پاسخ تشریحی دروس ریاضی ۲، حسابان و دیفرانسیل کنکور سراسری ۹۶

۱۰۱- گزینه ۱

$$y = 3 - e^x \Rightarrow e^x = 3 - y \Rightarrow x = \ln(3-y)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \ln(3-x)$$

$$g(x) = \sqrt{x f^{-1}(x)} = \sqrt{x \ln(3-x)}$$

$$x \ln(3-x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{I}: x \geq 0 \ \& \ \ln(3-x) \geq 0 \Rightarrow 3-x \geq 1 \Rightarrow x \leq 2 \ \text{II} \\ \text{I} \cap \text{II} \rightarrow 0 \leq x \leq 2 \\ \text{III}: x \leq 0 \ \& \ \ln(3-x) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3 - x \leq 1 \Rightarrow x \geq 2 \quad \text{IV}$$

$$\text{III} \cap \text{IV} = \emptyset$$

درنتیجه جواب برابر $[0,2]$ می‌شود!

راه دوم: برای حل نامعادله $x \ln(3-x) \geq 0$ با توجه به گزینه‌ها می‌توان با عددگذاری حل کرد! $x=0$ در نامعادله صدق می‌کند بنابراین گزینه ۳ و ۴ رد می‌شود. همچنین $x=2.5$ در این نامعادله صدق نمی‌کند پس گزینه ۲ رد می‌شود و جواب گزینه ۱ است

۱۰۲ ـ گزینه ۳

$$x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$$

برای اینکه هر دو ریشه مثبت باشند، باید حاصل جمع و حاصل ضرب این ریشه‌ها مثبت باشد. در نتیجه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} S>0 \Rightarrow \dfrac{2(a-2)}{1} > 0 \Rightarrow a>2 \\ P>0 \Rightarrow \dfrac{14-a}{1} > 0 \Rightarrow a<14 \end{array}\right\} \Rightarrow 2<a<14$$

۱۰۳ ـ گزینه ۳

$$f(x) = a + \log_2(bx-4)$$

$$f(2) = 6 \Rightarrow a + \log_2(2b-4) = 6 \quad \text{I}$$

$$f(12) = 10 \Rightarrow a + \log_2(12b-4) = 10 \quad \text{II}$$

$$\text{II} - \text{I} \Rightarrow \log_2(12b-4) - \log_2(2b-4) = 4$$

$$\Rightarrow \log_2\left(\frac{12b-4}{2b-4}\right) = 4 \Rightarrow \frac{6b-2}{b-2} = 2^4 = 16$$

$$\Rightarrow 6b-2 = 16b-32 \Rightarrow 10b = 30 \Rightarrow \boxed{b=3} \quad \text{III}$$

$$\text{I}, \text{III} \Rightarrow a + \log_2(6-4) = 6 \Rightarrow \boxed{a=5}$$

۱۰۴- گزینه ۱

با توجه با شکل، دوره تناوب تابع برابر 4π است. بنابراین داریم:

$$\frac{2\pi}{|m|} = 4\pi \Rightarrow m = \pm\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} + 2\cos mx \xrightarrow[\cos(-x)=\cos x]{m=\pm\frac{1}{2}} y = \frac{1}{2} + 2\cos\frac{x}{2}$$

$$y\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

۱۰۵- گزینه ۳

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x} = 3^x + \frac{8}{3} \Rightarrow 3^{-x} = 3^x + \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow 3^{2x} + \frac{8}{3}\,3^x - 1 = 0$$

$$y = 3^x \Rightarrow y^2 + \frac{8}{3}y - 1 = 0$$

$$\Delta = \frac{64}{9} + 4 = \frac{100}{9} \qquad y = \frac{-\frac{8}{3} \pm \frac{10}{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{x = -1} \to A\left(-1, 3^{-1} + \frac{8}{3}\right) = (-1, 3) \\ y = -3 \quad \times \end{cases}$$

$$\text{جواب} = \sqrt{(-1+1)^2 + (3-1)^2} = 2$$

۱۰۶ - گزینه ۴

$$2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0 \rightarrow \begin{cases} S=\frac{m+1}{2} \\ P=\frac{1}{16} \end{cases}$$

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2 \Rightarrow (\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta})=4$$

$$\Rightarrow S+2\sqrt{P}=4 \Rightarrow \frac{m+1}{2}+2\times\frac{1}{4}=4$$

$$\Rightarrow \frac{m+2}{2}=4 \Rightarrow m+2=8 \Rightarrow \boxed{m=6}$$

---

۱۰۷ - گزینه ۲

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2} \rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$$

$$g(x)=\sqrt{x-x^2} \Rightarrow D_g=[0,1]$$

$$x-x^2\geq 0 \Rightarrow 0\leq x\leq 1$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}-\{-1,1\} \mid 0\leq\frac{1+x^2}{1-x^2}\leq 1\}$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2}\geq 0 \Rightarrow 1-x^2>0 \Rightarrow -1<x<1 \quad \text{(I)}$$

$$\text{(II)}$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2}-1\leq 0 \Rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2}\leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 1-x^2<0 \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<-1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{(I)}\cap\text{(II)} \Rightarrow \boxed{x=0}$$

$$\Rightarrow D_{gof} = \{ x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} \mid x = 0 \} = \{0\}$$

۱۰۸- گزینهٔ ۱

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

۱۰۹- گزینهٔ ۳

$$\frac{1}{\sin 15} - \frac{1}{\cos 15} = \frac{\cos 15 - \sin 15}{\sin 15 \cos 15} = \frac{\pm\sqrt{(\cos 15 - \sin 15)^2}}{\frac{1}{2}\sin 30}$$

$$\xrightarrow{\cos 15 > \sin 15} \frac{\sqrt{1 - \sin 30}}{\frac{1}{2}\sin 30} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}}{\frac{1}{4}} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

۱۱۰- گزینهٔ ۲

$$\sin x \sin 3x = \cos 2x \rightarrow -\frac{1}{2}\{\cos 4x - \cos 2x\} = \cos 2x$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos 4x + \cos 2x = 0 \Rightarrow 2\cos 3x \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad \text{(I)} \\ \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{(II)} \end{cases}$$

(۵) صفر

$$\text{(I)} \cup \text{(II)} \rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

۱۱۱- گزینه ۱

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos 3x} - \sqrt{\cos x}}{x^2} \times \frac{\sqrt{\cos 3x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos 3x} + \sqrt{\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{9x^2}{2} - 1 + \frac{x^2}{2}}{2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-4x^2}{2x^2} = -2$$

۱۱۲- گزینه ۲

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \tan^{-1}\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x^2}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \tan^{-1}\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f'(2\sqrt{3}) = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{12}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \tan^{-1}(\sqrt{3})\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{4} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{16}$$

۱۱۳- گزینه ۴

$$a_{2n} = \left[\frac{(-1)^{2n}}{2n}\right] = \left[\frac{1}{2n}\right] \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2n}\right]$$

$$= [0^+] = 0$$

$$a_{2n+1} = \left[\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\right] = \left[\frac{-1}{2n+1}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{-1}{2n+1}\right] = [0^-] = -1$$

چون ۲ زیر دنباله از دنباله a_n همگرا به مقادیر متفاوتی هستند، لذا دنباله a_n واگرا است.

۱۱۴- گزینه ۱

$$\text{می‌دانیم}: \begin{cases} [x]+[-x]=0 & x\in Z \\ [x]+[-x]=-1 & x\notin Z \end{cases}$$

بنابراین تابع $f(x)$ فقط در نقاط صحیح $x=k$ ممکن است ناپیوسته باشد:

I

$$f(k) = a$$

II

$$\lim_{x\to k} f(x) = \lim_{x\to k}([x]+[-x]) = -1$$

$$\text{I}, \text{II} \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

(۷)

۱۱۵- تمرین ۲

$$f(x) = x\sqrt{\frac{4x-3}{x-1}}$$

$$y_{\text{مجانب}} = mx + h \qquad \begin{cases} m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ h = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) \end{cases}$$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{\frac{4x-3}{x-1}}}{x} = 2$$

$$h = \lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\frac{4x-3}{x-1}} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\sqrt{4x-3} - 2\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x-1}}$$

$$\times \frac{\sqrt{4x-3} + 2\sqrt{x-1}}{\sqrt{4x-3} + 2\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(4x-3-4x+4\right)}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{4x-3} + 2\sqrt{x-1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$$

۱۱۶- گزینه ۳

$$f(x)=x^3-3x+1$$

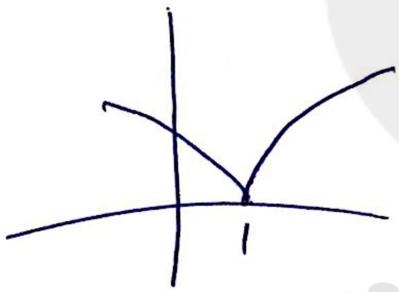
$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}-1+1>0$$

$$f\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{8}{125}-\frac{6}{5}+1=\frac{8}{125}-\frac{1}{5}<0$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)f\left(\frac{2}{5}\right)<0 \xRightarrow{\text{قضیه مقدار میانی}}$$ f در بازه $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{3}\right)$ ریشه دارد

۱۱۷- گزینه ۴

با رسم نمودار $y=|\ln x|$ داریم:



پس در نقطه $x=1$ مشتق راست را حساب می‌کنیم!

$$m_1=f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{|\ln x|-|\ln 1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}$$

$$\xlongequal{Hop}\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$$

$$m_2 = f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{|\ln x| - |\ln 1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-\ln x}{x-1}$$

$$\overset{Hop}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{-\frac{1}{x}}{1} = -1$$

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{2}{0}\right| = \infty$$

۱۱۸ـ گزینه ۳

چون در حد $\lim_{x\to 4} \frac{f(x)+7}{x-4}$ ، مخرج به ازای $x=4$ صفر می‌شود و این حد موجود است، لذا صورت نیز باید در $x=4$ صفر شود. بنابراین: $\boxed{f(4)=-7}$

$$\lim_{x\to 4} \frac{f(x)+7}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = f'(4) = -\frac{3}{2}$$

$$y = \frac{f(2x)}{x} \to y' = \frac{2x f'(2x) - f(2x)}{x^2}$$

$$\to y'(2) = \frac{4f'(4) - f(4)}{4} = \frac{4\times\left(-\frac{3}{2}\right)+7}{4} = \frac{1}{4}$$

۱۱۹_ گزینه ۴

$$f(x)=x+\ln x \rightarrow f'(x)=1+\frac{1}{x}$$

$$f^{-1}(x)=x \Rightarrow x=f(x) \Rightarrow x+\ln x=x$$

$$\Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$\rightarrow A(1,1)$$

$$(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

خط مماس: $y-1=\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow 2y-2=x-1$

$$\Rightarrow \boxed{2y-x=1}$$

۱۲۰_ گزینه ۴

$$x^3+y^3-3xy-3=0 \qquad A(1,2)$$

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{3x^2-3y}{3y^2-3x}$$

$$\rightarrow y'(1,2)=-\frac{3-6}{12-3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

$\rightarrow m_{\text{قائم}}=-3 \rightarrow$ خط قائم: $y-2=-3(x-1)$

$$x=0 \rightarrow \boxed{y=5}$$

۱۲۱- تمرین ۳

$$\frac{dV}{dt} = 3 \qquad \frac{dS}{dt} = ?$$

$$R = 4$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi R^2 \times \frac{dR}{dt}$$

$$\Rightarrow 3 = 64\pi \frac{dR}{dt} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{3}{64\pi}$$

۱٫۵

$$S = 4\pi R^2 \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 8\pi R \frac{dR}{dt} = 8\pi \times 4 \times \frac{3}{64\pi} = \frac{3}{2}$$

۱۲۲- تمرین ۳

$$f(x) = \cos^2 x - 2\cos x \qquad x \in [0, 2\pi]$$

$$f'(x) = -\sin 2x + 2\sin x = -2\sin x \underbrace{(\cos x - 1)}_{\le 0} \le 0$$

$$\Rightarrow \sin x \ge 0 \Rightarrow x \in [0, \pi] \quad \text{(I)}$$

$$f''(x) = -2\cos 2x + 2\cos x \le 0 \Rightarrow \cos 2x - \cos x \ge 0$$

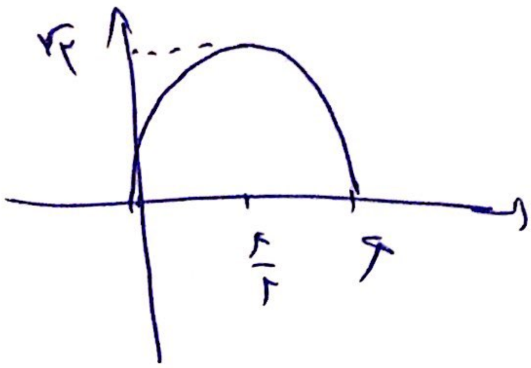
$$\Rightarrow -2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} \ge 0 \Rightarrow \sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} \le 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{x}{2} < \pi \to 0 < x < 2\pi \\ \pi < \frac{3x}{2} < 2\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) \quad \text{(II)}$$

$$\text{(I)} \cap \text{(II)} \Rightarrow x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$$

۱۲۳_ تمرین ۲

$$y=\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{1-(1-2\sin^2 x)}=\sqrt{2}\,|\sin x|$$



$$S=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\,|\sin x|\,dx=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\sin x\,dx$$

$$=-\sqrt{2}\cos x\Big]_0^{\pi}=-\sqrt{2}(-1-1)=2\sqrt{2}$$

۱۲۴_ تمرین ۳

$$\int_0^4 |1-\sqrt{x}|\,dx=\int_0^1(1-\sqrt{x})\,dx+\int_1^4(\sqrt{x}-1)\,dx$$

$$=x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1+\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\right)\Big]_1^4$$

$$=1-\frac{2}{3}+\frac{16}{3}-4-\left(\frac{2}{3}-1\right)=2$$