

* سوالات ریاضی (ریاضی دوم، آمار و احتمال، وینفرانس، اشتغال) استریض (خلع از کشور) به همراه پاسخ نهایی:

۱- اگر $f(x) = k - e^{rx}$ باشد دامنه تابع $g(x) = \sqrt{x f^{-1}(x)}$ چیست؟

$y = k - e^{rx} \rightarrow e^{rx} = k - y \rightarrow \ln e^{rx} = \ln(k - y)$

$\rightarrow rx(\ln e = \ln(k - y)) \rightarrow rx = \ln(k - y) \rightarrow x = \frac{1}{r} \ln(k - y)$

$\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{r} \ln(k - x)$

$g(x) = \sqrt{x f^{-1}(x)} \rightarrow x f^{-1}(x) \geq 0 \rightarrow x \times \frac{1}{r} \ln(k - x) \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \ln(k - x) = 0 \rightarrow k - x = 1 \\ \rightarrow x = k \end{cases}$

x	0	r	k
$x \times \frac{1}{r} \ln(k - x)$	$-$	$+$	$-$

$\rightarrow D: [0, r]$

* $k - x > 0 \rightarrow x < k$

۲- برای آنکه $f(x) = (1-a)x + \sqrt[3]{4x} - a$ نمودار، تابع $y = (1-a)x + \sqrt[3]{4x} - a$ همواره صعودی شود x چیست؟

x^r ضرب $> 0 \rightarrow 1 - a > 0 \rightarrow a < 1$ ① $a < 1$

$\ln x$ ضرب > 0 $\rightarrow a < -2$ ② $a < -2$

$\Delta < 0 \rightarrow (r\sqrt[3]{4})^2 + 4a(1-a) < 0 \rightarrow 4r^2 + 4a - 4a^2 < 0 \rightarrow a > 2$ ③ $a > 2$

$-2 < a < 1$ ④ $-2 < a < 1$

$\rightarrow a^2 - a - 4 > 0 \rightarrow (a+2)(a-2) > 0 \rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 2$ ⑤ $a < -2$ یا $a > 2$

① و ⑤ $\rightarrow a < -2$

۳- تابع $f(x) = a + \log(r^2x + b)^r$ از نقطه $(2, 11)$ و $(4, 15)$ می‌گذرد، a و b را بیابید.

$(2, 11) \in \text{ع} \rightarrow 11 = a + \log(4r^2 + b)^r \rightarrow \log(4r^2 + b)^r = 11 - a \rightarrow (4r^2 + b)^r = r^{11-a}$ ① 11

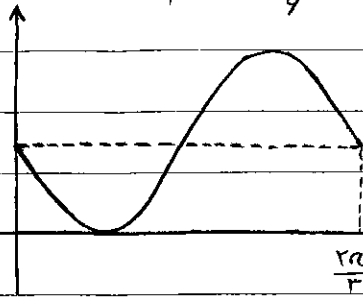
$(4, 15) \in \text{ع} \rightarrow 15 = a + \log(16r^2 + b)^r \rightarrow \log(16r^2 + b)^r = 15 - a \rightarrow (16r^2 + b)^r = r^{15-a}$ ② 15

$(2, 15) \in \text{ع} \rightarrow 15 = a + \log(4r^2 + b)^r \rightarrow (4r^2 + b)^r = r^{15-a}$ ③ 15

$(4, 11) \in \text{ع} \rightarrow 11 = a + \log(16r^2 + b)^r \rightarrow (16r^2 + b)^r = r^{11-a}$ ④ 11

$\frac{(15+b)^r}{(4r^2+b)^r} = \frac{r^{11-a}}{r^{15-a}} = \frac{1}{r^4} \rightarrow b=1$ ⑤ $\text{③} \leq \text{①} \rightarrow a=2$

4- کل دوره ی برومستی از نمودار تابع $y = 1 - \sin mx$ است. مقدار $x = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ در کدام است؟



از روی ضابطه: $T = \frac{2\pi}{|m|}$, طبق نمودار: $T = \frac{2\pi}{3}$

$\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|m|} \rightarrow |m| = 3 \rightarrow m = +3$

چون با توجه به نمودار تابع در ابتدا Min داریم پس Max (3) به دست می آید: $m = 3$

$y = 1 - \sin 3x$ $x = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \rightarrow y = 1 - \sin 3\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right)$

$= 1 - \sin\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right) = 1 - (-1) = 2$

5- نمودارهای دو تابع $f(x) = 4^x$ و $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x + \frac{3}{2}$ در نقطه A متقاطع اند. نقطه A نقطه $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ است؟

$f(x) = 4^x$

$4^x = \left(\frac{1}{4}\right)^x + \frac{3}{2} \rightarrow 4^x \left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{3}{2}$

$g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x + \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{4}\right)^x + \frac{3}{2}$

$x = \frac{1}{2} \rightarrow y = 2 \rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 2\right), \left(\frac{1}{4}, 2\right)$

فاصله $= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

9- برای ازاله نام مقدار m هر یک از $2x^2 - mx - 1 = 0$ و $mx^2 - mx - 1 = 0$ می توانیم $2x^2 - mx - 1 = 0$ را معادله $2x^2 - mx - 1 = 0$ می نویسیم؟

$2x^2 - mx - 1 = 0 \rightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{1}{2}, p = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$

$mx^2 - mx - 1 = 0 \rightarrow S = \alpha + \beta = (\alpha + \beta) - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) = \left(\frac{1}{2}\right) - 2(-1)\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow m = 13$

10- $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ در کدام ناحیه تعریف شده است؟

$1+x^2 > 0 \rightarrow x^2 > -1 \rightarrow \text{همیشه} \rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$x-x^2 > 0 \rightarrow x(1-x) > 0 \rightarrow 0 < x < 1 \rightarrow D_g = [0, 1]$

$\mathbb{R} - (-1, 1)$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1\right\}$$

کدام مقادیر را اثر x بر $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ می‌دهد؟

$$f\left(\frac{\pi}{r} - r \tan^{-1}\left(\frac{-1}{r}\right)\right) = 1$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{-1}{r}\right) = \alpha \rightarrow \tan \alpha = \frac{-1}{r}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{r} - r \tan^{-1}\left(\frac{-1}{r}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{r} - r\alpha\right) = \sin r\alpha = \frac{r \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{r\left(\frac{-1}{r}\right)}{1 + \frac{1}{r^2}} = \frac{-1}{\frac{r^2+1}{r^2}} = \frac{-r^2}{r^2+1}$$

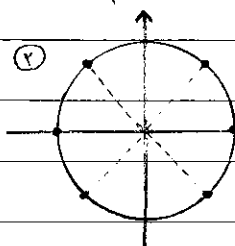
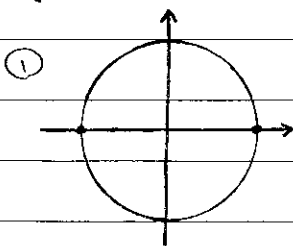
$$r \cos \theta = \frac{1}{\cos \theta} = r \cos \theta \cos \theta = 1$$

$$= r \cos^2 \theta = 1 \rightarrow r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 1$$

$$= r\left(\frac{1}{r} + \sin^2 \theta\right) = 1 \rightarrow 1 + r \sin^2 \theta = 1$$

با جواب $\sin^2 \theta = 0$ و $\sin \theta = 0$ می‌توانیم $\theta = k\pi$ یا $\theta = k\pi + \pi$ داشته باشیم.

$$\begin{cases} \sin \theta = 0 \rightarrow \theta = k\pi & (1) \\ \sin \theta = 0 \rightarrow r\theta = k\pi \rightarrow \theta = \frac{k\pi}{r} & (2) \\ \sin \theta = 0 \rightarrow r\theta = k\pi \rightarrow \theta = \frac{k\pi}{r} & (3) \end{cases}$$



$$x = k\pi + \frac{\pi}{r}$$

با جواب $\cos \theta = 1$ و $\cos \theta = -1$ می‌توانیم $\theta = 2k\pi$ یا $\theta = (2k+1)\pi$ داشته باشیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x})^2}{x} = \frac{1}{2}$$

۱۲ مشتق تابع $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \sin^{-1}\sqrt{x}\right)$ در نقطه $x = \frac{1}{4}$ را بیابید؟

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \sin^{-1}\sqrt{x}\right)\right)$$

$$\rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} \times \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 + (\sqrt{3})^2) = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

۱۳ دو دنباله a_n و b_n مفروض اند. دنباله $c_n = b_n - a_n$ را بیابید؟

$$c_n = b_n - a_n = n \ln(n+1) - n \ln(n) = n (\ln(n+1) - \ln(n))$$

$$= n \left(\ln \frac{n+1}{n}\right) = \ln \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) = \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) = \ln e = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

۱۴ تابع $f(x) = \begin{cases} \left[\frac{\sin x}{x}\right] \cos kx; & |x| < \frac{\pi}{2} \\ a; & x = 0 \end{cases}$ را بیابید؟

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x}\right] \cos kx = [1] \times 1 = 1 \rightarrow a = 1$$

۱۵ معادله $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ را برای طول مثبت ضلعها قطع کنید؟

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^3 - x^2} = \sqrt[3]{x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right)} \rightarrow y = x - \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow x - \frac{1}{3} = \sqrt[3]{x^3 - x^2} \rightarrow x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{27} = x^3 - x^2 \rightarrow \frac{1}{3}x - \frac{1}{27} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{9}$$

۱۶. بیضی‌ها را در a محصوره مقادیر a ، معادله درجه سوم $3x^3 + ax - 1 = 0$ فقط یک ریشه در $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ دارد؟

$f(a) \cdot f(b) < 0 \rightarrow (3(\frac{1}{3})^3 + a - 1)(3(\frac{1}{2})^3 + \frac{a}{2} - 1) < 0$

$\rightarrow (\frac{a}{3} - \frac{1}{3})(\frac{3a}{2} - \frac{5}{2}) < 0 \rightarrow (3a - 1)(3a - 5) < 0 \rightarrow (3a - 1)(3a - 5) < 0$

$\rightarrow \frac{5}{3} < a < \frac{1}{3} \rightarrow (\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$

۱۷. اگر زاویه بین دو مماس به دایره در نقطه $(x, y) = |x-1|$ باشد، $\tan \theta$ را بیابید؟

$y = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}} ; x > 1 \\ -\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}} ; x < 1 \end{cases} \rightarrow y' = \frac{\sqrt{x^2+3} - \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}(x-1)}{x^2+3}$

$\begin{cases} f'_+(1) = \frac{1}{2} \\ f'_-(1) = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \tan \theta = \left| \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} \right| = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

۱۸. اگر تابع f در $x = -2$ مشتق‌پذیر و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 3}{h} = \frac{1}{2}$ باشد، $f'(-2)$ را بیابید؟

$(x^r f(x))' = rx f(x) + x^r f'(x) \quad x = -2 \rightarrow -2 f(-2) + 4 f'(-2) = -2(-2) + 4(\frac{1}{2})$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 3}{h} = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} f(-2) = -3 \\ f'(-2) = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow 12 + 2 = 14$

۱۹. تابع $f(x) = x + e^{rx}$ مفروض است. معادله مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه $(1, 1)$ را بیابید.

$A \Big|_y^1 \in f^{-1} \leftrightarrow A \Big|_x^1 \in f \rightarrow x + e^{rx} = 1 \rightarrow x = 0 \rightarrow A \Big|_0^1$

$f'(x) = 1 + r e^{rx} \rightarrow m_{\text{مماس}} = f'(0) = 1 + r = 3 \rightarrow f^{-1} \Big|_m^1 = \frac{1}{3}$

$\rightarrow y - 1 = \frac{1}{3}(x - 0) \rightarrow y = \frac{1}{3}x + 1 \rightarrow 3y - x = 3$

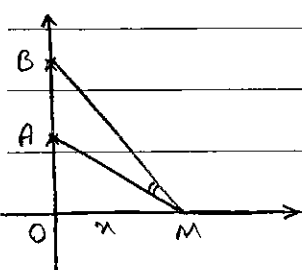
۲۰. خط قائم بر منحنی $x^2y - \ln(2x-y) = 12$ در نقطه $(2, 3)$ ، محور OX را در کدام طول قطع می‌کند؟

$$x^2y - \ln(2x-y) = 12 \rightarrow y' = \frac{f'_x}{f'_y} = \frac{2xy - \frac{2}{2x-y}}{x^2 - \frac{-1}{2x-y}}$$

$$(2, 3) \rightarrow y' = m_{\text{مماس}} = \frac{2 \times 2 \times 3 - \frac{2}{4-3}}{2^2 - \frac{-1}{4-3}} = \frac{10}{5} = 2 \rightarrow m'_{\text{عمود}} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \text{معادله خط عمود: } y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2 \xrightarrow{y=0} \frac{1}{2}x + 2 = 0 \rightarrow x = -4$$

۲۱. در نقطه A و B بر یکسایه های OA و OB بر روی محور قائم قرار دارند. نقطه M بر روی محور افقی OX به طوری که AM و BM عمود بر هم باشند. AM را در چه نقطه M بر محور OX قطع می‌کند؟



$$OM^2 = x^2 = OA \times OB = 5 \times 8 = 40 \rightarrow x = 2\sqrt{10}$$

۲۲. تابع $f(x) = \sin x - 2 \cos x$ در کدام بازه صعودی و در کدام بازه نزولی است؟ $x \in [0, 2\pi]$

$$f'(x) = \cos x + 2 \sin x = 2 \cos x (\sin x - 1)$$

$$f'(x) > 0 \rightarrow 2 \cos x (\sin x - 1) > 0 \rightarrow \cos x < 0 \rightarrow \text{بازه } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

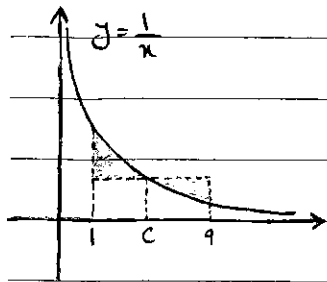
$$f''(x) = -\sin x + 2 \cos x = -\sin^2 x + 2 \sin x + 2 \cos^2 x$$

$$= -\sin^2 x + 2 \sin x + 2(1 - \sin^2 x) = -3 \sin^2 x + 2 \sin x + 2 \xrightarrow{\sin x = t} -3t^2 + 2t + 2$$

$$f''(x) < 0 \rightarrow -3t^2 + 2t + 2 < 0 \rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-\frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow t < -\frac{1}{3} \text{ یا } t > 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x > 1 \rightarrow \emptyset \\ \sin x < -\frac{1}{3} \rightarrow \text{بازه } \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right) \end{cases}$$

۲۳ - متوسط هندسی تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ با میانگین حسابی در یک محدوده c برابری است؟



$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \rightarrow \frac{1}{c} = \frac{\int_1^9 \frac{1}{x} dx}{9-1}$$

$$\rightarrow \frac{1}{c} = \frac{2 \ln 3}{8} \rightarrow c = \frac{4}{\ln 3}$$

- ۱ $\frac{3}{\ln 3}$ (۱)
- ۲ $\frac{3}{\ln 3}$ (۲)
- ۳ $\frac{3}{\ln 3}$ (۳)
- ۴ $\frac{3}{\ln 3}$ (۴)
- ۵ $\frac{4}{\ln 3}$ (۵)

$$* \int_1^9 \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^9 = \ln 9 - \ln 1 = 2 \ln 3$$

۲۴ - جواب $\int_0^k \sqrt{(x^2 - 2x)^2} dx$ چیست؟

$$\int_0^k \sqrt{(x^2 - 2x)^2} dx = \int_0^k |x^2 - 2x| dx = \int_0^r (rx - x^2) dx + \int_r^k (x^2 - 2x) dx$$

$$= \left(\frac{rx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^r \right) + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \Big|_r^k \right)$$

$$= \left(\left(\frac{k}{2} - \frac{1}{3} \right) - (0 - 0) \right) + \left(\left(\frac{4k}{3} - 4 \right) - \left(\frac{1}{3} - k \right) \right) = \frac{k}{2} - \frac{1}{3} + \frac{4k}{3} - 4 - \frac{1}{3} + k = \frac{7k}{3} - \frac{10}{3} = \frac{19}{3}$$

- ۱ $\frac{19}{3}$ (۱)
- ۲ $\frac{20}{3}$ (۲)
- ۳ $\frac{1}{3}$ (۳)
- ۴ $\frac{1}{3}$ (۴)

۲۵ - در داده‌های آماري، نمودار ستونی زیر، میانگین متناهی مدارها را نشان می‌دهد. کدام است؟

سرت	برگ	ص: ۳۲
۲	۳ ۵ ۵ ۷ ۷	۱ (۲)
۳	۰ ۱ ۲ ۲ ۲ ۳ ۴	۱, ۵ (۳)
۴	۲ ۴ ۴ ۵	۲ (۴) متناهی مدارها: -۹, -۷, -۷, -۵, -۵, -۲, -۱ ۰, ۰, ۰, ۱, ۴, ۱۰, ۱۲, ۱۳

$$\text{میانگین} = \frac{-۳۹ + ۰ + ۰ + ۰ + ۵۲}{۱۴} = \frac{۱۳}{۱۴} \text{ (۱)}$$

۲۶ - در ۲۵ داده آماري مجموع ۲۷۵ مدارها، مجموع مربعات آن‌ها ۳۲۵۰ می‌باشد. ضریب تغییرات در این داده‌ها کدام است؟

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۲۷۵}{۲۵} = ۱۱, \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{۳۲۵۰}{۲۵} - ۱۱^2 = ۱۳۰ - ۱۲۱ = ۹ \rightarrow \sigma = ۳$$

بکاربندی روش نوسان روزانه در بازار بورس (مدیران ریسک‌پذیر)

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۳}{۱۱} \text{ (۲۷۲۷)}$$

- ۱ $\frac{20}{27}$ (۱)
- ۲ $\frac{24}{25}$ (۲)
- ۳ $\frac{24}{27}$ (۳)
- ۴ $\frac{27}{27}$ (۴)