۱۳۶

$3y-2x=4 \Longrightarrow 2x=3y-4 \to x=\frac{3y-4}{2} \xrightarrow{\text{قرینه}} y=\frac{3x-4}{2}$

$\xrightarrow[x=0]{\text{عرض از مبدا}} y=\frac{3\times 0-4}{2}=\frac{-4}{2}=-2 \longrightarrow$ گزینه ی ۱

۱۳۷

$y=-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2} \xrightarrow{\text{هم‌تراز}} y=2x+|x| \to \begin{cases} 3x & x\geq 0 \\ x & x<0 \end{cases}$

بازه‌ی نقاط تقاطع دو نمودار را بدست می‌آوریم:

(۱) $-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}=3x \to -2x^2-x+9=6x \to 2x^2+7x-9=0$

$\xrightarrow{\text{حل معادله به روش شستی}} x^2+7x-18=0 \to (x+9)(x-2)=0 \xrightarrow{\text{تبدیل}}$

$(2x+9)(x-\frac{2}{2})=0 \to x=-\frac{9}{2}$ غ ق ق

$\boxed{x=+1}$ ✓ → نقطه اول انتهای بازه

(۲) $-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}=x \to -2x^2-x+9=2x \to 2x^2+3x-9=0$

$x^2+3x-18=0 \to (x+6)(x-3)=0 \to (x+\frac{6}{2})(2x-3)=0$

$\boxed{x=-3}$ ✓ نقطه اول ابتدای بازه

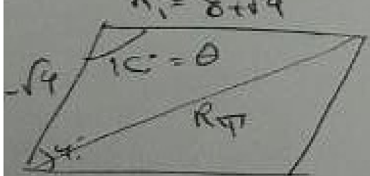
$x=\frac{3}{2}$ غ ق ق

$\to (a,b)=(-3,1) \xrightarrow{\text{طول بازه}} \boxed{x=-1}$

گزینه ی ۳

۱۳۸

$R_1=5+\sqrt{6}$



$\to R_T=\sqrt{R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos\theta}$

$R_T=\sqrt{(5+\sqrt{6})^2+(5-\sqrt{6})^2-2(5+\sqrt{6})(5-\sqrt{6})\cos 120}$, $\cos 120 = -\frac{1}{2}$

$R_T=\sqrt{25+\cancel{2\sqrt{6}\times 5}+6+25-\cancel{2\sqrt{6}\times 5}+6+(25-6)}=$

$\sqrt{81}=9 \longrightarrow$ گزینه ی ۳

۱۲۹

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \longrightarrow A\times A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 6\\ 9 & 22\end{bmatrix}$$

$\xrightarrow{\text{جمع درایه‌ها}}$ $7+6+9+22=44$ ✓

گزینه ۲

---

۱۳۱ آمار

۱۳۰ آمار

۱۳۲

تعداد حالات مطلوب $\longrightarrow$ $(1,3),(2,4),(3,5),(3,1),(4,2),(5,3),(2,2),(6,4),(4,6) \longrightarrow n(A)=9$ و $n(S)=6\times 6=36$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$ ✓

گزینه ۱

۱۳۳

$$(m-6)x^2-2mx-3=0 \begin{cases}\Delta>0 \rightarrow 4m^2-4(-3)(m-6)=4m^2+12m-72>0 & \text{I}\\ S<0 \rightarrow -\frac{b}{a}<0 \rightarrow \frac{2m}{m-6}<0 & \text{II}\\ P>0 \rightarrow \frac{c}{a}>0 \rightarrow \frac{-3}{m-6}>0 & \text{III}\end{cases}$$

I $\rightarrow 4m^2+12m-72>0 \rightarrow m^2+3m-18>0 \rightarrow (m+6)(m-3)>0$

$m<-6$, $m>3$

II $\rightarrow \frac{2m}{m-6}<0 \rightarrow$

$0<m<6$

III $\rightarrow \frac{-3}{m-6}>0 \rightarrow m-6<0 \rightarrow m<6$

اشتراک موارد $\rightarrow 3<m<6$

گزینه ۴

۱۳۴

$$\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})} = 2 \longrightarrow \frac{\sin x \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos x}{\sin x\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)}$$

$$= \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = 2 \longrightarrow$$

$$\sin x - \cos x = 2\sin x + 2\cos x \longrightarrow -\sin x = 3\cos x \longrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = -3$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} x = \boxed{-3} \rightsquigarrow$$ گزینه ۱

۱۳۵

$$f_{(2x-3)} = 4x^2 - 14x + 13$$

$$2x - 3 = t \longrightarrow x = \frac{t+3}{2} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} f_{(t)} = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+3}{2}\right) + 13 =$$

$$f_{(t)} = (t^2 + 6t + 9) - 7t - 21 + 13 = \boxed{t^2 - t + 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{(x)} = x^2 - x + 1} \rightsquigarrow$$ گزینه ۴

۱۳۶

$$\lim_{x\to 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3-\sqrt{x}} - 1} = \frac{0}{0} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to 4} \frac{6x - 10}{\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{3-\sqrt{x}}}} = \frac{14}{\frac{-\frac{1}{4}}{2}} =$$

مشتق $$\left(\sqrt{3-\sqrt{x}}\right)' = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{3-\sqrt{x}}}$$

$$\frac{14}{-\frac{1}{8}} = 14 \times (-8) = -112$$

گزینه ۱

۱۳۷

$$\lim_{x\to 3^-} ax + 2^{x-3} = 3a + 2^{3-3} = \boxed{3a+1}$$

$$\lim_{x\to 2^+} a\log_2^{(1+x)} = a\log_2^4 = 2a \longrightarrow 3a + 1 = 2a \longrightarrow \boxed{a = -1}$$

$$f_{(2)} = -2 + 2^{2-3} = -2 + 2^{-1} = -2 + \frac{1}{2} = \boxed{-1/5}$$

$$2<3 \longrightarrow -x + 2^{x-3}$$

گزینه ۳

۱۳۸

$\sin^4 x + \cos^4 x$ مشتق در $\boxed{x=\frac{\pi}{8}}$

$\rightarrow 4\sin^3 x \times \cos x - 4\cos^3 x \times \sin x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{8}}$

$\underbrace{\underbrace{4\sin x\cos x}_{2\times 2\sin x\cos x}}_{\sin 2x} \times \Big[\underbrace{\sin^2 x - \cos^2 x}_{-\cos 2x}\Big] = -2\times \sin 2x \cos 2x = -\sin 4x$

$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{8}} -\sin\frac{4\pi}{8} = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$

گزینه ۱ ✓

---

۱۳۹ احتمال

۱۴۰

$$f(x)=|x-2|+|x-3| \rightarrow \begin{cases} -x+2-x+3 = -2x+5 & x<2 \\ x-2-x+3=1 & 2<x<3 \\ x-2+x-3=2x-5 & x>3 \end{cases}$$

$+\ x>2 \quad +\ x>3$

$-\ x<2 \quad -\ x<3$

نزولی اکید

$2x^2-x-10=-2x+5 \Rightarrow 2x^2+x-15=0$

$\Delta = 1-4(-15)(2) > 0 \rightarrow$ دو ریشه متمایز

← پس در دو نقطه مشترکند ← گزینه ۲

---

۱۴۱ [illegible]

۱۴۲

$f(t)=60-50\,e^{-0.25t} \rightsquigarrow 60-50\,e^{-0.25t}=40 \rightarrow t=?$

$-50\,e^{-0.25t}=-20 \rightarrow e^{-0.25t}=\frac{2}{5} \rightarrow -0.25t \underbrace{\ln e}_{1} = \ln\frac{2}{5}$

$\Rightarrow 0.25t = -\ln\frac{2}{5} = \ln\frac{5}{2} = \ln 2.5 = 0.91 \rightarrow t = 3.64$ ماه

← ۳ ماه و (بیشتر از ۱۰۰ روز) ← تقریباً گزینه ۳ [illegible] ✓

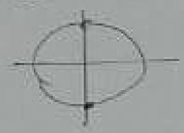
۱۴۳

$\operatorname{tg}x \operatorname{tg}3x = 1$

$$\operatorname{tg}x \operatorname{tg}3x = \frac{\cos(x-3x) - \cos(x+3x)}{\cos(x-3x) + \cos(x+3x)} = \frac{\cos(2x) - \cos 4x}{\cos(2x) + \cos 4x} = 1$$

$$\Rightarrow \cancel{\cos(2x)} - \cos 4x = \cancel{\cos(-2x)} + \cos 4x \rightarrow 2\cos 4x = 0$$

$\cos 4x = 0$ $\qquad 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \longrightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \longrightarrow$ گزینه ۲



۱۴۴

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 4 & ; x \geq -2 \\ x^3 - x & ; x < -2 \end{cases}$$

پیوستگی $\longrightarrow \begin{cases} 4a - 2b + 4 = -8 + 2 \\ 4a - 2b + 4 = -6 \rightarrow \\ 4a - 2b = -10 \rightarrow \boxed{2a - b = -5} \end{cases}$

مشتق چپ و راست $\begin{cases} 2ax + b \\ 3x^2 - 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -4a + b = 12 - 1 \Rightarrow \boxed{-4a + b = 11} \\ -2a = 11 - 5 = 6 \rightarrow \boxed{a = -3} \end{cases}$

$b = 2a + 5 = -6 + 5 = -1$

$f(1) = ax^2 + bx + 4 = -3x^2 - x + 4 = -3(1)^2 - (1) + (4) = -3 - 1 + 4 = 0$

گزینه ۲

$1 > -2$

۱۴۵

نقطه $(1,3)$

$\sqrt{7x^2 - 2y} + y^2 = 10$

$$y' = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{\frac{14x}{2\sqrt{7x^2 - 2y}}}{\frac{-2}{2\sqrt{7x^2 - 2y}} + 2y} \overset{(1,3)}{=} -\frac{\frac{14}{2\sqrt{1}}}{\frac{-2}{2\sqrt{1}} + 6} = -\frac{7}{5}$$

شیب خط قائم معکوس و قرینه $\longleftarrow +\frac{5}{7}$ گزینه ۱

۱۴۶

$y = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} \longrightarrow$ نزولی $\longrightarrow f' < 0$

تقعر رو به پایین $\longrightarrow f'' < 0$

$y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{1} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$

$y'' = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{8}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}\right)$

$= \frac{4}{9}\left(\frac{\sqrt[3]{x^3} + 2}{\sqrt[3]{x^5}}\right)$

		۰		۱	
			−	۰	+

$\boxed{f' < 0}\ x < 1$

		-2		0	
$x+2$	−	۰	+		+
$\sqrt[3]{x^5}$	−		−	۰	+
	+		−		+

$f'' < 0$

اشتراک $-2 < x < 0$

$(-2, 0)$

گزینه ۴

۱۴۷

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 9x + 2$

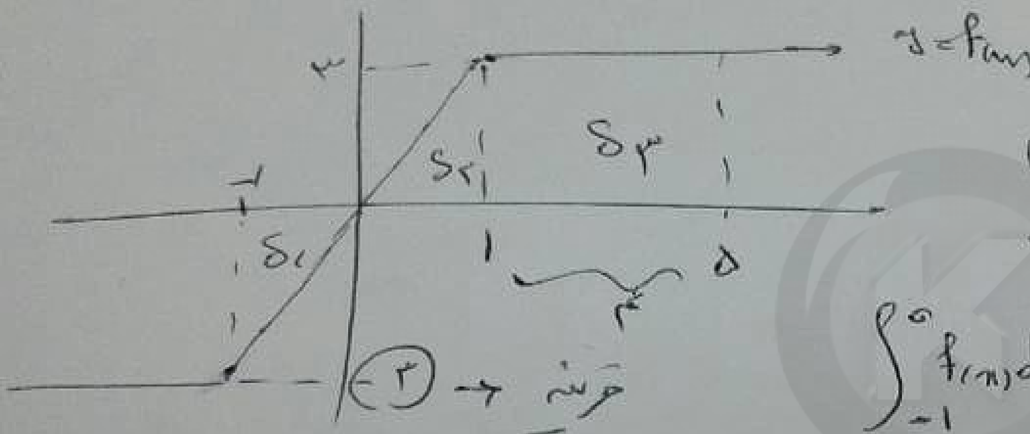
$f(x) = m \longrightarrow x^3 - 9x^2 + 9x + 2 = m$ $\xrightarrow[\text{دارد}]{\text{سه جواب}}$

$x^3 - 9x^2 + 9x + 2 - m = 0$

۱۴۸ هندسه مقاطع مخروطی

۱۴۹ هندسه مقاطع مخروطی

۱۶۰



$\int_{-1}^{5} f(x)\,dx =$ مساحت زیر نمودار

$$\underbrace{\int_{-1}^{0} f(x)\,dx}_{-S_1} + \underbrace{\int_{0}^{1} f(x)\,dx}_{+S_2} + \underbrace{\int_{1}^{5} f(x)\,dx}_{+S_3} =$$

$$= \cancel{-\frac{3}{2}} + \cancel{\frac{3}{2}} + 12 = 12 \checkmark$$

گزینه ۲ ← چشمی هم مسئله جواب داد.!!!

$$x^{\frac{1}{2}-\frac{4}{2}}=-\frac{3}{2}$$

$$\int_1^4 \frac{2x^3-\sqrt{x}}{x^2}\,dx=\int_1^4\left(2x-\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)dx=\int_1^4\left(2x-x^{-\frac{3}{2}}\right)dx$$

$$\Rightarrow 2\frac{x^2}{2}+\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\Big|_1^4=x^2-2\frac{1}{\sqrt{x}}\Big|_1^4=$$

$$\cancel{\left(16-\frac{2}{2}\right)-\left(1-2\right)}=$$

$$16-\frac{2}{2}=16-1=15$$

گزینه ۴ صحیح است

مهندس یاسر کاظمی

۰۹۲۲۴۵۲۷۷۰۷

//تدریس ریاضیات تجربی//