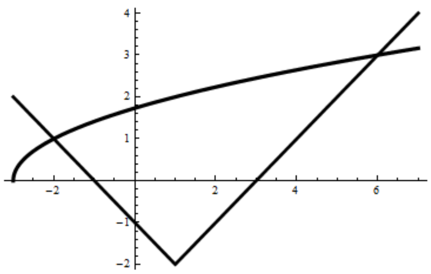
$$g(x) = x - \sqrt{x} \quad , f(۶) = ۰ \quad , f(-\frac{۱}{۴}) = ۰$$

$$(fog)(x) = ۰ \Rightarrow f(g(x)) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} g(x) = ۶ \\ g(x) = -\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

اگر $g(x) = ۶$ آنگاه $x - \sqrt{x} = ۶$ بنابراین $(\sqrt{x} - ۳)(\sqrt{x} + ۲) = ۰$ که نتیجه می‌دهد: $x = ۹$.

اگر $g(x) = -\frac{۱}{۴}$ آنگاه $x - \sqrt{x} = -\frac{۱}{۴}$ بنابراین $(\sqrt{x} - \frac{۱}{۲})^۲ = ۰$ که نتیجه می‌دهد: $x = \frac{۱}{۴}$.

۱۰۸. گزینه ۳



$\sqrt{x+۳} \geq |x-۱|-۲$

$\sqrt{x+۳} = x-۳ \Rightarrow x+۳ = x^۲-۶x+۹ \Rightarrow x^۲-۷x+۶=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ & \times \\ x=۶ \end{cases}$

****

$\sqrt{x+۳} = -x-۱ \Rightarrow x+۳ = x^۲+۲x+۱$

$\Rightarrow x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ & \times \\ x=-۲ \end{cases}$

بنابراین جواب نامعادله‌ی مورد نظر (۶ و ۲-) است و بیشترین طول این بازه ۸ است.

۱۰۹. گزینه ۲

$\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x} = \tan ۳x \Rightarrow \tan(\frac{\pi}{۴}-x) = \tan ۳x$

$\Rightarrow ۳x = k\pi + (\frac{\pi}{۴}-x)$

$\Rightarrow ۴x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$

$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۱۶}$

۱۱۰- گزینه ۱

با توجه به اینکه نمودار تابع، مجانب افقی با عرض منفی است پس حد تابع $U(x)$ در بینهایت باید عددی منفی شود و لذا گزینه‌های ۳ و ۴ حذف می‌شوند.

از طرفی در گزینه ۲ ریشه مخرج $x=-۱$ است ولی در شکل تابع به ازای $x=-۱$ تعریف شده است پس گزینه ۲ نیز غلط است.

۱۱۱- گزینه ۲

$$\sin(\cos^{-1}\frac{۳}{۵}+\cos^{-1}(-\frac{۴}{۵}))$$

با فرض $\cos^{-1}\frac{۳}{۵}=\alpha$ و $\cos^{-1}(-\frac{۴}{۵})=\beta$ داریم $\cos\alpha=\frac{۳}{۵}$ و $\cos\beta=-\frac{۴}{۵}$.

بنابراین $\sin\beta=\frac{۳}{۵}$. پس داریم:

$$\sin(\cos^{-1}\frac{۳}{۵}+\cos^{-1}(-\frac{۴}{۵}))=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{۴}{۵}\times\frac{-۴}{۵}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۳}{۵}=-\frac{۷}{۲۵}$$

۱۱۲- گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۳^+}f(x)=\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱-\sqrt{x-\sqrt{x+۱}}}{x-۳}$$

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to ۳^+}-\frac{۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}}{۲\sqrt{x-\sqrt{x+۱}}}=-\frac{۳}{۸}$$

از طرفی $f(۳)=-\frac{۳}{۸}$ و داریم

$$\lim_{x\to ۳^-}f(x)=-\frac{۳}{۸}$$

بنابراین به ازای هر مقدار a تابع در نقطه‌ی $x=۳$ پیوسته است.

۱۱۳- گزینه ۳

$$\lim_{n\to\infty}n(\log(n+۱)-\log n)=\lim_{n\to\infty}n\log\frac{n+۱}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log(۱+\frac{۱}{n})^n$$
$$=\log e$$

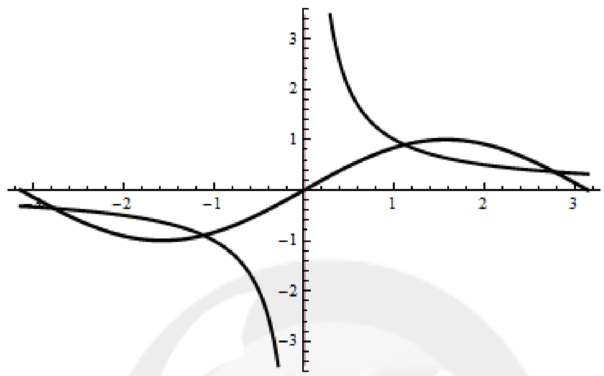
۱۱۴- گزینه ۲

به ازای هر x که $|x|<\frac{\pi}{۲}$، $x\neq ۰$ داریم $\cos x<\frac{\sin x}{x}<۱$. بنابراین اگر $x\to ۰$ آنگاه در یک همسایگی از x مانند δ داریم $\left[\frac{\sin x}{x}\right]=۰$ و لذا در این همسایگی $\left[\frac{\sin x}{x}\right]\cot x=۰\times\cot x=۰$ و لذا $\lim_{x\to ۰}\left[\frac{\sin x}{x}\right]\cot x=۰$.

۱۱۵- گزینه ۲

$$x\sin x=۱ \Rightarrow \sin x=\frac{۱}{x}$$

با توجه به شکل، معادله در این بازه دارای ۴ ریشه است.



۱۱۶- گزینه ۲

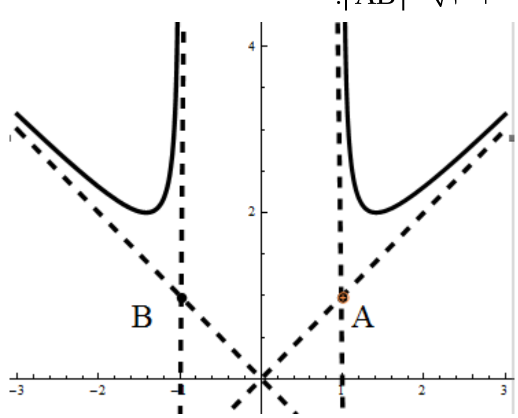
مجانب‌های قائم نمودار این تابع، $x=۱$ و $x=-۱$ اند. فرض کنیم $y=ax+b$ مجانب مایل تابع باشد. در این صورت

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\sqrt{x^۲-۱}}=\pm۱$$

و

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲}{\sqrt{x^۲-۱}}-x=۰$$

یعنی $y=\pm x$ و $y=-x$ مجانب‌های مایل تابع‌اند و نقاط برخورد این مجانب‌ها $A=(۱,۱)$ و $B=(-۱,۱)$ است لذا $|AB|=\sqrt{۲^۲+۰^۲}=۲$.



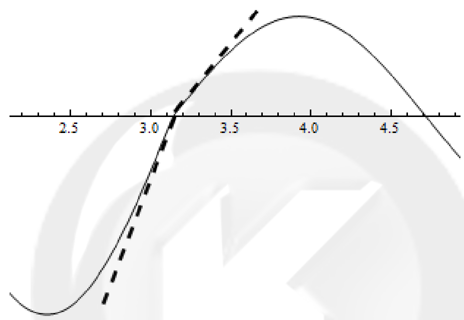
۱۱۷- گزینه ۳

$$f(x)=\left[۲+\cos\frac{x}{۲}\right]\sin ۲x$$

$$m_۱=f'(\pi)^+=۲\cos ۲\pi=۲$$

$$m_۲=f'(\pi)^-=۲\times ۲\cos ۲\pi=۴$$

$$\tan\theta=\left|\frac{m_۱-m_۲}{۱+m_۱m_۲}\right|=\left|\frac{۴-۲}{۱+۴\times ۲}\right|=\frac{۲}{۹}$$



۱۱۸- گزینه ۱

$$x^۲y+y^۲+۳=۰\Rightarrow ۲xy+x^۲y'+۲y'y=۰$$

$$\Rightarrow ۲y+۲xy'+۲xy'+x^۲y''+۲(y''y+y'^۲)=۰$$

اگر $x=۲$ آنگاه $y=-۱$ و $y'=۲$. بنابراین

$$-۲+۴\times ۲+۴\times ۲+۴y''+۲(-y''+۴)=۰\Rightarrow ۱۴+۴y''-۲y''+۸=۰$$

$$\Rightarrow ۲y''=-۲۲\Rightarrow y''=-۱۱$$

۱۱۹- گزینه ۴

چون f محور yها را در $(۰,۱)$ قطع می‌کند $f^{-۱}$ محور xها را در نقطه $(۱,۰)$ قطع می‌کند.

$$(f^{-۱})'(۱)=(f^{-۱})'(f(۰))=\frac{۱}{f'(۰)}=\frac{۱}{۱+e^{۰}}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین شیب خط قائم بر نمودار $f^{-۱}$ در $x=۱$ برابر -۲ است و معادله‌ی خط قائم به صورت زیر است

$$y-۰=-۲(x-۱)\Rightarrow y+۲x=۲$$

۱۲۰- گزینه ۲

$$y = x\ln|x| = \begin{cases} x\ln x & x > ۰ \\ x\ln(-x) & x < ۰ \end{cases}$$

پس

$$y' = \begin{cases} ۱ + \ln x & x > ۰ \\ ۱ + \ln(-x) & x < ۰ \end{cases}$$

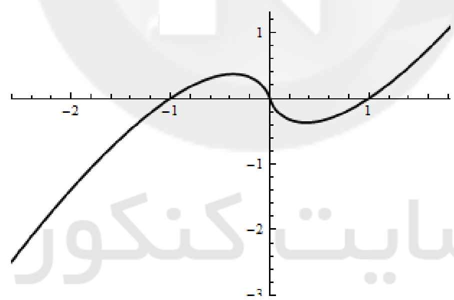
برای حل $y' < ۰$ واضح است که جواب‌ها در حالت $x > ۰$ نیستند بنابراین اگر $x < ۰$ آنگاه $y' = ۱ + \ln(-x) < ۰$ و لذا $\ln(-x) < -۱$ پس داریم

$$\ln(-x) < \ln\frac{۱}{e} \Rightarrow -x < \frac{۱}{e} \Rightarrow x > -\frac{-۱}{e}$$

اما

$$y'' = \begin{cases} \dfrac{۱}{x} & x > ۰ \\[2mm] \dfrac{۱}{x} & x < ۰ \end{cases}$$

پس $y'' < ۰$ یعنی $\frac{۱}{x} < ۰$ که به ازای $x < ۰$ اتفاق می‌افتد.



۱۲۱. گزینه ۴

$$A = (-۵, ۰), \quad M = (x, \sqrt{۲۵ - x^۲})$$

$$L = AM = \sqrt{(x+۵)^۲ + ۲۵ - x^۲} = \sqrt{۱۰x + ۵۰}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dx} \times \frac{dx}{dt} = \frac{۱۰}{۲\sqrt{۱۰x+۵۰}} \times \frac{dx}{dt} = \frac{۲}{۱۰} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{۱۰x+۵۰}}{۲۵}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{۲۵ - x^۲}}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-۱}\sqrt{\frac{۲۵}{x^۲} - ۱}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dx} \times \frac{dx}{dt} = \frac{-\sqrt{۱۰x+۵۰}}{۲۵x\sqrt{\frac{۲۵}{x^۲} - ۱}}$$

در لحظه‌ای که $MA=۶$ داریم:

$$\sqrt{۱۰x+۵۰}=۶\Rightarrow x=-\frac{۷}{۵}$$

بنابراین:

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{-\sqrt{۱۰(-\frac{۷}{۵})+۵۰}}{۲۵(-\frac{۷}{۵})\sqrt{\frac{۲۵}{(-\frac{۷}{۵})}-۱}}=۰/۰۵$$

۱۲۲. گزینه ۱

با توجه به شکل $f'(-۱)=۰$ و $f''(-۱)=۰$ بنابراین داریم: $-۲a+b=۷$ و $a=-۹$ که $b=-۱۱$ محاسبه می‌شود.

۱۲۳. گزینه ۳

$$f(c)(c-۱)-\int_{۱}^{c}f(x)dx=\int_{c}^{۴}f(x)dx-f(c)-(۴-۲)\Rightarrow ۳f(c)=\int_{۱}^{۴}f(x)dx$$

$$\Rightarrow f(c)=\frac{۱}{۳}\int_{۱}^{۴}\frac{x-۱}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\frac{۱}{۳}\int_{۱}^{۴}(x^{\frac{۱}{۲}}-x^{-\frac{۱}{۲}})dx$$

$$=\frac{۱}{۳}(\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}-۲x^{\frac{۱}{۲}})\Big|_{۱}^{۴}$$

$$=\frac{۱}{۳}\left[\frac{۱۴}{۳}-\frac{۶}{۳}\right]=\frac{۸}{۹}$$

۱۲۴. گزینه ۱

$$\int_{۰}^{۲}\frac{x^{۲}-[x]}{x+۱}dx=\int_{۰}^{۱}\frac{x^{۲}}{x+۱}dx+\int_{۱}^{۲}\frac{x^{۲}-۱}{x+۱}dx$$

$$=\int_{۰}^{۱}\frac{x^{۲}-۱}{x+۱}dx+\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{x+۱}dx+\int_{۱}^{۲}\frac{x^{۲}-۱}{x+۱}dx$$

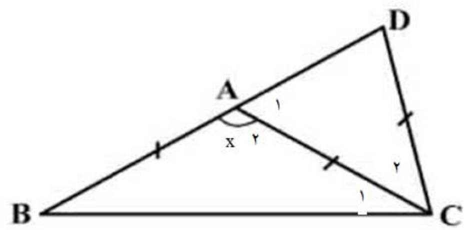
$$=\int_{۰}^{۲}\frac{x^{۲}-۱}{x+۱}dx+\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{x+۱}dx$$

$$=\int_{۰}^{۲}(x-۱)dx+\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{x+۱}dx$$

$$=\frac{۱}{۲}x^{۲}-x\Big|_{۰}^{۲}+\ln(x+۱)\Big|_{۰}^{۱}$$

$$=\ln ۲$$

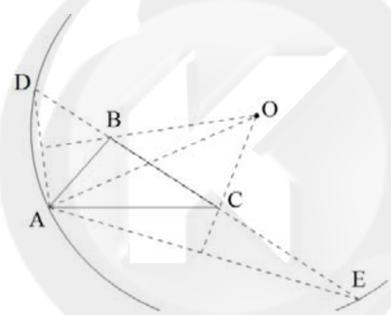
۱۲۵- گزینه ۳



$$\hat{A}=x \Rightarrow \hat{B}=۹۰-\frac{x}{۲} \Rightarrow \hat{D}=\hat{A}_۱=\frac{۱۸۰-(۹۰-\frac{x}{۲})}{۲}=۴۵+\frac{x}{۴}$$

$$\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۱۸۰ \Rightarrow x+۴۵+\frac{x}{۴}=۱۸۰ \Rightarrow \frac{۵}{۴}x=۱۳۵ \Rightarrow x=۱۰۸$$

۱۲۶. گزینه ۴



مرکز دایره محیطی مثلث ADE بر روی عمودمنصف پاره‌خط‌های AD و AE واقع است.
اما چون $AB=DB$ پس مثلث BAD متساوی‌الساقین است و عمودمنصف AD همان نیم‌ساز زاویه B است. به همین ترتیب در مثلث ACE نیز چنین است در حقیقت مرکز این دایره روی نقطه‌ی همرسی نیم‌سازهای خارجی زوایای B,C با نیم‌ساز داخلی زاویه A قرار دارد.

۱۲۷. گزینه ۴

$$\overset{\Delta}{AMD} \cong \overset{\Delta}{NMB} \Rightarrow \frac{MD}{MB}=\frac{AM}{NM}$$

$$\overset{\Delta}{AMB} \cong \overset{\Delta}{PMD} \Rightarrow \frac{MD}{MB}=\frac{PM}{AM}$$

بنابراین:

$$\frac{MD}{MB}=\frac{AM}{NM}=\frac{PM}{AM} \Rightarrow NM \times PM = AM^۲$$

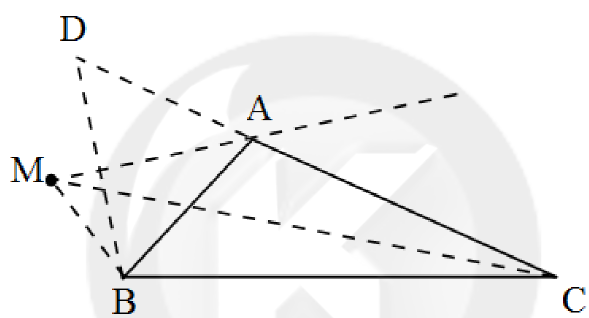
۱۲۸. گزینه ۱

ضلع AC را از طرف A تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم به‌طوری‌که $AD = AB$ بنابراین نیمساز خارجی زاویه A عمودمنصف BD است. پس داریم:

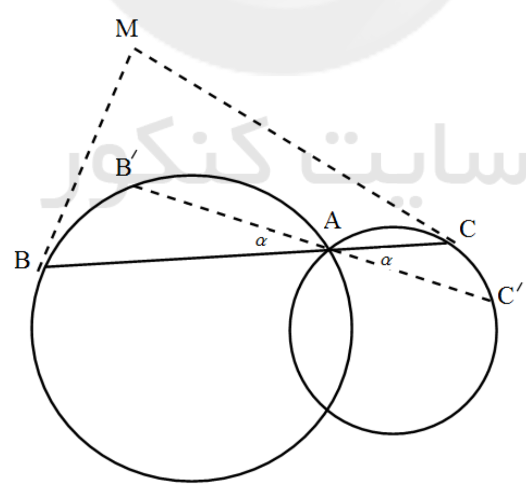
$$MB+MC=MD+MC>DC=DA+AC=AB+AC$$

و لذا:

$$\frac{MB+MC}{AB+AC}>1$$



۱۲۹. گزینه ۴

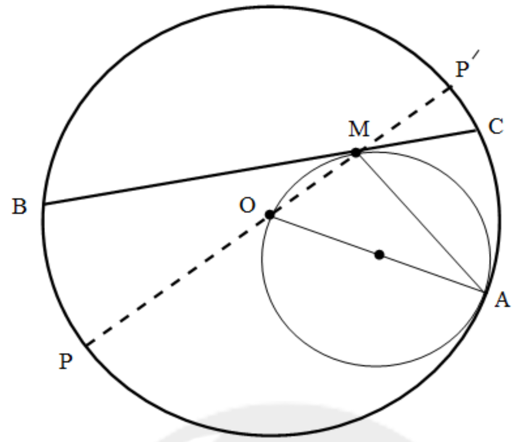


با چرخش خط قاطع حول A ،جمع دو کمان AC , AB ثابت می‌ماند. زیرا اگر خط قاطع را در موضع $B'C'$ در نظر بگیریم داریم:

$$AB' + AC' = AB - BB' + AC + CC' = AB - 2\alpha + AC + 2\alpha = AB + AC$$

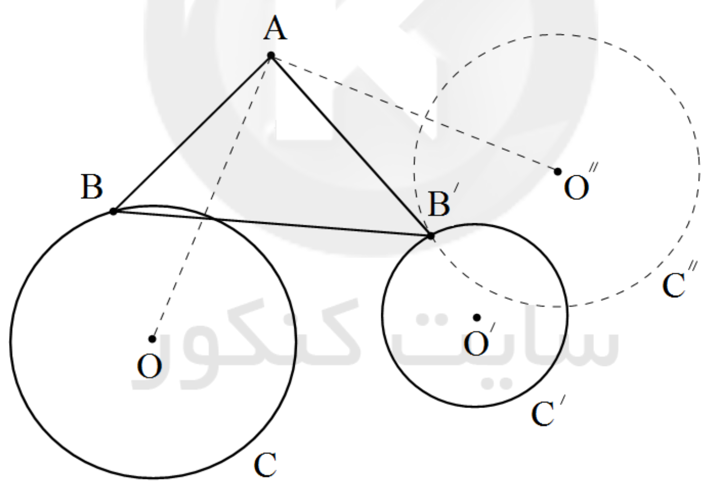
بنابراین مجموع دو زاویه B و C همواره ثابت است پس اندازه‌ی زاویه‌ی M ثابت می‌ماند.

۱۳۰. گزینه ۲



$$MB\times MC=MP\times MP'=(R+MO)(R-MO)=R^{۲}-MO^{۲}=MA^{۲}$$

۱۳۱. گزینه ۴



دو دایره C و C' و نقطه‌ی A را در نظر می‌گیریم. دایره‌ی C را حول نقطه‌ی A ، ۹۰ درجه دوران داده و دوران یافته‌ی آن را C'' می‌نامیم. نقطه‌ی B' ا روی فصل مشترک دو دایره‌ی C' و C'' در نظر می‌گیریم. دوران یافته‌ی نقطه‌ی B' حول A و زاویه‌ی ۹۰- درجه، نقطه‌ی B است که روی دایره‌ی C واقع است. بدین ترتیب مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه‌ی مورد نظر تشکیل می‌شود.

" حل این مساله توسط آقایان علیرضا ظهری و مرتضی رشیدی‌نیا فارغ‌التحصیلان مرکز استعدادهای درخشان شهید بهشتی شهر ری صورت گرفت. "

۱۳۲. گزینه ۳

نقاط A ، B، C و D را در نظر می‌گیریم. از سه نقطه‌ی B، C و D یک صفحه می‌گذرد. خطی که وسط اضلاع BC و BD را به هم وصل می‌کند، l_1 می‌نامیم. حال نقاط B، C و D از هر صفحه‌ی گذرنده بر l_1 به یک فاصله‌اند. در میان همه‌ی صفحات گذرنده از l_1 ، صفحه‌ای را درنظر می‌گیریم که فاصله‌ی آن تا نقطه‌ی A نیز برابر با فاصله‌ی آن از سه نقطه‌ی دیگر باشد. بدین‌ترتیب اگر خطوط l_2 و l_3 را وسط اضلاع در نظر بگیریم، سه صفحه می‌توان با این خاصیت به‌دست آورد.

۱۳۳. گزینه ۲

$$A=(3,1,0)$$
$$B=(-1,5,4)$$
$$M=(x,y,z)\Rightarrow AM=(x-3,y-1,z)$$
$$\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\Rightarrow(x-3,y-1,z)=-\frac{3}{4}(-4,4,4)$$
$$\Rightarrow x=6\ ,\ y=-2\ ,z=-3$$
$$\Rightarrow M=(6,-2,-3)\Rightarrow\overrightarrow{OM}=(6,-2,-3)$$
$$\Rightarrow\cos\beta=\frac{-2}{\sqrt{36+4+9}}=-\frac{2}{7}$$

۱۳۴. گزینه ۳

بردارهای هادی دو خط به ترتیب $u_1=(a,2,4)$ و $u_2=(2,1,-2)$اند.

از هر کدام از خطوط یک نقطه انتخاب می‌کنیم.

$$A=(-b,3,0)\in L_1$$
$$B=(0,\frac{3}{2},-5)\in L_2$$

باید داشته باشیم:

$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}=0\ (1$$

$$\begin{vmatrix}-b & \frac{3}{2} & 5\\ a & 2 & 4\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=0\ (2$$

از اولین شرط $(\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}=0)$ نتیجه می‌شود:

$$2a+2-8=0\Rightarrow a=3$$

و از دومین شرط داریم:

$$\begin{vmatrix} -b & \frac{۳}{۲} & ۵ \\ ۳ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۱ & -۲ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow b = -۲$$

۱۳۵. گزینه ۱

ابتدا فصل مشترک دو صفحه را می‌یابیم

$$z = ۴ \quad , \quad ۴x + ۳y - z = ۲$$
$$\Rightarrow ۴x = -۳y + ۶ \Rightarrow ۴x = -۳(y - ۲)$$

بنابراین معادله‌ی فصل مشترک در صفحه به صورت زیر است:

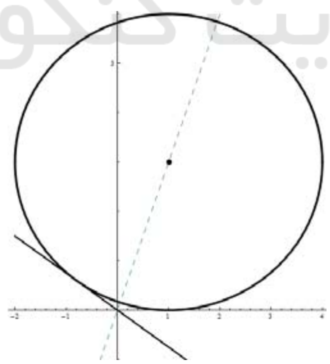
$$\frac{x}{-۳} = \frac{y-۲}{۴}, \ z = ۴$$

حال فاصله‌ی نقطه $A(۲و۱و۵)$ را از این خط می‌یابیم:

نقطه‌ی $P(۰و۲و۴)$ نقطه‌ای از خط است و داریم: $\overrightarrow{AP} = (-۲,۱,-۲)$

$$\frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{AP}|}{|u|} = \frac{\left|\begin{bmatrix} i & j & k \\ -۳ & ۴ & ۰ \\ -۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}\right|}{\sqrt{۹+۱۶+۰}} = \frac{|-۴i - ۳j + ۵k|}{۵} = \frac{\sqrt{۱۶+۹+۲۵}}{۵} = \frac{۵\sqrt{۲}}{۵} = \sqrt{۲}$$

۱۳۶. گزینه ۱



ابتدا معادله نیم‌ساز در خط $y = ۰$ و $۳x + ۴y = ۰$ را می‌یابیم.

$$\frac{|۳x+۴y|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{|y|}{\sqrt{۱}} \Rightarrow |۳x+۴y|=|۵y|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x+۴y=۵y \Rightarrow y=۳x \\ ۳x+۴y=-۵y \Rightarrow ۹y=-۳x \Rightarrow y=-\frac{۱}{۳}x \end{cases}$$

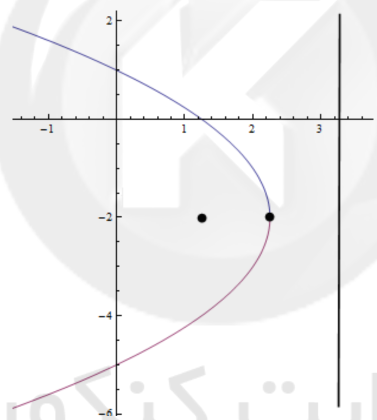
مرکز دایره‌ی مورد نظر روی این نیم‌ساز است پس مختصات مرکز به صورت $(\alpha,۳\alpha)$ است و مختصات نقطه تماس با محور xها به صورت $(\alpha,۰)$ است بنابراین معادله‌ی دایره به صورت:

$$(x-\alpha)^۲+(y-۳\alpha)^۲=۹$$

است و نقطه‌ی $(\alpha,۰)$ در این معادله صادق است بنابراین:

$$(\alpha-\alpha)^۲+(۰-۳\alpha)^۲=۹ \Rightarrow \alpha^۲=۱ \Rightarrow \alpha=۱$$

۱۳۷. گزینه ۳



$P=۱$

$F=(\alpha-۱,-۲)$

$S=(\alpha,-۲)$

معادله‌ی سهمی به صورت $(y+۲)^۲=-۴(x-\alpha)$ است. همچنین نقطه (۱و ۰) نقطه‌ای از سهمی است پس:

$$(۱+۲)^۲=-۴(۰-\alpha) \Rightarrow \alpha=\frac{۹}{۴}$$

۱۳۸. گزینه ۴

ارتباط دستگاه جدید برحسب دستگاه قدیم به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x+y) \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(-x+y) \end{cases}$$

$$\frac{y'^{۲}}{۲} - \frac{x'^{۲}}{۱۰} = ۱ \Rightarrow ۵y'^{۲} - x'^{۲} = ۱۰$$

$$\Rightarrow ۵(\frac{۱}{۲}(-x+y)^{۲}) - \frac{۱}{۲}(x+y)^{۲} = ۱۰$$

$$\Rightarrow ۵(x^{۲} - ۲xy + y^{۲}) - (x^{۲} + ۲xy + y^{۲}) = ۲۰$$

$$\Rightarrow ۴x^{۲} - ۱۲xy + ۴y^{۲} = ۲۰$$

$$\Rightarrow x^{۲} - ۳xy + y^{۲} = ۵$$

۱۳۹. گزینه ۴

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{۲} - ۴A = A(A - ۴I)$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۳ & ۲ & ۲ \\ ۲ & -۳ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} = ۵I$$

۱۴۰. گزینه ۳

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}A^{*} = \frac{\begin{vmatrix} A_{۱۱} & A_{۲۱} & A_{۳۱} \\ A_{۱۲} & A_{۲۲} & A_{۳۲} \\ A_{۱۳} & A_{۲۳} & A_{۳۳} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$A_{۳۲} = (-۱)^{۳+۲}\begin{vmatrix} ۲ & ۵ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix} = ۱۰$$

$$|A| = -۲(۱۲-۲۰) + ۱(۴-۵) = -۲\times(-۸) - ۱ = ۱۶ - ۱ = ۱۵$$

بنابراین درایه‌ی سطر دوم و ستون سوم ماتریس $A^{-۱}$ برابر $\frac{۱۰}{۱۵} = \frac{۲}{۳}$ است.

۱۴۱. گزینه ۱

۱۴۲. گزینه ۲

فراوانی	مرکز دسته	حدود دسته
۸	۱۰	$[۹,۱۱)$
۱۱	۱۲	$[۱۱,۱۳)$
۱۶	۱۴	$[۱۳,۱۵)$
۱۴	۱۶	$[۱۵,۱۷)$
۱۱	۱۸	$[۱۷,۱۹)$

$$\overline{x}=\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}=\frac{۸\times۱۰+۱۱\times۱۲+۱۶\times۱۴+۱۴\times۱۶+۱۱\times۱۸}{۸+۱۱+۱۶+۱۴+۱۱}$$

$$=\frac{۸۵۸}{۶۰}=۱۴/۳$$

۱۴۳. گزینه ۴

مبدأ استقرا به ازای ۱= k برقرار است:

$$p(k):\qquad (۱+a)^k\ge ۱+ka$$

$$p(k+۱):\qquad (۱+a)^{k+۱}\ge ۱+(k+۱)a$$

با ضرب طرفین نامساوی فرض استقرا در $(۱+a)$ داریم:

$$\begin{aligned}(۱+a)^k(۱+a)&\ge(۱+ka)(۱+a)\\&=۱+a+ka+ka^۲\\&=۱+(k+۱)a+ka^۲\\&\ge ۱+(k+۱)a\end{aligned}$$

در انتهای اثبات از اینکه $ka^۲\ge ۰$ استفاده شده است.

۱۴۴. گزینه ۳

$$S=\{۳,۹,۱۵,\dots,۶۳\}$$

اعضای S را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$s=\{(۳,۶۳),(۹,۵۷),(۱۵,۵۱),(۲۱,۴۵),(۲۷,۳۹),۳۳\}$$

اگر یک زیر مجموعه ۷ عضوی از S انتخاب شود آنگاه مطمئناً دو عضو با مجموع ۶۶ در آن وجود دارد.

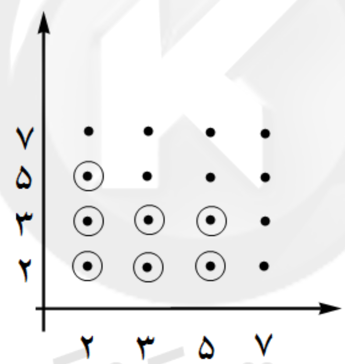
۱۴۵. گزینه ۴

$$A=\{۱,۲,\{۱,۲,۳\}\}$$
$$B=\{۱,۲,۳,\{۱,۲\}\}$$
$$C=\{۱,۲,۳\}$$
$$A-B=\{\{۱,۲,۳\}\}=\{C\}\neq C$$
$$B-C=\{\{۱,۲\}\}\neq\varnothing$$

ضمناً $B-C\neq\{۱,۲\}$

۱۴۶. گزینه ۱

$$A=\{۲,۳,۵,۷\}$$
$$aRb \Leftrightarrow ۲a+۳b<۲۰$$

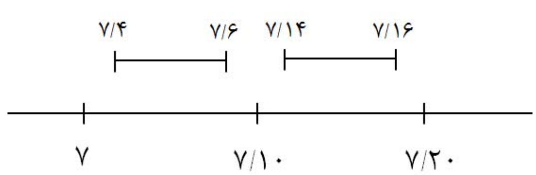


رابطه‌ی R هفت عضو دارد.

۱۴۷. گزینه ۳

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۶}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۶}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۲۴}=\frac{۷}{۲۴}$$

۱۴۸. گزینه ۲



$$\frac{۲+۲}{۲۰}=\frac{۴}{۲۰}=\frac{۲}{۱۰}=۰/۲$$

۱۴۹. گزینه ۴

$$\binom{5}{4}\frac{(4-1)!}{2}=5\times\frac{3!}{2}=5\times3=15$$

۱۵۰. گزینه ۲

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{9}{\equiv}5\overset{9}{\equiv}59 \\ a\overset{13}{\equiv}7\overset{13}{\equiv}59 \end{array}\right\}\Rightarrow a\overset{39}{\equiv}59\overset{39}{\equiv}20$$

$$a\overset{13}{\equiv}7\overset{13}{\equiv}59$$

۱۵۱. گزینه ۱

$$(abc)_5=(cba)_8$$
$$25a+5b+c=64c+8b+a$$
$$24a-3b=63c$$
$$8a-b=21c$$
$$b=8a-21c$$
$$a=3\Rightarrow c=1\Rightarrow b=3$$
$$\Rightarrow a+b+c=3+3+1=7$$

۱۵۲. گزینه ۴

$$11^3\overset{19}{\equiv}1\Rightarrow 11^{3k}\overset{19}{\equiv}1$$

اگر $a=3k$ آنگاه a قابل قبول است.پس مضارب دو رقمی ۳ را باید بشماریم که عبارت‌اند از:

$$12,15,18,\ldots,99$$

و تعداد آن‌ها برابر $\frac{99-12}{3}+1=30$ است.

۱۵۳. گزینه ۱

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$M^{(2)}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

۱۵۴. گزینه ۲

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = x_1 - 1 \\ y_2 = x_2 - 1 \\ y_3 = x_3 - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 7, \quad 0 \le y_i \le 4$$

تعداد جواب‌های این معادله طبق اصل شمول و عدم شمول برابر است با

$$\binom{7+3-1}{3-1} - 3 \times \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} - 3 \times \binom{4}{2} = 36 - 18 = 18$$

۱۵۵. گزینه ۱

طبق قاعده بیز احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\frac{\frac{55}{100} \times \frac{3}{100}}{\frac{55}{100} \times \frac{3}{100} + \frac{45}{100} \times \frac{5}{100}} = \frac{11}{26}$$