

* سوالات ریاضی (ریاضی و غیره) آمار و احتمال (تجزیه و تحلیل) و غیره (استدلال) (خارج از کشور) به همراه پاسخ نهایی:

۱- اگر $f(x) = k - e^{rx}$ باشد دامنه تابع $g(x) = \sqrt{x f^{-1}(x)}$ چیست؟

$y = k - e^{rx} \rightarrow e^{rx} = k - y \rightarrow \ln e^{rx} = \ln(k - y)$

$\rightarrow rx(\ln e = \ln(k - y)) \rightarrow rx = \ln(k - y) \rightarrow x = \frac{1}{r} \ln(k - y)$

$\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{r} \ln(k - x)$

$g(x) = \sqrt{x f^{-1}(x)} \rightarrow x f^{-1}(x) \geq 0 \rightarrow x \times \frac{1}{r} \ln(k - x) \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \ln(k - x) = 0 \rightarrow k - x = 1 \rightarrow x = k \end{cases}$

x	0	k	k
$x \times \frac{1}{r} \ln(k - x)$	$-$	$+$	$-$

$\rightarrow D: [0, k]$

* $k - x > 0 \rightarrow x < k$

۲- برای $a > 0$ مقدار a و r پیدا کنید تا $y = (1-a)x + r\sqrt{4x} - a$ همواره در $[0, \infty)$ صعودی باشد.

x^r ضرب $> 0 \rightarrow 1 - a > 0 \rightarrow a < 1$ ① $a < 1$

$\Delta < 0 \rightarrow (r\sqrt{4})^2 + 4a(1-a) < 0 \rightarrow 4r^2 + 4a - 4a^2 < 0 \rightarrow r^2 + a - a^2 < 0$ $a > r$ ② $a < -r$

$\rightarrow a^2 - a - r > 0 \rightarrow (a+r)(a-r) > 0 \rightarrow a < -r \leq a > r$ ③

① و ③ $\rightarrow a < -r$

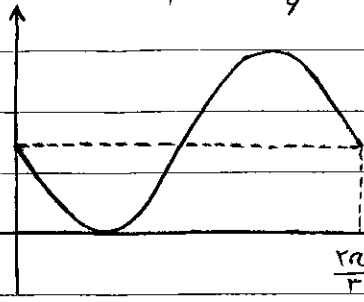
۳- تابع $f(x) = a + \log_r(rx + b)^r$ از نقطه $(2, 11)$ و $(4, 15)$ می‌گذرد، a و r را بیابید.

$(2, 11) \in \text{ع} \rightarrow 11 = a + \log_r(2r + b)^r \rightarrow \log_r(2r + b)^r = 11 - a \rightarrow (2r + b)^r = r^{11-a}$ ①

$(4, 15) \in \text{ع} \rightarrow 15 = a + \log_r(4r + b)^r \rightarrow (4r + b)^r = r^{15-a}$ ②

$\frac{(2r + b)^r}{(4r + b)^r} = \frac{r^{11-a}}{r^{15-a}} = \frac{1}{r^4} \rightarrow b = 1$ ④ $\rightarrow a = r$

4- کل دوره و موقعی از نمودار تابع $y = 1 - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطه $x = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ را بیابید؟



از روی ضابطه: $T = \frac{2\pi}{|m|}$, طبق نمودار: $T = \frac{2\pi}{3}$

$\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|m|} \rightarrow |m| = 3 \rightarrow m = +3$

چون با توجه به نمودار تابع در ابتدا Min داریم پس Max (3) به دست می آید: $m = 3$

$y = 1 - \sin 3x$ $x = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \rightarrow y = 1 - \sin 3\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right)$

$= 1 - \sin\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right) = 1 - (-1) = 2$

5- نمودارهای دو تابع $f(x) = 4^x$ و $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x + \frac{3}{2}$ در نقطه A منقطع اند. فاصله نقطه A، نقطه $\left(-\frac{1}{4}, 1\right)$ را بیابید؟

$f(x) = 4^x$

$4^x = \left(\frac{1}{4}\right)^x + \frac{3}{2} \rightarrow 4^x \left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{3}{2}$

$g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x + \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{4}\right)^x + \frac{3}{2}$

$x = \frac{1}{2}$ (دستی از تابع) $\rightarrow y = 2 \rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 2\right), \left(-\frac{1}{4}, 1\right)$

فاصله = $\sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

9- بر اساس لایب هسپتال از روی مقدار m هر یک از 2 معادله درجه دوم $\Delta x^2 - mx - \Lambda = 0$ و $\Lambda x^2 - mx - \Lambda = 0$ بتوانیم معادله $2x^2 - x - 2 = 0$ بیابیم؟

$2x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{1}{2}, p = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$

$\Lambda x^2 - mx - \Lambda = 0 \rightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{m}{\Lambda}, p = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$

$\frac{1}{2} = \frac{m}{\Lambda} \rightarrow m = \frac{\Lambda}{2} = \frac{13}{2}$

10- $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ را بیابید. f و g را بیابید؟

$1+x^2 > 0 \rightarrow x^2 > -1 \rightarrow \text{همیشه} \rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$x-x^2 > 0 \rightarrow x(1-x) > 0 \rightarrow 0 < x < 1 \rightarrow D_g = [0, 1]$

$\mathbb{R} - (-1, 1)$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \frac{1-x^r}{1+x^r} \leq 1\}$$

کدام مقادیر را اثر x داشته باشد $\frac{1-x^r}{1+x^r}$ و برقرار است

$$r \cos\left(\frac{\pi}{r} - r \tan^{-1}\left(\frac{-1}{r}\right)\right) = 1$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{-1}{r}\right) = \alpha \rightarrow \tan \alpha = \frac{-1}{r}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{r} - r \tan^{-1}\left(\frac{-1}{r}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{r} - r\alpha\right) = \sin r\alpha = \frac{r \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{r\left(\frac{-1}{r}\right)}{1 + \frac{1}{r^2}} = \frac{-1}{\frac{r^2+1}{r^2}} = \frac{-r^2}{r^2+1}$$

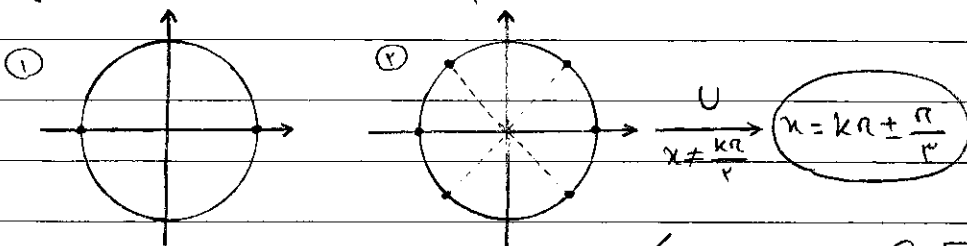
$$r \cos \theta = \frac{1}{\cos \theta} = r \cos \theta \cos \theta = 1$$

$$= \frac{r \times r \cos^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta} = \frac{r(\cos^2 \theta + \cos^2 \theta) - 1}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{r\left(\frac{1}{r} + \cos^2 \theta\right) - 1}{\cos^2 \theta} = \frac{1 + r \cos^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta} = r$$

با جواب $\sin^2 \theta = 0$ $\sin \theta = 0$ $\sin^2 \theta = 0$ $\sin \theta = 0$ $\sin^2 \theta = 0$ $\sin \theta = 0$

$$\begin{cases} \sin \theta = 0 \rightarrow \theta = k\pi & (1) \\ \sin^2 \theta = 0 \rightarrow r\theta = k\pi \rightarrow \theta = \frac{k\pi}{r} & (2) \\ \sin^2 \theta = 0 \rightarrow r^2 \theta = k\pi \rightarrow \theta = \frac{k\pi}{r^2} & (3) \end{cases}$$



$$r \cos \theta = \frac{1 - \cos \sqrt{\theta}}{\theta}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x})^2}{x} = \frac{1}{r}$$

۱۲ مشتق تابع $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \sin^{-1}\sqrt{x}\right)$ در نقطه $x = \frac{1}{4}$ را بیابید؟

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \sin^{-1}\sqrt{x}\right)\right)$$

$$\rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \times \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}} (1 + (\sqrt{3})^2) = \frac{1}{\frac{1}{2}} \times 4 = 8$$

۱۳ دو دنباله a_n و b_n متوالی هستند. دنباله $\{b_n - a_n\}$ صفر است؟

$$c_n = b_n - a_n = n \ln(n+1) - n \ln(n) = n (\ln(n+1) - \ln(n))$$

$$= n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \ln\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) = \ln e = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

۱۴ $f(x) = \begin{cases} \left[\frac{\sin x}{x}\right] \cos x & ; x < \frac{\pi}{2} \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ در $x=0$ پیوسته است؟

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x}\right] \cos x = [1^-] \times 1 = 0 \rightarrow a = 0$$

۱۵ معنی بهمان $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ برای x بزرگ مثبت ضریب قطع می‌کند؟

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^3 - x^2} = \sqrt[3]{x^2\left(x - \frac{1}{x}\right)} \rightarrow y = x - \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow x - \frac{1}{3} = \sqrt[3]{x^3 - x^2} \rightarrow x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{27} = x^3 - x^2 \rightarrow \frac{1}{3}x - \frac{1}{27} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{9}$$

۱۶. بی‌نهایتی را در a محصوره مقادیر a ، معادله درجه سوم $3x^3 + ax - 1 = 0$ فقط یک ریشه در $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ دارد؟

$f(a) \cdot f(b) < 0 \rightarrow (3(\frac{1}{3})^3 + a - 1)(3(\frac{1}{2})^3 + a - 1) < 0$

$\rightarrow (\frac{a}{3} - \frac{1}{3})(\frac{a}{2} - \frac{5}{8}) < 0 \rightarrow (\frac{3a-1}{3})(\frac{4a-5}{8}) < 0 \rightarrow (3a-1)(4a-5) < 0$

$\rightarrow \frac{5}{4} < a < \frac{1}{3} \rightarrow (\frac{5}{4}, \frac{1}{3})$

۱۷. اگر زاویه بین دو مماس به دایره در نقطه (x, y) شعاع باشد $y = |x-1|$ و $\tan \theta$ را بیابید؟

$y = \begin{cases} x-1 & ; x \geq 1 \\ -(x-1) & ; x < 1 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} 1 & ; x \geq 1 \\ -1 & ; x < 1 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = 1 \\ f'_-(1) = -1 \end{cases} \rightarrow \tan \theta = \left| \frac{1+1}{1-1} \right| = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

۱۸. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-r+h) + r}{h} = \frac{1}{r}$ و $x = -r$ ، $f(x)$ را بیابید؟

$(x^r f(x))' = rx f(x) + x^r f'(x) \quad x = -r \rightarrow -r f(-r) + r f'(-r) = -r(-r) + r(\frac{1}{r})$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-r+h) + r}{h} = \frac{1}{r} \rightarrow \begin{cases} f(-r) = -r \\ f'(-r) = \frac{1}{r} \end{cases} = 1r + r = 2r$

۱۹. تابع $f(x) = x + e^{rx}$ مفروض است. معادله مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه $(1, 1)$ را بیابید.

$A \Big|_1^1 \in f^{-1} \leftrightarrow A \Big|_1^1 \in f \rightarrow x + e^{rx} = 1 \rightarrow x = 0 \rightarrow A \Big|_0^1$

$f'(x) = 1 + re^{rx} \rightarrow m_{\text{مماس}} = f'(0) = 1 + r = r \rightarrow f^{-1} \Big|_1^1 m' = \frac{1}{r}$

$\rightarrow y - 1 = \frac{1}{r}(x - 1) \rightarrow y = \frac{1}{r}x - \frac{1}{r} \rightarrow ry - x = -1$

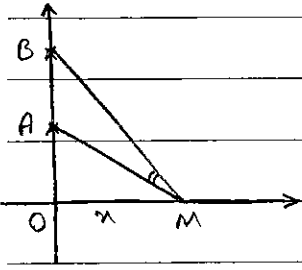
۲۰. خط قائم بر شعاع r در نقطه (r, r) محور cos را با کدام طول قطع می کند؟

$$x^2 y - \ln(2x - y) - 12 = 0 \rightarrow y' = \frac{f'_x}{f'_y} = \frac{2xy - \frac{r}{2x-y}}{x^2 - \frac{-1}{2x-y}}$$

$$(r, r) \rightarrow y' = m = \frac{2x^2 y^2 - \frac{r}{2x-y}}{x^2 - \frac{-1}{2x-y}} = \frac{10}{5} = 2 \rightarrow m'_{\frac{r}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \text{معادله خط عمود: } y - r = \frac{1}{2}(x - r) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + r \xrightarrow{y=0} \frac{1}{2}x + r = 0 \rightarrow x = -2r$$

۲۱. در نقطه A و B بر یک خط عمود OA و OB بر روی محور قائم قرار دارند. نقطه M بر روی محور افقی با کدام واحد از O تا M افتاده است؟
 زاویه AMB بیشترین مقدار ممکن چقدر است؟



$$OM^2 = x^2 = OA \times OB = 5 \times 8 = 40 \rightarrow x = 2\sqrt{10}$$

۲۲. تابع $f(x) = \sin x - 2 \cos x$ در کدام بازه صعودی و در کدام آن نزولی است؟

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x - 2 \cos x = 2 \cos x (\sin x - 1)$$

$$f'(x) > 0 \rightarrow 2 \cos x (\sin x - 1) > 0 \rightarrow \cos x < 0 \rightarrow \text{بازه } \pi < x < 2\pi$$

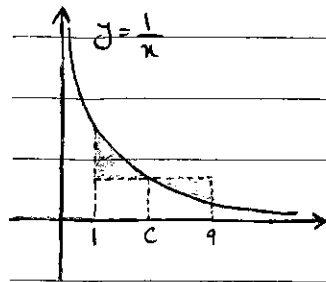
$$f''(x) = -2 \sin x (\sin x - 1) + 2 \cos^2 x = -2 \sin^2 x + 2 \sin x + 2 \cos^2 x$$

$$= -2 \sin^2 x + 2 \sin x + 2(1 - \sin^2 x) = -4 \sin^2 x + 2 \sin x + 2 \xrightarrow{\sin x = t} -4t^2 + 2t + 2$$

$$f''(x) < 0 \rightarrow -4t^2 + 2t + 2 < 0 \rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow t < -\frac{1}{2} \text{ یا } t > 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x > 1 \rightarrow \emptyset \\ \sin x < -\frac{1}{2} \rightarrow \text{بازه } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \end{cases}$$

۲۳ - متوسط هندسی تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ با میانگین هم‌وزن C و میانگین C در یک سیمای بی‌وزن برابر است؟



$$f(C) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \rightarrow \frac{1}{c} = \frac{\int_1^9 \frac{1}{x} dx}{9-1}$$

$$\rightarrow \frac{1}{c} = \frac{2 \ln 3}{8} \rightarrow c = \frac{4}{\ln 3}$$

- ۱ $\frac{3}{\ln 3}$ (۱)
- ۲ $\frac{3}{\ln 3}$ (۲)
- ۳ $\frac{3}{\ln 3}$ (۳)
- ۴ $\frac{3}{\ln 3}$ (۴)
- ۵ $\frac{4}{\ln 3}$ (۵)

$$* \int_1^9 \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^9 = \ln 9 - \ln 1 = 2 \ln 3$$

۲۴ - طول $\int_0^k \sqrt{(x^2 - rx)^2} dx$ چقدر است؟

$$\int_0^k \sqrt{(x^2 - rx)^2} dx = \int_0^k |x^2 - rx| dx = \int_0^r (rx - x^2) dx + \int_r^k (x^2 - rx) dx$$

$$= \left(rx \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^r \right) + \left(\frac{x^3}{3} - rx \frac{x}{2} \Big|_r^k \right)$$

$$= \left(\left(k \frac{1}{3} - \frac{0}{3} \right) - \left(0 - 0 \right) \right) + \left(\left(\frac{4k}{3} - 14 \right) - \left(\frac{1}{3} - k \right) \right) = 1 - 14 + \frac{4k}{3} = \frac{4k}{3} - 13$$

- ۶ $\frac{14}{3}$ (۱)
- ۷ $\frac{20}{3}$ (۲)
- ۸ $\frac{1}{3}$ (۳)
- ۹ $\frac{1}{3}$ (۴)

۲۵ - در داده‌های آماري، نمودار ستونی زیر، میانگین متناهی مدارها را نشان می‌دهد. کدام است؟

س	بزرگی	شماره
۲	۳ ۵ ۵ ۷ ۷	۱ (۲)
۳	۰ ۱ ۲ ۲ ۲ ۳ ۴	۱, ۵ (۳)
۴	۲ ۴ ۴ ۵	۲ (۴)

متناهی مدارها: -۹, -۷, -۷, -۵, -۵, -۲, -۱
۰, ۰, ۰, ۱, ۴, ۱۰, ۱۲, ۱۳

$$\text{میانگین} = \frac{-34 + 0 + 0 + 0 + 0 + 52}{14} = \frac{18}{14} = \frac{9}{7}$$

۲۶ - در ۲۵ داده آماري (مجموع ۴ داده ۲۷۵) و مجموع مربعات آن‌ها ۳۲۵۰. ضریب تغییرات در این داده‌ها کدام است؟

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{275}{25} = 11, \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{3250}{25} - 11^2 = 130 - 121 = 9 \rightarrow \sigma = 3$$

بکارزونی توصیف روزانه‌ها
ابراهم نجفی (مدیر رضایت مشتری)

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{11} \approx 0,2727$$

- ۱ $0,2572$ (۱)
- ۲ $0,2445$ (۲)
- ۳ $0,2472$ (۳)
- ۴ $0,2727$ (۴)

	1
	2
	3
	4
	5
	6
	7
	8
	9
	10
	11
	12
	13
	14
	15
	16
	17
	18
	19
	20
	21
	22
	23
	24
	25
	26
	27
	28
	29