بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضیات گسسته

دورهٔ پیش‌دانشگاهی

رشتهٔ علوم ریاضی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب :	ریاضیات گسسته دورهٔ پیش‌دانشگاهی ـ ۲۹۶/۱
پدیدآورنده :	سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف :	دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف :	یحیی تابش، محمّدحسن بیژن‌زاده، امیرنادری، حمیده داریوش همدانی و جواد حاجی بابائی (اعضای شورای برنامه‌ریزی) مهدی بهزاد، علی رجالی، علی عمیدی و عباداللّه محمودیان (اعضای گروه تألیف) ـ علی عمیدی (ویراستار)
مدیریت آماده‌سازی هنری :	ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی :	لیدا نیک‌روش (مدیر امور فنی و چاپ) ـ علیرضا رضائی‌کُر (طراح جلد) ـ شهرزاد قنبری (صفحه‌آرا) ـ مریم دهقان‌زاده، زهرا ایمانی‌نصر ، سیّده‌فاطمه محسنی، رعنا فرج‌زاده‌دروئی، فاطمه گیتی‌جبین، فریبا سیر، حمیدثابت کلاچاهی، راحله زادفتح‌اله(امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان :	تهران : خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی) تلفن : ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
ناشر :	شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران : تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن : ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵
چاپخانه :	شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ :	چاپ بیست و سوم ۱۳۹۶

برای دریافت فایل pdf کتاب‌های درسی به پایگاه کتاب‌های درسی به نشانی www.chap.sch.ir و برای خرید کتاب‌های درسی به سامانه فروش و توزیع مواد آموزشی به نشانی www.irtextbook.ir یا www.irtextbook.com مراجعه نمایید.

ISBN 964-05-0103-4 شابک ۴-۰۱۰۳-۰۵-۹۶۴

۱۳۹۶

اگر شما دیدید که غربی‌ها در صنعت پیشرفتی دارند، اشتباه نشود، خیال نکنید که در فرهنگ هم پیشرفت دارند. جوانان ما، دانشمندان ما، اساتید دانشگاه‌های ما از غرب نترسند، اراده کنند در مقابل غرب، قیام کنند و نترسند...

امام خمینی

فهرست

پیشگفتار

در سال‌های اخیر به دلیل پیشرفت علوم و تکنولوژی به‌ویژه علوم کامپیوتر، نه تنها به درس‌هایی چون حسابان (حساب دیفرانسیل و انتگرال) که در حیطهٔ ریاضیات پیوسته قرار دارد توجه می‌شود، بلکه درس‌ها و کتاب‌های بسیاری تحت عناوینی چون «ریاضیات گسسته»، «ترکیبیات» و «ریاضیات متناهی» ارائه شده‌اند نیز مورد توجه قرار دارند. اغلب این درس‌ها و کتاب‌ها که با مجموعه‌های متناهی وگاه با مجموعه‌های شما را سر وکار دارند، گراف‌ها، روش‌های شمارشی، ساختارهای ترکیبیاتی، مباحثی از نظریهٔ اعداد و احتمال وکاربردهایی چون کدگذاری و رمزنگاری را شامل‌اند. وجه اشتراک تقریباً همهٔ این زمینه‌ها گسسته بودن طبیعت مباحث تحت بررسی است که در آنها مفاهیمی چون حد و پیوستگی معمولی کمتر مطرح‌اند، ولی به ابزارهای کارآمد و فوق‌العاده زیبای دیگری مجهزند. پویایی و وجود مسائل فراوانِ حل نشده و ظاهراً ساده از مشخصات دیگر این شاخه‌اند. به‌طورکلی این شاخه امروزه سهم بزرگی در انجام برخی از پژوهش‌های علمی دارد و با توجه به گستردگی زمینه‌های کاربردی آن مورد توجه بسیاری از دانش‌پژوهان است. به این دلایل و به دلیل زیبایی و قدرتی که ریاضیات گسسته در پرورش تفکّر ریاضی افراد دارد مدتی است که آموزش مبانی آن در برنامه‌های درسی دورهٔ متوسطه بسیاری از کشورها آغاز شده است و محققاً در ایران نیز تدریس آن در دورهٔ پیش‌دانشگاهی لازم است.

در این کتاب مؤلفان مطالبی را که جنبهٔ پایه‌ای و عمومی داشته و صرفاً طبیعتی گسسته دارند مطرح کرده و با ارائه مثال‌های فراوان به روشن شدن مفاهیم افزوده‌اند. برخی از اطلاعات اضافی نیز که جزء برنامهٔ درسی نیستند به صورت مجلهٔ ریاضی آمده‌اند.

توجه دبیران محترم را به این نکته جلب می‌کند که چون دانش‌آموز دورهٔ پیش‌دانشگاهی باید خود با مطالعهٔ شخصی به حل تمرین‌ها و درک مطالب فرعی بپردازد و نیز به دلیل کمی وقت تدریس، نباید انتظار داشت که همهٔ تمرین‌ها در کلاس مطرح شوند؛ حل یک مسأله از هر نوع کافی است.

در پایان متذکر می‌شویم که مؤلفان پیشنهادها و نظرهای مفید را با تشکر پذیرا هستند و از همهٔ استادان، دبیران و دانشجویان به ویژه شرکت‌کنندگان در دوره‌های آموزشی این درس که در تکمیل پیش‌نویس کتاب راهنمای ما بوده‌اند صمیمانه قدردانی می‌کنند.

۱ گراف‌ها و کاربردهای آن

مقدمه

در این قسمت که شامل سه فصل است با الفبای نظریهٔ گراف‌ها و کاربردهایش آشنا می‌شویم. عمدتاً از طبیعت جذاب گراف‌ها استفاده می‌کنیم، شهود را به کار می‌بندیم و با مثال‌های ملموس و معماهای گوناگون مفاهیم را روشن می‌سازیم. در عین حال دربست تسلیم شهود نمی‌شویم و در مواردی اثبات دقیق قضایا را ارائه می‌دهیم. گاه از کاربردهایی استفاده می‌کنیم که ممکن است تاحدی بدیهی به نظر برسند، اما هرگز معماها و مسائل ظاهراً کوچک را که انگیزه بخش‌اند دست کم نمی‌گیریم، زیرا در موارد بسیاری این گونه مسائل سرآغاز ایده‌ها و حتی نظریه‌های مهم ریاضی بوده‌اند. از دانش‌پژوهانی که دورهٔ دبیرستان را پشت سرگذاشته‌اند انتظار داریم ذهن پویای خود را به کار اندازند و برای پاسخگویی به سؤال‌های عدیده‌ای که خود طرح می‌کنند، یا پرسش‌هایی که در متن مطرح می‌شوند ابتدا مثال‌های ساده و بعد رده‌های خاص گراف‌ها را مورد توجه قرار دهند و مطمئن باشند که در این زمینه می‌توانند مسائلی را مطرح کنند که در عین سادگی بیان، بزرگ‌ترین ریاضیدانان نیز از حل آنها عاجز باشند.

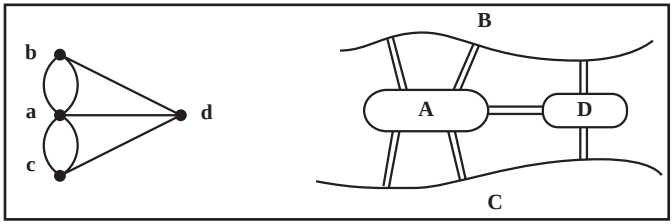
فصل ۱

آشنایی با گراف‌ها

در این فصل با بیان چند مثال زمینه را برای تعریف انواع گراف‌ها آماده می‌کنیم و آن را با ارائهٔ چند تعریف و قرارداد پایان می‌دهیم.

۱ـ۱ـ چند مثال

در قرن هیجدهم میلادی شهر کونیگسبرگ از دو ساحل یک رودخانه و دو جزیره تشکیل شده بود. در آن زمان هفت پل این چهار منطقه را به هم وصل می‌کردند. معمای زیر سال‌ها شهروندان را سرگرم کرده بود: آیا امکان دارد با آغاز از یکی از این مناطق در شهر گشتی زد، از هر پل یک بار و تنها یک بار گذشت، و به مکان اول بازگشت؟ اویلر در سال ۱۷۳۶ با حل مسألهٔ پل‌های کونیگسبرگ نظریهٔ گراف‌ها را بنیان گذاشت. وی به هر یک از این چهار منطقه نقطه‌ای از صفحه را تخصیص داد و به ازای هر پل بین دو منطقه، پاره‌خط یا کمانی بین دو نقطهٔ متناظر با آنها رسم کرد. بدین ترتیب مطابق شکل ۱ به مدلی ریاضی دست یافت و به سادگی پاسخ معما را که منفی است دریافت.



شکل ۱ــ نمای شهرکونیگسبرگ و گراف مربوط به آن

امروزه این مدل را یک **گراف** یا، به سبب وجود «چند» به اصطلاح خط بین دو نقطه، به‌طور دقیق‌تر یک **گراف چندگانه** می‌نامند. اینک ما هم می‌توانیم مسائل مختلفی را به زبان نظریهٔ گراف‌ها بیان کنیم.

مثال ۱ : فرض می‌کنیم پنج تیم به نام‌های a، b، c، d و e باید دو به‌دو با یکدیگر مسابقه بدهند. پس از چندی می‌بینیم که :

a با b، c و e مسابقه داده (و بر همگی پیروز شده است).

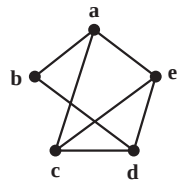
b با a و d روبه‌رو شده (و از هر دو شکست خورده است).

c با a، d و e مسابقه داده (بر d و e پیروز شده و از a شکست خورده است).

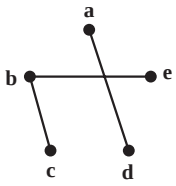
d با b، c و e بازی کرده (و b و e را شکست داده و از c شکست خورده است).

e با a، c و d مسابقه داده است (پیروزی‌ها و شکست‌های e قبلاً مشخص شده‌اند).

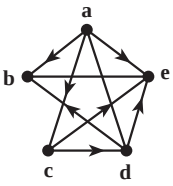
این وضعیت را می‌توانیم به صورت یک نمودار در صفحه مشخص کنیم. به‌ازای هر تیم یک نقطه در نظر می‌گیریم و دو نقطه را با پاره‌خط یا کمانی به هم وصل می‌کنیم هرگاه تیم‌های متناظر با هم مسابقه داده باشند. شکل ۲ مدل مربوط به این وضعیت را نشان می‌دهد.



شکل ۲



شکل ۳



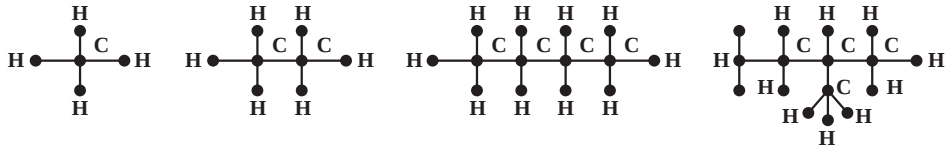
شکل ۴

سه شکل مربوط به مثال ۱

ممکن است به این وضعیت نمودار دیگری هم نسبت داد و آن نمودار مربوط به مسابقات انجام نشده است. برای این کار باز هم به‌ازای هر تیم یک نقطه در نظر می‌گیریم و این بار دو نقطه را با پاره‌خطی به هم وصل می‌کنیم هرگاه دو تیم مربوط با هم بازی نکرده باشند. نمودار مربوط به این وضعیت که در شکل ۳ نمایش داده شده است نشان می‌دهد که برای تکمیل این دور از مسابقات سه مسابقه دیگر باید برگزار شوند.

فرض می‌کنیم که این مسابقات حتماً باید برنده هم داشته باشند. (برندگان را قبلاً مشخص کرده‌ایم). لذا می‌توانیم هنگام رسم شکل ۲ به جای مثلاً پاره‌خط، پاره‌خطی جهت‌دار رسم کنیم که جهت آن از برنده به سوی بازنده باشد. با این ترتیب شکل ۴ به‌دست می‌آید. این گراف نشان می‌دهد که مثلاً تیم e از سه تیم a، c و d شکست خورده و هنوز برنده نشده است. چنین گرافی را **گراف جهت‌دار** می‌نامیم.

مثال ۲ : در درس شیمی دیده‌ایم که به هیدروکربن‌های اشباع شده نمودارهایی نسبت می‌دهند تا ساختار شیمیایی آنها را به نمایش بگذارند. در شکل ۵ چند نمونه از این هیدروکربن‌ها را که فرمول عمومی آنها C_nH_{2n+2} است می‌بینید.



متان : CH_4 اتان : C_2H_6 بوتان : C_4H_{10} ایزوبوتان : C_4H_{10}

شکل ۵ ــ چند نمونه از هیدروکربن‌ها

مثلاً نمودار مربوط به اتان که چگونگی پیوند کربن‌ها و هیدروژن‌ها را نشان می‌دهد ظرفیت کربن و هیدروژن را نیز مشخص می‌کند. در شکل ۵ می‌بینیم که با چهار کربن و ده هیدروژن دو هیدروکربن اشباع شدهٔ «مختلف» وجود دارند. بیش از دو تا چی؟ طبیعتاً پاسخ به این سؤال برای nهای بزرگتر از ۴ آسان نیست. ▲

مثال ۳ : شرکتی مایل است برای چهار شغل تمام وقت A_1، A_2، A_3 و A_4 کارمند استخدام کند. پنج نفر به نام‌های B_1، B_2، B_3، B_4 و B_5 برای تصدی این شغل‌ها داوطلب می‌شوند که طبق فهرست زیر برخی صلاحیت تصدی بیش از یک کار را دارند :

B_1 می‌تواند سه شغل A_1، A_2 و A_3 را اداره کند.

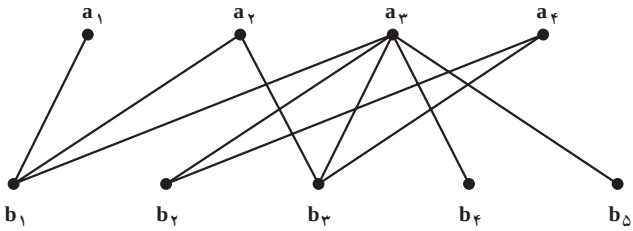
B_2 می‌تواند دو شغل A_3 و A_4 را بپذیرد.

B_3 قادر است هر یک از شغل‌های A_2، A_3 و A_4 را انجام دهد.

B_4 و B_5 هم می‌توانند تنها متصدی شغل A_3 باشند.

آیا با این پنج نفر، شرکت می‌تواند برای پست‌های خالی متصدی پیدا کند؟ این مسأله چند جواب دارد؟

برای بررسی این وضعیت باز هم یک مدل می‌سازیم. به این صورت که در صفحه، چهار نقطه متناظر با چهار شغل موردنظر و پنج نقطهٔ دیگر متناظر با پنج داوطلب مذکور در نظر می‌گیریم و مطابق شکل ۶ هر نقطهٔ b_i، $1 \le i \le 5$، را با پاره‌خط یا پاره‌خط‌هایی به نقاطی چون a_j، $1 \le j \le 4$، در صورتی وصل می‌کنیم که داوطلب B_i که با نقطهٔ b_i در تناظر است صلاحیت انجام شغل A_j را که با نقطهٔ a_j در تناظر است داشته باشد.



شکل ۶ ــ گراف مربوط به مثال ۳

واضح است که برای تصدی A_1 تنها یک داوطلب وجود دارد و لذا این شغل به B_1 تخصیص داده می‌شود. حال تنها B_3 برای تصدی A_2 باقی می‌ماند. چون B_2 و B_3 تنها داوطلبان احراز پست A_4 هستند و B_3 قبلاً به‌کار A_2 گماشته شده است، A_4 باید الزاماً به B_2 سپرده شود. حال برای تصدی A_3 دو داوطلب باقی می‌مانند : B_4 و B_5. پس این مسأله تنها دو جواب دارد و شرکت مجبور است B_1 را به‌کار A_1، B_3 را به‌کار A_2، B_2 را به‌کار A_4 و B_4 یا B_5 را به‌کار A_3 بگمارد. ▲

۱ـ۲ـ چند تعریف و قرارداد

در زندگی پیچیدهٔ امروزی به مسائل فراوانی برمی‌خوریم که برای حل آنها مجبوریم از مدلی ریاضی مانند گراف استفاده کنیم. لذا لازم است این وضعیت‌ها را به صورت مجرد درآوریم و با الهام گرفتن از همین مسائل به بررسی ویژگی‌های این مجردات بپردازیم. نظریهٔ گراف‌ها به همین ترتیب به‌وجود آمده و به سرعت در حال رشد و شکوفایی است.

همان‌گونه که دیدیم گراف‌ها انواع گوناگون دارند. مثلاً برخی جهت‌دار و برخی چندگانه‌اند. برخی هم نامتناهی‌اند، به این معنا که بی‌نهایت نقطه یا بی‌نهایت خط دارند. اینک در بین انواع گراف‌ها تعریف رسمی ساده‌ترین نوع را ارائه می‌کنیم. در این قسمت تقریباً همه جا سروکار ما با همین گراف‌های (ساده) است.

تعریف : گراف (سادهٔ) G زوجی مرتب چون (V,E) است که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی است و E زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی V است. اعضای V را **رأس‌های** G و اعضای E را **یال‌های** G می‌نامیم. مجموعهٔ رأس‌های G را با $V(G)$ و مجموعهٔ یال‌های آن را با $E(G)$ هم نمایش می‌دهیم.

به یاد داشته باشید که هر عضو یک مجموعه تنها یک بار در آن ظاهر می‌شود. مثلاً نمی‌نویسیم $\{a, a, a, b, b\}$ بلکه می‌نویسیم $\{a, b\}$.

مثال ۴ : اگر $V= \{a, b, c, d, e\}$ و $E= \{\{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}\}$ آن‌گاه بنا به تعریف، $G=(V, E)$ گرافی است که پنج رأس و سه یال دارد. ▲

قرار داد : اگر در گراف G، $u, v \in V(G)$ و $\{u, v\} \in E(G)$، برای سادگی، به جای $\{u, v\}$ می‌نویسیم uv و می‌گوییم در G دو رأس u و v **مجاورند**. در این صورت گاهی گفته می‌شود رأس u (همچنین رأس v) بر یال uv **واقع** است. اصطلاح رایج دیگر این است که در G یال uv از رأس u (همچنین از رأس v) **می‌گذرد** یا **مرور می‌کند**. رأس‌های u و v **دو سر یال** uv نام دارند.

مثال ۵ : اگر $V= \{a, b , c, d, e\}$ و $E= \{ab, ac, ae, bd, cd, ce, de\}$ آن‌گاه بنا به تعریف، $G=(V, E)$ گرافی است که پنج رأس و هفت یال دارد. در این گراف مثلاً دو رأس a و b مجاورند زیرا $ab \in E$ ولی دو رأس b و e مجاور نیستند، زیرا $be \notin E$. واضح است که در این گراف از رأس a سه یال و از رأس b دو یال می‌گذرد. ▲

توجه دارید که هر گراف را می‌توان با یک نمودار، موسوم به **نمودار گراف**، نیز نمایش داد. برای این کار به‌ازای هر رأس G نقطه یا دایرهٔ کوچک دلخواهی، مثلاً در صفحه، در نظر می‌گیریم و دو نقطهٔ متمایز را با پاره خط یا کمانی به هم وصل می‌کنیم به شرطی که مجموعهٔ متشکل از دو رأس متناظر با آن دو نقطه عضوی از E باشد. یک نمودار گراف مثال ۴ را در شکل ۳ و یک نمودار گراف مثال ۵ را در شکل ۲ نمایش داده‌ایم. شکل ۶ نموداری از گراف $G=(V, E)$ را نمایش می‌دهد که در آن :

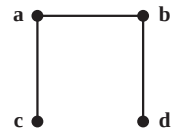
$$V= \{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$$

$$E= \{a_1b_1, a_2b_1, a_2b_3, a_4b_1, a_3b_2, a_3b_3, a_3b_4, a_3b_5, a_4b_2, a_4b_3\}$$

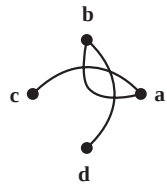
در این گراف از رأس a_3 پنج یال مرور می‌کنند؛ ولی از هر یک از دو رأس a_1 و b_5 تنها یک یال می‌گذرد.

مثال ۶ : اگر $V(G) = \{a, b , c, d\}$ و $E(G) = \{ab, ac, bd\}$ آن‌گاه G گرافی است که چهار رأس و سه یال دارد.

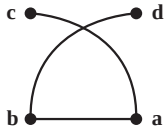
سه نمودار از این گراف را در شکل‌های زیر رسم کرده‌ایم.



شکل ۷



شکل ۸



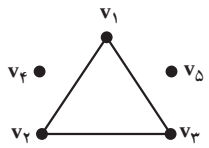
شکل ۹

سه نمودار مربوط به گراف مثال ۶

واضح است که در شکل‌های ۸ و ۹ نقطهٔ برخورد کمان‌های ac و bd متناظر با هیچ رأس این گراف نیست. ▲

برای راحتی گاهی نمودار گراف را با خود آن یکی می‌گیریم و به همین دلیل رأس را **نقطه** ویال را **خط** هم می‌نامیم. توجه دارید که نمودار گراف برای درک بهتر مطلب رسم می‌شود و باید حتی‌الامکان ساده باشد.

مثال ۷ : فرض کنید گراف G با $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ و $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3\}$ داده شده است. آن‌گاه G پنج رأس و سه یال دارد. در این گراف مثلاً رأس v_4 با هیچ رأس دیگر G مجاور نیست. نمودار G به صورت زیر است که سه «بخش جدا از هم» دارد. ▲



شکل ۱۰ــ گراف مربوط به مثال ۷

مثال ۸ : گراف مربوط به بوتان که در شکل ۵ رسم شده است ۱۴ رأس و ۱۳ یال دارد. این گراف تنها یک «بخش» دارد و در آن مثلاً رأسی وجود دارد که دقیقاً با چهار رأس دیگر مجاور است ولی به‌طور مثال رأسی وجود ندارد که دقیقاً با سه رأس دیگر مجاور باشد. ▲

توجه کنید که اگر در تعریف گراف (سادهٔ) G تغییر کوچکی بدهیم تعریف گراف جهت‌دار به‌دست می‌آید که کاربردهای فراوان دارد.

تعریف : گراف جهت‌دار G زوجی مرتب چون (V,E) است که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی است و E زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ تمام زوج‌های مرتب متشکل از اعضای V است.

می‌توانیم به هر گراف جهت‌دار هم نموداری نسبت دهیم. به عنوان مثال، اگر $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{(a,b),(a,c),(a,e),(c,d),(c,e),(d,b),(d,e)\}$ آنگاه (V,E) گراف جهت‌داری است که نمودار آن در شکل ۴ نمایش داده شده است. توجه دارید که در یک گراف جهت‌دار به‌ازای هر $u,v\in V$ با شرط $u\neq v$ حداکثر دو به اصطلاح یال جهت‌دار یکی از u به v و دیگری از v به u وجود دارند[۱].

۱ــ در تعریف گراف جهت‌دار بسیاری از مؤلفان E را مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب متشکل از اعضای متمایز V می‌گیرند. بدانید که با این شرط مثلاً با ۲ رأس ۳ و با ۸ رأس ۱،۷۹۳،۳۵۹،۱۹۲،۸۴۸ گراف جهت‌دار «متفاوت» وجود دارند!

۱ـ۳ـ تمرین‌ها

۱ــ در مثال ۳ اگر علاوه بر شرایط داده شده، B_5 قادر به انجام کار A_4 نیز باشد شرکت به چند طریق می‌تواند پست‌های خالی را پر کند؟

۲ــ در مثال ۳ اگر علاوه بر شرایط داده شده، B_2 قادر به انجام کار A_2 نیز باشد شرکت به چند طریق می‌تواند پست‌های خالی را پر کند؟ (پاسخ ۴ است.)

۳ــ مسلماً دبیرستان شما در مسابقه‌های زیادی شرکت می‌کند. یکی از مسابقه‌ها را در نظر بگیرید ودر پایان گراف یا گراف جهت‌دار مربوط به آن را مشخص کنید.

۴ــ گراف $G=(V,E)$ با $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ و

$E=\{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_5v_6\}$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار این گراف را رسم کنید.

ب) اگر این رأس‌ها هفت شهر و این یال‌ها جاده‌های موجود بین این شهرها را نمایش دهند، آیا تنها با عبور از این جاده‌ها می‌توان از هر شهری به شهر دیگر سفر کرد؟

پ) این گراف از چند «بخش جدا از هم» تشکیل شده است؟ (پاسخ ۳ است.)

۵ ــ در زبان عربی کلمهٔ «شجر» به معنای درخت است و درخت گراف خاصی است که بعداً در فصل ۳ بررسی خواهد شد. دربارهٔ ارتباط بین «شجره نامهٔ خانوادگی» و گراف‌ها چه می‌دانید؟ شجره‌نامهٔ خانوادگی خود را رسم کنید.

۶ ــ شش بازهٔ باز $(۶,۹)$, $(۳,۸)$, $(۳,۴)$, $(۲,۵)$, $(۱,۴)$, $(۰,۲)$ از اعداد حقیقی داده شده‌اند. با این بازه‌ها گرافی چون G می‌سازیم که رأس‌هایش متناظر با این بازه‌ها باشند و دو رأس G با این شرط مجاور باشند که بازه‌های مربوط متمایز باشند و اشتراک آنها تهی نباشد. مثلاً چون اشتراک بازه‌های $(۰,۲)$ و $(۱,۴)$ تهی نیست رأس‌های مربوط باید مجاور باشند. اما چون اشتراک بازه‌های $(۰,۲)$ و $(۲,۵)$ تهی است رأس‌های مربوط به این دو بازه نباید مجاور باشند. (چنین گرافی را **گراف بازه‌ها** می‌نامیم.)

الف) نمودار گراف بازه‌های داده شده را رسم کنید.

ب) با معرفی پنج بازهٔ مناسب نشان دهید گراف شکل ۳ را می‌توان گراف بازه‌ها دانست.

پ) نشان دهید گراف شکل ۲ نمی‌تواند گراف بازه‌ها باشد؛ یعنی، پنج بازهٔ باز نمی‌توان یافت که گراف مربوط به آنها، طبق تعریف، «همان» گراف شکل ۲ باشد.

توجه : گراف‌هایی که از بازه‌ها به‌دست می‌آیند در باستان‌شناسی، ژنتیک و در تحلیل ادبی کاربرد دارند. درک عمیق این کاربردها مستلزم آگاهی از زمینه‌های مربوط است.

مجلهٔ ریاضی

می‌گویند در روزگاران پیش نقشه‌کش‌ها از این «واقعیت» آگاه بودند که هر نقشهٔ جغرافیایی مسطح یا کروی را می‌توان با حداکثر چهاررنگ طوری رنگ کرد که مناطق «مجاور» رنگ‌های متفاوت داشته باشند. شاید هم مسألهٔ چهاررنگ از تراوشات ذهن ریاضیدانان باشد. به هر تقدیر، نخستین مرجع مکتوب این مسأله نامهٔ مورخ ۲۳ اکتبر ۱۸۵۲ میلادی اِ. دمورگن به ویلیام همیلتن است. مسألهٔ چهار رنگ که به «مرض» چهاررنگ هم شهرت یافت بیش از یک قرن به‌طور جدی ذهن بسیاری را به خود مشغول داشت و در نظریهٔ گراف‌ها معادل‌های بسیاری برای آن مطرح شد.

سرانجام در سال ۱۹۷۷ میلادی ک. اَپِل وو. هَکِن با استفاده از قضیه‌های فراوان و ۱۲۰۰ ساعت از وقت یکی از سریع‌ترین کامپیوترهای زمان این مسألهٔ سرکش را مهار و «قضیهٔ» چهاررنگ را «ثابت» کردند. اما، هنوز هم مرض چهاررنگ شیوع دارد و بسیاری به فکر ارائهٔ اثباتی سنتی و حتی‌الامکان ساده برای آن هستند.

فصل ۲

چند ویژگی ساده و چند ردهٔ خاص گراف‌ها

در این فصل ابتدا چند ویژگی ساده از گراف‌ها را ذکر می‌کنیم و سپس برای آشنایی بیشتر با گراف‌ها به معرفی چند ردهٔ خاص از آنها می‌پردازیم و باز هم می‌کوشیم به‌طور شهودی مفاهیم را روشن کنیم.

۲ـ۱ـ مرتبه، اندازه و درجه

می‌دانیم که اگر مجموعه‌ای p، $p \in \mathbb{N}$، عضو داشته باشد تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی آن $p(p-۱)/۲$ است که با $\binom{p}{۲}$ نمایش داده می‌شود. بنابراین اگر گرافی p رأس و q یال داشته باشد داریم :

$$۰ \le q \le \binom{p}{۲} = p(p-۱)/۲$$

تعریف : در هر گراف $G=(V, E)$ تعداد اعضای مجموعهٔ V را **مرتبهٔ** G و تعداد اعضای مجموعهٔ E را **اندازهٔ** G می‌نامیم و معمولاً آنها را، به ترتیب، با p و q نمایش می‌دهیم. مرتبهٔ G را با p(G) و اندازهٔ آن را با q(G) هم نمایش می‌دهیم.

مثال ۱ : مرتبهٔ گراف شکل ۲ از فصل ۱ پنج و اندازهٔ آن هفت است. مرتبهٔ گراف مربوط به مثلاً بوتان (شکل ۵ از فصل ۱) ۱۴ و اندازهٔ آن ۱۳ است. توجه کنید که در مورد سایر گراف‌های این شکل نیز رابطهٔ $p = q + ۱$ برقرار است. ▲

تعریف : درجهٔ رأس v از گراف G برابر با تعداد یال‌هایی از G است که از رأس v می‌گذرند. این عدد را با $\deg_G v$ و گاهی به‌طور ساده با $\deg v$ نمایش می‌دهیم. اگر $\deg v$ یک عدد فرد باشد v را یک **رأس فرد** و اگر یک عدد زوج باشد v را یک **رأس زوج** از گراف G می‌نامیم.

مثال ۲ : در شکل ۲ از فصل ۱ داریم : $\deg a = ۳$ و $\deg b = ۲$. این گراف چهار رأس فرد و یک رأس زوج دارد. در شکل ۶ از فصل ۱ داریم : $\deg a_۱ = ۱$ و $\deg a_۴ = ۵$. این گراف شش رأس فرد و سه رأس زوج دارد. توجه کنید که در هر دو مثال مجموع درجه‌های تمام رأس‌ها یک عدد زوج است. در قضیهٔ زیر نشان می‌دهیم این مطلب همواره درست است. ▲

قضیهٔ ۱ : اگر $V = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_p\}$ مجموعهٔ رأس‌های گراف G با اندازهٔ q باشد، آن‌گاه $\sum_{i=۱}^{p} \deg v_i = ۲q$.

اثبات : هر یال تنها دو سر دارد، یعنی دقیقاً از دو رأس G می‌گذرد و لذا در طرف چپ فرمول بالا هر یال دو بار به حساب می‌آید. ■

توجه کنید درجهٔ هر رأس گرافی که اصلاً یال نداشته باشد صفر است. لذا، در این حالت هر دو طرف برابری مذکور در قضیهٔ ۱ صفر به حساب می‌آیند.

نتیجه : تعداد رأس‌های فرد هر گراف، زوج است.

اثبات : مجموع جمع‌وندهای (یعنی مجموع عامل‌های) زوج عبارت $\sum_{i=۱}^{p} \deg v_i$ را با A و مجموع جمع‌وندهای فرد آن را با B نمایش می‌دهیم. پس داریم $۲q = \sum_{i=۱}^{p} \deg v_i = A + B$. عدد A زوج است، زیرا مجموع هر تعداد عدد زوج همواره زوج است. در نتیجه $B = ۲q - A$ نیز زوج است. بنابراین تعداد جمع‌وندهای B، یعنی تعداد رأس‌های فرد گراف، باید زوج باشد. ■

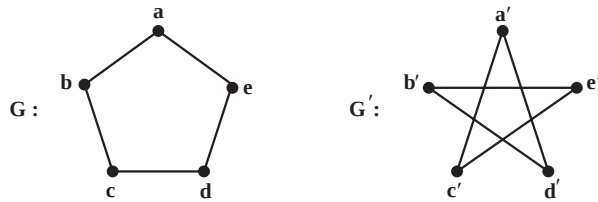
تعریف : بزرگ‌ترین عدد در بین درجه‌های رأس‌های گراف G را **ماکسیمم درجهٔ** G می‌نامیم و آن را با $\Delta(G)$ یا به‌طور ساده با Δ نمایش می‌دهیم. کوچک‌ترین عدد در بین درجه‌های رأس‌های گراف G را **مینیمم درجهٔ** G می‌نامیم و آن را با $\delta(G)$ یا به‌طور ساده با δ نمایش می‌دهیم.

مثال ۳ : در شکل ۶ از فصل ۱ داریم : $\Delta = ۵$ و $\delta = ۱$. در تمام گراف‌های مربوط به هیدروکربن‌ها $\Delta = ۴$ و $\delta = ۱$. ▲

۲ـ۲ـ گراف‌های منتظم، کامل و تهی

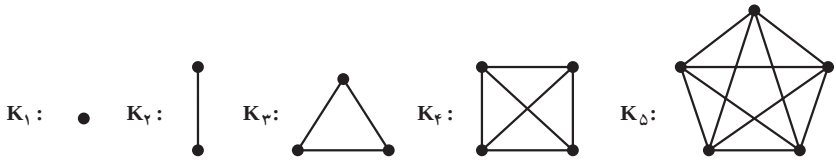
تعریف : عدد صحیح و نامنفی r داده شده است. گراف G از مرتبهٔ p را r ـ **منتظم** می‌نامیم هرگاه درجهٔ هررأس G برابر با r باشد، هر گراف (p−۱) ـ منتظم از مرتبهٔ p را **گراف کامل** هم می‌نامیم و آن را با K_p نمایش می‌دهیم.

مثال ۴ : هر یک از دو گراف شکل ۱، دو ـ منتظم است ولی چون در این دو مثال $p = ۵$ و $p - ۱ = ۴ \neq ۲$ این دو گراف کامل نیستند. توجه کنید که در گراف کامل G از مرتبهٔ p درجهٔ هر رأس p − ۱ است و لذا به‌ازای هر $u \neq v, u, v \in V(G)$ داریم $uv \in E(G)$.



شکل ۱ــ گراف‌های ۲ــ منتظم

مثال ۵ : در شکل زیر پنج گراف کامل K_p، $۱ \leq p \leq ۵$، رسم شده‌اند. در مورد هر یک از این مثال‌ها دیده می‌شود که تعداد یال‌های K_p برابر با $p(p-۱)/۲$ است.

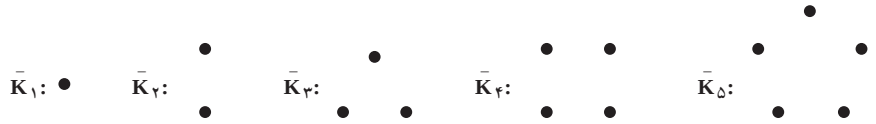


شکل ۲ــ گراف‌های کامل از مرتبه‌های ۱ تا ۵

قضیهٔ ۲ : تعداد یال‌های گراف کامل K_p، $p \in \mathbb{N}$ برابر با $p(p-۱)/۲$ است.

اثبات : مجموع درجه‌های رأس‌های گراف K_p برابر با $p(p-۱)$ است. پس، بنابر قضیهٔ۱، نصف این عدد برابر با $q(K_p)$ است. ■

قرارداد : گراف ۰ ــ منتظم از مرتبهٔ p را با $\overline{K_p}$ نمایش می‌دهیم. چون $\overline{K_p}$ هیچ یال ندارد، یعنی $E(\overline{K_p}) = \varnothing$، این گراف را **گراف تهی** هم می‌نامیم. گراف‌های تهی با p رأس، $۱ \leq p \leq ۵$، را در شکل ۳ می‌بینید.



شکل ۳ــ گراف‌های تهی از مرتبه‌های ۱ تا ۵

۲ـ۳ـ مسیر گراف و دورگراف

تعریف : اگر u و v دو رأس متفاوت از گراف دلخواه G باشند، **یک مسیر** از u به v از **گراف G** دنباله‌ای متشکل از $m+1$، $m \in \mathbb{N}$ رأس دو بـه دو متفاوت G است که از u آغاز و به v ختم می‌شود و هـر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاورند. عدد m را **طـول** این **مسیر از گراف** G می‌نامیم. می‌پذیریم که دنبالهٔ متشکل از تنها یک رأس v یک **مسیر** با **طول صفر** از v به v از گراف G باشد.

در واقع یک مسیر از رأس u به رأس v از گراف G را به این ترتیب به‌دست می‌آوریم که با در نظر گرفتن نموداری از G ابتدا u را یادداشت می‌کنیم؛ از یک یال مارّ بر u (در صورت وجود) می‌گذریم و الزاماً به رأسی تازه می‌رسیم و آن را به عنوان دومین عضو دنباله یادداشت می‌کنیم. از آن‌جا یالی تازه از G را برمی‌گزینیم و از آن به رأس سومی می‌رسیم که آن را نیز یادداشت می‌کنیم و این عمل را ادامه می‌دهیم تا در صورت امکان پس از گذشتن از m یال دوبه‌دو متفاوت، $m \geq 0$، به v برسیم. در پایان v را نیز یادداشت می‌کنیم. رأس‌هایی را که یادداشت کرده‌ایم دنباله‌ای است که یک مسیر از u به v از گراف G را به‌دست می‌دهد.

مثال ۶ : در شکل ۲ از فصل ۱ از a به b پنج مسیر وجود دارند. در این گراف مثلاً

a,b a,c,d,b a,c,e,d,b

سه مسیر متفاوت با طول، به ترتیب از چپ به راست، ۱، ۳ و ۴ از رأس a به رأس b هستند. (دو مسیر دیگر از a به b را بنویسید و طول آنها را مشخص کنید.) ▲

واضح است که اگر در گرافی از u به v مسیری وجود داشته باشد در آن گراف از رأس v به u هم مسیری وجود دارد. لذا وجود یا عدم وجود مسیر «بین» دو رأس گراف معنی دارد.

تعریف : گراف G را **همبند** می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن مسیری وجود داشته باشد. در غیر این صورت G را **ناهمبند** می‌نامیم.

مثال ۷ : گراف شکل ۲ از فصل ۱ همبند است. ولی گراف شکل ۳ از فصل ۱ و گراف تهی $\bar{K}_p$، $p \geq 2$، همبند نیستند. البته $\bar{K}_1$ نیز همبند است. به مثال ۷ از فصل ۱ بازگردید. گفتیم که این

گراف از سه «بخش جدا از هم» تشکیل شده است. این گراف ناهمبند است زیرا مثلاً بین دو رأس v_1 و v_4 مسیری وجود ندارد. ▲

تعریف : یک **دور از گراف** G دنباله‌ای چون $v_1 , v_2 , \ldots , v_m , v_{m+1} = v_1$ با شرط $m \geq 3$ متشکل از $m+1$ رأس G است که در آن v_iها، $1 \leq i \leq m$، دوبه‌دو متمایزند و هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاورند. عدد m را **طول** این **دور از گراف** G می‌نامند.

مثال ۸ : هیچ یک از گراف‌های شکل ۵ از فصل ۱ دور ندارد. همچنین گراف تهی $\overline{K_p}$ دور ندارد. ولی به‌ازای هر $p \geq 3$ گراف کامل K_p دور دارد. در واقع، به ازای هر عدد طبیعی n، $3 \leq n \leq p$، گراف K_p دوری به طول n دارد. گراف شکل ۶ از فصل ۱ دوری ندارد که طولش فرد باشد ولی دوری به طول ۴ (دنبالهٔ b_2, a_2 , b_4, a_4, b_2) و دوری به طول ۶ (دنبالهٔ $b_1, a_2 , b_3, a_4, b_2, a_3 , b_1$) دارد. ▲

۲ـ۴ـ تمرین‌ها

۱ــ فرض کنید گراف G، ۳- منتظم است و داریم $q = 2p - 3$. مرتبهٔ G با p و اندازهٔ آن با q نمایش داده شده است.

الف) ویژگی‌های گراف G را مشخص کنید.

ب) گرافی رسم کنید که این ویژگی‌ها راداشته باشد.

پ) گراف دیگری رسم کنید که واجد این ویژگی‌ها باشد.

۲ــ الف) گراف شکل ۶ از فصل ۱ را در نظر بگیرید و پارامترهای p، q، Δ و δ را بیابید.

ب) درجه‌های تمام رأس‌های این گراف را به صورت دنباله‌ای چون $d_1, d_2, \ldots, d_9$:s بنویسید که به‌ازای هر $1 \leq i \leq 8$ داشته باشیم $d_i \geq d_{i+1}$. (دنبالهٔ حاصل را **دنبالهٔ درجه‌های رأس‌های گراف** می‌نامیم.)

پ) چرا گرافی وجود ندارد که S : ۵ ,۳ ,۳ ,۱ ,۰ دنبالهٔ درجه‌های رأس‌های آن باشد؟

۳ــ الف) گرافی ارائه کنید که دنبالهٔ درجه‌های رأس‌هایش S : ۲ ,۳ ,۳ ,۳ ,۲ ,۲ ,۲ ,۰ ,۰ ,۰ باشد.

ب) آیا پاسخ یکتاست؟ چرا؟

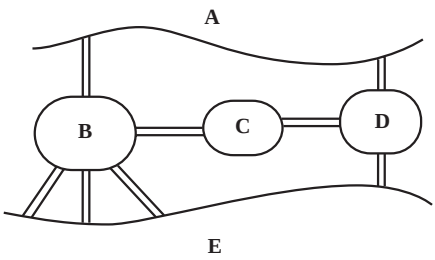
۴ــ چند گراف ۳- منتظم از مرتبهٔ ۱۵ وجود دارند؟ چرا؟

۵ ــ با استقراء بر q قضیهٔ ۱ را اثبات کنید.

۶ ــ گرافی ناهمبند و ۳- منتظم مثال بزنید که ۸ رأس و ۱۲ یال داشته باشد.

۷ــ گرافی همبند و ۳- منتظم مثال بزنید که ۸ رأس و ۱۲ یال داشته باشد.

۸ــ فرض کنید طبق شکل، شهری از یک رودخانه و پنج منطقهٔ A، B، C، D و E تشکیل شده است و این منطقه‌ها با هشت پل به هم راه دارند.



الف) گراف چندگانهٔ مربوط به این شهر را رسم کنید.

ب) آیا با آغاز از یکی از منطقه‌های پنجگانه و عبور از پل‌ها می‌توان از هر پل دقیقاً یک بار گذشت و به منطقهٔ آغاز بازگشت؟

پ) آیا با آغاز از یکی از منطقه‌های پنجگانه می‌توان از هر پل دقیقاً یک بار گذشت؟ در این حالت لازم نیست منطقهٔ آغاز گشت با منطقهٔ پایان آن یکی باشد.

۹ــ در گراف کامل K_p، $۴ \leq p \leq ۲$، تعداد مسیرهای «متفاوت» از یک رأس u به یک رأس v، $u \neq v$، را بیابید.

۱۰ــ الف) گراف شکل ۶ از فصل ۱ «چند» دور دارد؟(پاسخ ۳ است : دو دور از مرتبهٔ ۴ و یک دور از مرتبهٔ ۶. پاسخ را توجیه کنید.)

ب) هر یک از دورها را به صورت دنباله‌ای از رأس‌ها نمایش دهید که رأس اول و آخر دنباله مثل هم و بقیه همراه با این رأس مشترک دو به دو متفاوت باشند؛ به علاوه، هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور باشند.

راهنمایی. یکی از دورهای G را می‌توان به یکی از صورت‌های زیر نوشت :

$b_۱ ,a_۲ ,b_۳ ,a_۳ ,b_۱$ $\qquad$ $b_۱ ,a_۳ , b_۳ ,a_۲ ,b_۱$

$a_۲ ,b_۳ ,a_۳ ,b_۱ ,a_۲$ $\qquad$ $a_۲ ,b_۱ ,a_۳ ,b_۳ ,a_۲$

$b_۳ ,a_۳ ,b_۱ ,a_۲ ,b_۳$ $\qquad$ $b_۳ ,a_۲ ,b_۱ ,a_۳ ,b_۳$

$a_۳ ,b_۱ ,a_۲ ,b_۳ ,a_۳$ $\qquad$ $a_۳ ,b_۳ ,a_۲ ,b_۱ ,a_۳$

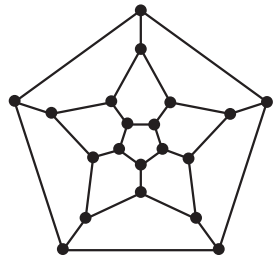
۱۱ــ هفده نفر به سفر می‌روند و قبل از سفر قرار می‌گذارند هر کس به پنج نفر دیگر نامه بفرستد. آیا امکان دارد هر کس به آن پنج نفری نامه بفرستد که از آنها نامه دریافت می‌کند؟ چرا؟

۱۲ــ اگر گراف G از مرتبهٔ p، $p\geq 3$، دوری از مرتبهٔ p داشته باشد، آن‌گاه G را **گراف هَمیلْتنی** می‌نامیم. مثلاً هر K_p، $p\geq 3$، گراف همیلتنی است.

الف) نشان دهید هر گراف همیلتنی همبند است.

ب) اگر G همیلتنی باشد آن‌گاه به ازای هر $v\in V(G)$ داریم $\deg_G v \geq 2$.

پ) آیا گراف زیر گراف همیلتنی است و چرا؟



۱۳ــ الف) گراف G داده شده است. فرض کنید $u , v\in V(G)$ نشان دهید «وجود یک مسیر از u به v» یک رابطهٔ هم‌ارزی بر مجموعهٔ $V(G)$ است.

ب) اگر G گراف شکل ۳ از فصل ۱ باشد، افرازهای حاصل از رابطهٔ هم‌ارزی مذکور در بند (الف) را بیابید.

پ) پاسخ بند (ب) را با فرض این‌که G گراف شکل ۶ یا گراف شکل ۱۰ باشد بیابید.

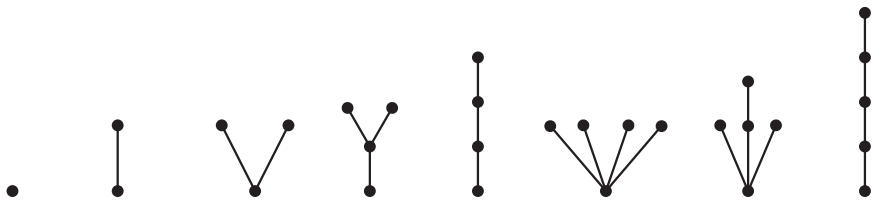
فصل ۳

درخت و ماتریس

در این فصل کوتاه ابتدا ردهٔ خاص دیگری از گراف‌ها موسوم به درخت‌ها را معرفی می‌کنیم و به بررسی ویژگی‌های آنها می‌پردازیم. سرانجام به هر گراف یک ماتریس نسبت می‌دهیم و نشان می‌دهیم که هر گراف را می‌توان با یک ماتریس بسیارخاص نیز نمایش داد.

۳ـ۱ـ درخت

گراف همبندی را که هیچ دور نداشته باشد **درخت** می‌نامیم. گراف‌های K_1 و K_2 درخت‌اند و به ترتیب «تنها» درخت‌های با یک و دو رأس هستند. در شکل ۱ تمام درخت‌های از مرتبهٔ p، $1 \le p \le 5$، را رسم کرده‌ایم.



شکل ۱ــ درخت‌های از مرتبهٔ ۱ تا ۵

گراف مربوط به هر هیدروکربن C_nH_{2n+2} نیز یک درخت است. می‌بینیم که در هر یک از این مثال‌ها بین هر دو رأس دقیقاً یک مسیر وجود دارد. این مطلب همواره درست است.

قضیهٔ ۱ : بین هر دو رأس هر درخت مفروض دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

اثبات : اثبات در حالتی که دو رأس متمایز نباشند واضح است. فرض کنید u و v دو رأس متمایز درختی چون G باشند. چون G همبند است بین u و v دست کم یک مسیر وجود دارد. اگر در G دو مسیر مختلف (در واقع دو دنبالهٔ مختلف از رأس‌های متمایز G) از u به v وجود داشته باشند، آن‌گاه این دو مسیر مختلف «ایجاب» می‌کنند که دوری در G وجود داشته باشد. پس G درخت نیست و این، یک تناقض است. ■

مطلب دیگری که از درخت‌های شکل ۱ برمی‌آید این است که، به‌جز K_1، هر یک دست‌کم دو رأس از مرتبهٔ یک دارد. این مطلب نیز همواره درست است.

قضیهٔ ۲ : هر درختی که بیش از یک رأس داشته باشد دست‌کم دو رأس از درجهٔ یک دارد.

اثبات : از به اصطلاح استقرای تعمیم یافته روی مرتبهٔ درخت G استفاده می‌کنیم. اگر $p=2$ آن‌گاه $G=K_2$ و درستی حکم واضح است. فرض می‌کنیم حکم در مورد هر درخت با $k \geq 2$ رأس درست است. سپس درختی چون G از مرتبهٔ $k+1$ را در نظر می‌گیریم. اگر G رأسی چون v از درجهٔ یک داشته باشد آنگاه با حذف رأس v و تنها یال مارّ بر آن گرافی مانند G' به‌دست می‌آوریم که درخت است و $k \geq 2$ رأس دارد. پس بنا به فرض استقراء، G' و در نتیجه G دست‌کم دو رأس از درجهٔ یک دارد. پس فرض می‌کنیم درجهٔ هیچ رأسی از G از دو کمتر نباشد. در این صورت رأسی چون u از G را در نظر می‌گیریم. با آغاز از u و انتخاب یالی از G که از u می‌گذرد مسیری چون P را به این ترتیب می‌پیماییم که هر بار پس از رسیدن به رأسی تازه یالی از G را در پیش می‌گیریم که اولاً از آن رأس بگذرد، ثانیاً قبلاً مورد استفاده قرار نگرفته باشد، و ثالثاً انتهای دیگر آن رأسی تازه‌تر از G باشد. این کار باید در جایی متوقف شود. چون درجهٔ هر رأس دست‌کم دو است توقف آن با رسیدن به یکی از رأس‌های قبل میسر است و لذا دوری در G به‌وجود می‌آید. این تناقض قضیه را ثابت می‌کند. ■

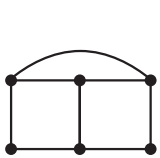
به مثال‌های گوناگون درخت‌ها نظر افکنید، می‌بینید که در مورد تمام آنها قضیهٔ زیر درست است.

قضیهٔ ۳ : اگر G درختی با p رأس و q یال باشد آن‌گاه

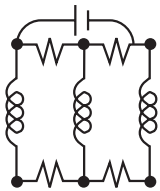
$$p = q + 1$$

اثبات : با استقراء بر p قضیه را ثابت می‌کنیم. اگر $p = 1$ آن‌گاه $q = 0$ و داریم $p = q + 1$. فرض کنید قضیه درمورد هر درختی با $k \geq 1$، k رأس درست باشد. حال درختی چون G را در نظر می‌گیریم که $k+1$ رأس دارد. باید نشان دهیم تعداد یال‌های آن k است. بنا به قضیهٔ قبل G رأسی چون v دارد که $\deg v = 1$. با حذف رأس v و تنها یال مارّ بر آن درختی چون G' ایجاد می‌شود که مرتبه‌اش k است. بنابه فرض استقراء، گراف G' دارای $k-1$ یال است. پس درخت G دقیقاً k یال دارد. ■

درخت در رشته‌های مختلفی مانند شیمی، مهندسی برق و علم محاسبه کاربرد دارد. کرشهف در سال ۱۸۴۷ میلادی هنگام حل دستگاه‌های معادلات خطی مربوط به شبکه‌های الکتریکی درخت‌ها را کشف و نظریهٔ درخت‌ها را بارور کرد. در شکل زیر N یک شبکهٔ الکتریکی و G گراف مربوط به آن است.



G



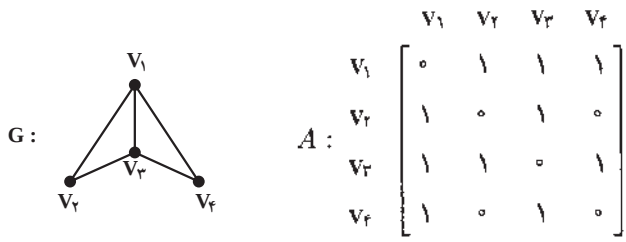
N

کِیلی در سال ۱۸۵۷ میلادی درخت‌ها را در ارتباط با شمارش ایزومرهای مختلف هیدروکربن‌ها کشف کرد. وقتی مثلاً می‌گوییم دو ایزومر مختلف $C_۴H_{۱۰}$ وجود دارند منظورمان این است که دو درخت «متفاوت» با ۱۴ رأس وجود دارند که درجهٔ ۴ رأس از این ۱۴ رأس چهار و درجهٔ هر یک از ۱۰ رأس باقیمانده یک است.

اگر هزینهٔ کشیدن مثلاً راه‌آهن بین هر دو شهر از p شهر مفروض مشخص باشد ارزان‌ترین شبکه‌ای که این p شهر را به هم وصل می‌کند با مفهوم یک درخت از مرتبهٔ p ارتباط نزدیک دارد. به‌جای مسألهٔ مربوط به راه‌آهن می‌توان وضعیت مربوط به شبکه‌های برق‌رسانی، لوله‌کشی نفت، لوله‌کشی گاز و ایجاد کانال‌های آبرسانی را در نظر گرفت. برای تعیین یک شبکه با نازل‌ترین هزینه از قاعده‌ای به نام الگوریتم صرفه‌جویی استفاده می‌شود که کاربردهای فراوان دارد.

۳ـ۲ـ گراف‌ها و ماتریس‌ها

گراف $G=(V,E)$ با $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و $E= \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4\}$ را که در شکل ۲ رسم شده است در نظر بگیرید. به این گراف ماتریسی ۴ × ۴ چون $A = (a_{ij})$ به شرح زیر نسبت می‌دهیم. در مقابل چهار سطر و چهار ستون این ماتریس طبق شکل ۲ می‌نویسیم v_1 ، v_2 ،v_3و v_4. درایهٔ a_{ij} از این ماتریس ۱ است هر گاه $v_iv_j \in E$ و ۰ است هر گاه $v_iv_j \notin E$.



شکل ۲ــ گراف و ماتریس مجاورت آن

توجه کنید که :

(۱) درایه‌های روی قطر اصلی همگی صفرند زیرا گراف‌های (سادهٔ) موضوع بحث ما «طوقه» ندارند، یعنی هیچ رأسی با خودش مجاور نیست.

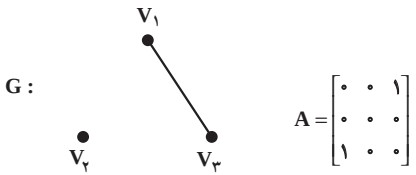
(۲) تعداد سطرهای این ماتریس برابر است با تعداد ستون‌های آن، یعنی ماتریس A مربعی است.

(۳) هر درایهٔ ماتریس A یا صفر است یا یک، یعنی همواره $a_{ij} \in \{۰,۱\}$.

(۴) ماتریس A متقارن است، یعنی همواره $a_{ij} = a_{ji}$، زیرا اگر $v_iv_j \in E$ آن‌گاه $v_jv_i \in E$.

واضح است که به هر گراف دلخواه G همواره می‌توان ماتریسی چون A با ویژگی‌های چهارگانه بالا نسبت داد. این ماتریس را **ماتریس مجاورت گراف** G می‌نامیم و آن را با A(G) یا به‌طور ساده با A نمایش می‌دهیم.

جالب این‌جاست که به هر ماتریس با ویژگی‌های چهارگانه بالا می‌توان یک گراف نسبت داد. مثلاً اگر ماتریس A از شکل ۳ را به ما بدهند فوراً می‌توانیم گراف G از همین شکل را به آن نسبت دهیم. برای این کار به‌ازای سطر (یا ستون) اول ماتریس نقطه‌ای چون v_1، به ازای سطر (یا ستون) دوم ماتریس نقطه‌ای چون v_2 و همین‌طور به ازای سطر (یا ستون) سوم نقطهٔ دیگر v_3 را در نظر می‌گیریم و نقطهٔ v_i را به نقطهٔ v_j با خطی به هم وصل می‌کنیم هرگاه درایهٔ مربوط در ماتریس داده شده یک باشد و در غیر این صورت آن دو را به هم وصل نمی‌کنیم.



شکل ۳ــ ماتریس با شرایط چهارگانهٔ بالا و گراف آن

پس می‌بینیم که یک گراف با p رأس در واقع چیزی جز یک ماتریس مربعی $p \times p$ با شرایط چهارگانهٔ بالا نیست. و لذا برای مطالعهٔ گراف‌ها می‌توان صرفاً ماتریس‌های مربعی متقارنی را مطالعه کرد که درایه‌های آنها از مجموعهٔ {۰, ۱} انتخاب می‌شوند و درایه‌های روی قطر اصلی آن‌ها صفرند. بنابراین نظریهٔ گراف‌ها را می‌توان شاخه‌ای از جبر هم تلقی کرد.

قضیهٔ ۴ : فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف G با $V(G) = \{v_1, \ldots, v_p\}$ باشد. آن‌گاه درایهٔ واقع در سطر iام و ستون iام ماتریس A^2 برابر است با درجهٔ رأس v_i در گراف G.

اثبات : درایهٔ واقع در سطر iام و ستون iام ماتریس A^2 برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های نظیر به نظیر سطر iام A و ستون iام A. چون A متقارن است این درایه از حاصل‌ضرب‌های درایه‌های نظیر به نظیر سطر iام A و سطر iام A حاصل می‌شود. تعداد یک‌های موجود در سطر iام A برابر است با درجهٔ رأس v_i و لذا برای محاسبهٔ درایهٔ موردنظر از ماتریس A^2 باید به اندازهٔ $\deg v_i$ عدد ۱ = ۱ × ۱ را با هم جمع کنیم. ■

۳ـ۳ـ تمرین‌ها

۱ــ گراف همبندی معرفی کنید که مجموع مرتبه و اندازهٔ آن ۸ باشد.

۲ــ گراف همبندی معرفی کنید که حاصل‌ضرب مرتبه و اندازهٔ آن ۲۰ باشد.

۳ــ فرض کنید ماکسیمم درجهٔ یک درخت T برابر با k باشد. ثابت کنید که T دست‌کم k رأس از درجهٔ یک دارد.

۴ــ گرافی از مرتبهٔ ۶ و اندازهٔ ۶ معرفی کنید که ۲- منتظم باشد.

۵ ــ تمام درخت‌های از مرتبهٔ ۶ را رسم کنید.

۶ ــ دو ماتریس M_1 و M_2 به صورت زیر داده شده‌اند.

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

آن را که معرف یک گراف است مشخص کنید و نمودار آن را بکشید.

۷ــ اگر ماتریس مجاورت گراف K_p، $p \in \mathbb{N}$، را با M نمایش دهیم نشان دهید هر درایهٔ واقع بر روی قطراصلی ماتریس M^2 برابر با $p-1$ است.

۸ ــ الف) قضیهٔ ۱ را با استفاده از استقراء روی مرتبهٔ یک درخت و با به کار بردن قضیهٔ ۲ ثابت کنید.

ب) اثباتی را که در متن برای قضیهٔ ۱ ارائه شده است با اثباتی که طبق بند (الف) این تمرین به‌دست می‌آید مقایسه کنید و با ذکر دلیل به پرسش‌های زیر پاسخ دهید :

ــ کدام اثبات شهودی‌تر است؟

ــ کدام اثبات «دقیق‌تر» است؟

ــ کدام اثبات را بیشتر می‌پسندید؟

۹ــ الف) در شکل زیر یک گراف ناهمبند G رسم شده است. رأس‌های G را با $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ و v_7 چنان برچسب بزنید که ناهمبند بودن G از ماتریس مجاورت آن آشکار باشد.

G :

ب) اگر این فکر را در مورد یک گراف ناهمبند و دلخواه G به کار بریم ماتریس مجاورتش چه صورتی خواهد داشت؟

۱۰ــ الف) با توجه به تعریف ماتریس مجاورت گراف (ساده) ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار را تعریف کنید.

ب) ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار شکل ۴ از فصل ۱ را بنویسید.

۱۱ــ گراف همبند G داده شده است. اگر $u, v \in V(G)$ فاصلهٔ u از v در G که با $d(u,v)$ نمایش داده می‌شود برابر است با طول کوتاه‌ترین مسیر از u به v در G. نشان دهید :

الف) $d(u,v) = 0$ اگر و تنها اگر $u = v$.

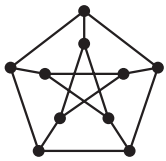
ب) به ازای هر $u, v \in V(G)$ داریم $d(u,v) = d(v,u)$.

پ) به ازای هر $u, v, w \in V(G)$ داریم $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$.

۱۲ــ گراف زیر موسوم به **گراف پِترِسِن** را در نظر بگیرید.

الف) در این گراف دوری مشخص کنید که طول آن هر یک از اعداد ۵، ۶، ۸ و ۹ باشد.

ب) آیا این گراف هَمیلِتنی است؟ چرا؟



مراجع

1ــ M. Behzad, G. Chartrand, and L. Lesniak-Foster, Graphs and Digraphs, Wadsworth International Group, Belmont, Galif. 1979.

2ــ O. Ore, and R. J. Wilson, Graphs and their Uses, The Mathematical Association of America, 1990.

۲ نظریهٔ اعداد

مقدمه

نظریهٔ اعداد یکی از شاخه‌های زیبا و جالب ریاضی است که ریشه در تاریخ بشر دارد و به دلیل زیبایی و کارایی همواره مورد علاقه بوده است. پیشرفت‌های علوم دیگر مانند کامپیوتر و رمز نگاری که تکیه بر نظریهٔ مقدماتی اعداد دارند، به شادابی و زنده بودن این شاخه از دانش بشری کمک کرده‌اند.

در این قسمت مباحثی مقدماتی از نظریهٔ اعداد را ارائه می‌دهیم و انتظار داریم دانش‌آموزان عزیز با توجه به محتوای غنی این رشته و نیز تأثیر مثبت حل مسائل آن در جهت تقویت تفکّر ریاضی، مسائلی جالب از نظریهٔ اعداد را انتخاب و حل کنند.

فصل ۴

کلّیات و تقسیم‌پذیری

۴ـ۱ـ برخی از اصول نظریهٔ اعداد

نظریهٔ اعداد شاخه‌ای از ریاضیات است که بیشتر به خواص اعداد طبیعی

$$۱,۲,۳,\ldots$$

می‌پردازد. در مورد چگونگی به‌وجود آمدن اعداد طبیعی اطلاع درستی در دست نیست، اما شواهدی وجود دارند که نشان می‌دهند بشر اوّلیه اعداد طبیعی را برای شمارش مورد استفاده قرار داده است و به تدریج روش‌هایی را برای نمایش اعداد و انجام محاسبات اختراع کرده است.

شمارش گوسفندان قبل از رفتن به چرا و پس از بازگشت آنها با استفاده از مفهوم تناظر یک به یک بین مجموعهٔ گوسفندها و زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی، یا به صورت یک انگشت، یا یک علامت روی سنگ و یا کنار گذاشتن یک تکه چوب به جای هر گوسفند، حتی هنوز هم گاهی به‌طور ابتدایی معمول است. این عمل که برای تهیهٔ آمار و حتی رأی‌گیری‌های ساده هم به‌کار می‌رود از شواهد اوّلیهٔ شناخت اعداد طبیعی است.

دنبالهٔ اعداد طبیعی از ۱ شروع می‌شود و هر عضو دیگر آن با افزودن یک واحد به عدد قبلی به‌دست می‌آید.

در سال‌های گذشته، با مجموعهٔ اعداد طبیعی

$$\mathbb{N} = \{۱,۲,۳,\ldots\}$$

و عمل‌های جمع و ضرب آنها و با ویژگی‌های این دو عمل اصلی و نیز با عمل تفریق روی مجموعهٔ **اعداد صحیح**

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots\}$$

آشنا شده‌ایم.

ما در اینجا ساختار اعداد صحیح را به روش اصل موضوعی مطرح نکرده بلکه فقط اصل موضوع «**خوش‌ترتیبی**» و یا معادل آن اصل موضوع «**استقرای ریاضی**» را به عنوان زیربنای قضیه‌های نظریهٔ اعداد بیان می‌کنیم.

اصل خوش‌ترتیبی

هر زیرمجموعهٔ ناتهی از اعداد طبیعی دارای **کوچک‌ترین عضو** است، یعنی اگر $S \subset \mathbb{N}$ و $S \neq \varnothing$، آن‌گاه عضوی از S مانند $s_۰$ وجود دارد که به ازای هر s متعلق به S،

$$s_۰ \leq s$$

(کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ A را **عضو ابتدای** مجموعهٔ A هم می‌نامند)[۱].

اصل استقرای ریاضی

هر زیر مجموعهٔ S از $\mathbb{N}$ که دارای دو خاصیت زیر باشد، با مجموعهٔ $\mathbb{N}$ برابر است :

الف) $۱ \in S$

ب) هرگاه $n \in S$، آن‌گاه $n + ۱ \in S$.

با پذیرفتن هریک از اصل‌های فوق می‌توان اصل دیگر را به عنوان یک قضیه اثبات کرد.

۴ـ۲ـ معادل‌های اصل استقرای ریاضی

معادل‌های دیگری برای اصل استقرای ریاضی وجود دارند که برخی را در اینجا مطرح می‌کنیم :

الف) فرض کنیم P(n) عبارتی دربارهٔ عدد طبیعی n باشد. اگر P(۱) درست باشد و به ازای هر عدد طبیعی n از درستی P(n)، درستی P(n+۱) نتیجه شود، آن‌گاه P(n) به ازای هر عدد طبیعی n درست است.

۱ـ نماد $s_۰ = \min S$ برای کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ S به‌کار می‌رود.

تعمیم این مطلب به صورت زیر است :

ب) فرض کنیم P(n) عبارتی دربارهٔ عدد صحیح n باشد. اگر به ازای یک $m\in\mathbb{Z}$ ، P(m) درست باشد واگر به ازای هر $n \geq m$، از درستی P(n) درستی P(n+۱) نتیجه شود، آن‌گاه P(n) به ازای هر عدد صحیح $n \geq m$ درست است.

می‌توان ثابت کرد که الف، ب و اصل استقرای ریاضی دو به دو معادل‌اند.

درکتاب جبر و احتمال، مثال‌های متعددی وجود دارند که ما را با نحوهٔ استفاده از اصل استقرای ریاضی آشنا می‌کنند. در اینجا ذکر یک نکته را ضروری می‌دانیم :

در اثبات به روش استقرا باید درستی هر دو شرط بررسی شوند. مثلاً، عبارت زیر را درنظر بگیرید :

$$۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n-۱) = n^۲ + ۳$$

اگر چه گام دوم استقرای ریاضی (یعنی اثبات درستی به ازای $n + ۱$، با فرض درست بودن به ازای n) برقرار است ولی هیچ عدد طبیعی n در این عبارت صدق نمی‌کند.

همان‌طور که گفتیم می‌توان ثابت کرد که اصل خوش‌ترتیبی و اصل استقرای ریاضی معادل‌اند. یعنی می‌توان به دلخواه یکی را اصل گرفت و دیگری را به عنوان قضیه ثابت کرد؛ مثلاً داریم :

قضیهٔ ۱ : اصل استقرای ریاضی از اصل خوش‌ترتیبی نتیجه می‌شود.

اثبات : فرض کنیم $P \subset \mathbb{N}$، $۱\in P$ و اگر $n\in P$ آن‌گاه $n+۱\in P$. می‌خواهیم ثابت کنیم $P = \mathbb{N}$. اگر چنین نباشد پس $T = \mathbb{N} - P \neq \varnothing$. لذا T کوچک‌ترین عضوی دارد که آن را $t_۰$ می‌نامیم. $t_۰ \neq ۱$ (چرا؟)، پس $t_۰ - ۱ \in \mathbb{N}$، لذا $t_۰ - ۱ < t_۰$ و $t_۰ - ۱ \notin T$، یعنی $t_۰ - ۱ \in P$ پس $t_۰ - ۱ + ۱ = t_۰ \in P$، که با $t_۰ \in T$ در تناقض است. در نتیجه $P = \mathbb{N}$. ■

اصل استقرای قوی ریاضی

هر زیرمجموعهٔ S از $\mathbb{N}$ که دارای دو خاصیت زیر باشد، با مجموعهٔ $\mathbb{N}$ برابر است :

الف) $۱\in S$

ب) اگر اعداد طبیعی کوچک‌تر از n در S باشند، آن‌گاه $n\in S$.

اصل استقرای قوی ریاضی با اصل استقرای ریاضی و در نتیجه با اصل خوش‌ترتیبی معادل است. برای نشان دادن نحوهٔ استفاده از اصل استقرای قوی ریاضی، به مثال زیر توجه کنید :

مثال ۱ : چند جملهٔ اول دنبالهٔ موسوم به **دنبالهٔ اعداد لوکا** عبارت‌اند از :

$$۱, ۳, ۴, ۷, ۱۱, ۱۸, ۲۹, ۴۷, \ldots$$

اگر جملهٔ nام را با L_n نمایش دهیم این دنباله از به اصطلاح «رابطهٔ بازگشتی» زیر

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \qquad n \geq ۳$$

و شرایط اولیهٔ

$$L_۲ = ۳ \, , L_۱ = ۱$$

به‌دست می‌آید. با استفاده از اصل استقرای قوی ریاضی ثابت می‌کنیم که به ازای هر عدد طبیعی n،

$$L_n < (\frac{۷}{۴})^n$$

اگر $S = \left\{ n \in \mathbb{N} : L_n < (\frac{۷}{۴})^n \right\}$، آن‌گاه $۱ \in S$ و $۲ \in S$. (چرا؟) حال اگر $n \geq ۳$ و به ازای هر k وقتی که $k \in S, k < n$، آن‌گاه $L_{n-۱} < (\frac{۷}{۴})^{n-۱}$ و $L_{n-۲} < (\frac{۷}{۴})^{n-۲}$. پس

$$L_n < (\frac{۷}{۴})^{n-۱} + (\frac{۷}{۴})^{n-۲} = (\frac{۷}{۴})^{n-۲}(\frac{۷}{۴} + ۱) < (\frac{۷}{۴})^n$$

یعنی $n \in S$. پس $S = \mathbb{N}$. لذا برای هر عدد طبیعی n داریم، $L_n < (\frac{۷}{۴})^n$. ▲

۴ـ۳ـ تقسیم‌پذیری

یکی از چهار عمل اصلی روی اعداد صحیح، تقسیم است. می‌دانیم حاصل تقسیم دو عدد صحیح الزاماً یک عدد صحیح نیست. مثلاً، حاصل تقسیم ۱۲− بر ۵، عدد صحیح نیست. در مواردی حاصل تقسیم عددی بر عددی دیگر یک عدد صحیح می‌شود مثل ۱۲ و ۶. در این حالت می‌گوییم عدد ۶ عدد ۱۲ را می‌شمارد، یا عدد ۱۲ بر ۶ تقسیم‌پذیر است. در واقع ۱۲ یک مضرب ۶ است : $۲ \times ۶ = ۱۲$. در حالت عمومی تعریف زیر را ارائه می‌دهیم :

تعریف : عدد صحیح a را بر عدد صحیح $b \neq ۰$، **تقسیم‌پذیر** یا (بخش‌پذیر) گوییم هرگاه عدد صحیحی مانند q یافت شود به گونه‌ای که $a = bq$. در این صورت می‌نویسیم $b|a$ و چنین می‌خوانیم : a بر b تقسیم‌پذیر است[۱] و یا b یک شمارنده یا **مقسوم‌علیه** a است. هرگاه a بر b تقسیم‌پذیر نباشد می‌نویسیم $b \nmid a$. در حالت $b = ۰$، چون به ازای هر $q \in \mathbb{Z}$، $q \times ۰ = ۰$، می‌توان تعریف تقسیم‌پذیری را گسترش داد و عبارت «۰ بر ۰ تقسیم‌پذیر است» را نیز پذیرفت.

۱ــ هرگاه a بر b تقسیم‌پذیر باشد می‌گوییم b عدد a را می‌شمارد (عاد می‌کند)، یا a مضرب b است، یا b یک سازهٔ (عامل) a است.

در مثال فوق $b = ۶$، $a = ۱۲$، $q = ۲$ و $۱۲ = ۶ \times ۲$ و می‌نویسیم $۶|۱۲$. از تعریف بالا نتایج زیر به‌دست می‌آیند :

الف) صفر بر هر عدد b، تقسیم‌پذیر است.

ب) اعداد ۱ و ۱−، هر عدد صحیح را می‌شمارند. (چرا؟)

با توجه به مفهوم رابطه که در سال‌های قبل با آن آشنا شده‌ایم، می‌توان تقسیم‌پذیری را به عنوان یک رابطه با ویژگی‌های زیر بر مجموعهٔ اعداد صحیح درنظر گرفت.

۱ــ این رابطه بازتابی است، زیرا برای هر عدد صحیح a داریم $a = a \times ۱$، پس $a|a$.

۲ــ این رابطه ترایایی است، یعنی اگر $a|b$ و $b|c$، آن‌گاه $a|c$. برای اثبات می‌گوییم : یک عدد صحیح q وجود دارد که $b = aq$ و یک عدد صحیح q' وجود دارد که $c = bq'$. در نتیجه

$$c = (aq)q' = a(qq')$$

یعنی $a|c$.

۳ــ این رابطه متقارن نیست، چون مثلاً $۲|۶$ ولی $۶ \nmid ۲$

۴ــ این رابطه پاد متقارن نیست، چون مثلاً $۲|-۲$ و $-۲|۲$ ولی $۲ \neq -۲$.

۴ـ۴ـ چند ویژگی تقسیم‌پذیری

با قضیه‌های زیر ویژگی‌های عمدهٔ تقسیم‌پذیری را ارائه می‌دهیم :

قضیهٔ ۲ : به ازای اعداد صحیح a و b، اگر $a|b$، آن‌گاه

الف) $-a|b$ ب) $a|-b$ پ) $-a|-b$

ت) به ازای هر عدد صحیح m، $a|mb$. ث) اگر $b \neq ۰$، آن‌گاه $|a| \leq |b|$.

اثبات : اگر $a|b$ بنا به تعریف $b = aq$. در نتیجه $b = aq = (-a)(-q)$

و نیز

$$-b = a(-q) = (-a)q$$

پس الف، ب و پ برقرارند. علاوه بر آن برای $m \in \mathbb{Z}$

$$mb = m(aq) = a(mq)$$

پس $a|mb$.

برای اثبات قسمت آخر چون $b = aq$ پس $|b| = |a|\,|q|$. ولی $b \neq ۰$ در نتیجه $q \neq ۰$، پس $|q| \geq ۱$ یعنی $|a| \leq |b|$. ■

قضیهٔ ۳ : به ازای اعداد صحیح a، b و c

الف) اگر $a|1$، آن‌گاه $a = \pm 1$ (تنها مقسوم‌علیه‌های عدد ۱، اعداد ۱ و ۱− هستند).

ب) اگر $a|b$ و $b|a$، آن‌گاه $a = \pm b$.

پ) اگر $a|b$ و $a|c$، آن‌گاه به ازای اعداد صحیح و دلخواه m و n، داریم $a|mb + nc$.

اثبات : الف) اگر $a|1$، آن‌گاه $|a| \leq 1$ یعنی $|a| = 0$ و یا $|a| = 1$. اما اگر $|a| = 0$، آن‌گاه $a = 0$ ولی $1 \not| 0$ پس $|a| = 1$. در نتیجه $a = \pm 1$.

ب) اگر $a|b$ و $b|a$ آن‌گاه عدد صحیح q وجود دارد که $b = aq$ و عدد صحیح q' وجود دارد که $a = bq'$. پس :

$$b = aq = b(qq')$$

اگر $b = 0$ الزاماً $a = 0$ و در نتیجه $a = b = 0$. اگر $b \neq 0$ آن‌گاه $qq' = 1$، یعنی $q'|1$ و لذا $q' = \pm 1$.

پس $a = \pm b$

پ) اگر $a|b$ و $a|c$ آنگاه عدد صحیح q وجود دارد که $b = aq$ و عدد صحیح q' وجود دارد که $c = aq'$. به ازای اعداد صحیح دلخواه m و n داریم

$$mb + nc = maq + naq'$$
$$= (mq + nq')a$$

پس :

$$a|mb + nc$$

■

۴ـ ۵ ـ الگوریتم تقسیم

اگر عدد صحیح a بر عدد طبیعی b تقسیم‌پذیر نباشد، در انجام تقسیم باقیمانده‌ای به‌جز صفر پیدا می‌شود. کلیّت مسئله اگرچه یک الگوریتم نیست ولی هنوز اسم سنتی خود «الگوریتم تقسیم» را حفظ کرده و عبارت است از :

قضیهٔ ۴ : (**الگوریتم تقسیم**) : اگر a یک عدد صحیح و b یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه اعداد یکتای $q \in \mathbb{Z}$ و r وجود دارند که

$$a = bq + r \; , \; 0 \leq r < b$$

(**q خارج قسمت، r باقیمانده، a مقسوم و b مقسوم‌علیه** نامیده می‌شوند.)

اثبات : نخست نشان می‌دهیم که $r \, , \, q \in \mathbb{Z}$ وجود دارند و پس از آن یکتا بودن آنها را ثابت می‌کنیم. چون a، b و q اعداد صحیح‌اند، $S = \{a - bq > ۰ : \; q \in \mathbb{Z}\}$ یک زیرمجموعه از اعداد طبیعی است. نشان می‌دهیم که S تهی نیست و اصل خوش‌ترتیبی را به‌کار می‌بریم. به ازای عدد صحیح $q = -|a| - ۱$، $a - bq > ۰$؛ زیرا

$$a - bq = a + b|a| + b \geq a + |a| + ۱ \geq ۱ > ۰$$

پس به ازای این مقدار q، $a - bq \in S$. لذا S دارای کوچک‌ترین عضو است. کوچک‌ترین عضو این مجموعه را r می‌نامیم. در این صورت عددی صحیح مانند q وجود دارد که $r = a - bq$. یعنی :

$$a = bq + r$$

اگر $r > b$، آن‌گاه

$$r - b = a - b\,(q + ۱) \in S$$

ولی چون $b > ۰$ پس $r - b < r$ که متناقض با کوچک‌ترین بودن r است، پس $r \leq b$. حال اگر $r = b$ مقدار $q_۱ = q + ۱$ را درنظر می‌گیریم. در این صورت

$$a = bq_۱$$

که به جای r، $r_۱ = ۰$ را درنظر می‌گیریم. پس همواره $۰ \leq r < b$. برای اثبات یکتا بودن، فرض کنیم چنین نباشد، یعنی

$$a = bq_۱ + r_۱ \qquad ۰ \leq r_۱ < b \quad , \quad a = bq_۲ + r_۲ \qquad ۰ \leq r_۲ < b$$

پس :

$$۰ = b(q_۱ - q_۲) + r_۱ - r_۲$$

یا

$$r_۲ - r_۱ = b(q_۱ - q_۲)$$

یعنی $b \mid r_۲ - r_۱$. اگر $r_۲ - r_۱ \neq ۰$، آن‌گاه $b \leq |r_۲ - r_۱|$. از سوی دیگر

$$-b < r_۲ - r_۱ < b$$

یعنی :

$$|r_۲ - r_۱| < b$$

که این با $b \leq |r_۲ - r_۱|$ تناقض دارد. پس $r_۲ - r_۱ = ۰$. یعنی $r_۲ = r_۱$ و چون $b \neq ۰$، $q_۱ - q_۲ = ۰$ یعنی $q_۲ = q_۱$. ■

توجه کنید که هرگاه $r = ۰$، آن‌گاه $b|a$.

مثال ۲ : برای $a = ۱۰۲۸$ و $b = ۳۴$، داریم $q = \left\lfloor \frac{۱۰۲۸}{۳۴} \right\rfloor = ۳۰$

(در اینجا منظور از نماد $\lfloor x \rfloor$، جزء صحیح عدد حقیقی x است.)

و $r = ۱۰۲۸ - ۳۰ \times ۳۴ = ۸$

پس :

$$۱۰۲۸ = ۳۴ \times ۳۰ + ۸$$

یکی از کاربردهای قضیهٔ الگوریتم تقسیم، دسته‌بندی اعداد برحسب باقیماندهٔ تقسیم آنها بر عدد طبیعی و ثابت b است.

مثال ۳ : باقیماندهٔ هر عدد صحیح بر ۲، عدد ۰ یا ۱ است. این مطلب اعداد صحیح را به دو دسته تقسیم می‌کند. تمام اعدادی را که باقیماندهٔ آنها بر ۲، ۰ است، یعنی ۲ آنها را می‌شمارد **زوج** و بقیهٔ اعداد را **فرد** می‌نامند. یعنی می‌توان نوشت : $\mathbb{Z} = [۰]_۲ \cup [۱]_۲$

که در آن

$$[۰]_۲ = \{n \in \mathbb{Z} : n = ۲q, q \in \mathbb{Z}\} = \{n \in \mathbb{Z} : ۲ | n\}$$

مجموعهٔ اعداد زوج، و

$$[۱]_۲ = \{n \in \mathbb{Z} : n = ۲q + ۱, q \in \mathbb{Z}\} = \{n \in \mathbb{Z} : ۲ \nmid n\}$$

مجموعهٔ اعداد فرد است.

به همین ترتیب هر عدد صحیح را می‌توان تنها به یکی از صورت‌های

$$۴q\ ,\ ۴q + ۱, ۴q + ۲\ ,\ ۴q + ۳$$

نوشت، که در آن $q \in \mathbb{Z}$. این مطلب اساس مبحث همنهشتی است که در سال گذشته با آن آشنا شده‌ایم.

۴ـ۶ ـ نمایش اعداد صحیح

استفاده از دستگاه دهدهی (اعشاری) متداول‌ترین صورت نمایش اعداد است. اعداد طبیعی را می‌توان به صورت ضرایب توان‌های ۱۰ نمایش داد. مثلاً عدد ۳۴۷۶۵ عبارت است از :

$$۳ \times ۱۰^۴ + ۴ \times ۱۰^۳ + ۷ \times ۱۰^۲ + ۶ \times ۱۰^۱ + ۵ \times ۱۰^۰$$

شاید یکی از دلایل نمایش اعداد در دستگاه دهدهی یا به اصطلاح در «**مبنای یا پایهٔ ۱۰**» وجود ۱۰ انگشت دست بوده که در شمارش طبیعی به‌کار می‌رفته است. این نحوهٔ نمایش را ابتدا هندی‌ها

قبل از سال ۸۰۰ میلادی اختراع کرده‌اند. این مطلب را محمدبن موسی خوارزمی در کتاب «جمع و تفریق، بر طبق حساب هندی» شرح داده و نمایش رقم صفر با نماد ۰ هم برای اولین بار در این کتاب آمده است. اروپایی‌ها این دستگاه را هندی ــ عربی می‌نامند. دستگاه دیگری هم که در ریاضیات اسلامی وجود داشته، دستگاه شصت شصتی بوده که مسلمان‌ها فکر آن را از بابلی‌ها گرفتند و آن را تکمیل کردند. مبنای این نمایش عدد شصت بوده است، که در ارتباط با محاسبات نجومی و تقسیم ساعت به ۶۰ دقیقه و دقیقه به ۶۰ ثانیه است. با نمایش اعداد در مبنای ۲ هم که در نمایش داخلی کامپیوتر به‌کار می‌رود آشنا هستیم.

به‌طور کلی هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ می‌تواند مبنا باشد.

قضیهٔ ۵ : اگر b یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ باشد، هر عدد طبیعی n را می‌توان به طریقی یکتا به صورت

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b + a_0$$

نمایش داد، که در آن k یک عدد حسابی[1] است و برای هر $j = 0,1,2,\ldots,k$، $0 \le a_j \le b-1$ و $a_k \neq 0$.

اثبات : اگر الگوریتم تقسیم را متوالیاً به صورت زیر به کار گیریم، قضیه ثابت می‌شود. ابتدا n را بر b تقسیم می‌کنیم.

$$n = bq_0 + a_0 \qquad 0 \le a_0 \le b-1$$

حال q_0 را بر b تقسیم می‌کنیم

$$q_0 = bq_1 + a_1 \qquad 0 \le a_1 \le b-1$$

این عمل را ادامه می‌دهیم

$$q_1 = bq_2 + a_2 \qquad 0 \le a_2 \le b-1$$

$$q_j = bq_{j+1} + a_{j+1} \qquad 0 \le a_{j+1} \le b-1$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

در دنبالهٔ $q_0, q_1, q_2, \ldots$ داریم :

$$n > q_0 > q_1 > q_2 > \ldots \ge 0$$

(دقت کنید : $q_j > q_{j+1}$ مگر وقتی که $q_{j+1} = 0$، چون در غیر این حالت، $b > 1$، $a_{j+1} \ge 0$ و $q_{j+1} \ge 1$، پس

$$(q_j = bq_{j+1} + a_{j+1} > q_{j+1}$$

لذا این کار را حداکثر تا n مرحله می‌توان ادامه داد. چون دقیقاً $n-1$ عدد صحیح مختلف بین

۱ــ هر عدد صحیح نامنفی را حسابی گویند.

صفر و n وجود دارند. پس در مرحله‌ای $q_k = ۰$ و داریم :

$$q_{k-۱} = b \times ۰ + a_k \quad , \quad ۰ \le a_k \le b - ۱$$

اگر به ترتیب به جای هر $q_{k-۱}$، $q_{k-۲}$، ...، $q_۲$، $q_۱$، $q_۰$ حاصل تقسیم آن را بنویسیم، فرمول موردنظر به‌دست می‌آید و بدیهی است که $a_k \neq ۰$، زیرا اگر $a_k = ۰$ آن‌گاه $q_{k-۱} = ۰$، و یک مرحلهٔ قبل از آن توقف می‌کردیم. اثبات یکتایی این نمایش را در مقاطع تحصیلی بالاتر خواهید دید. ■

(در این حالت n را به صورت زیر نمایش می‌دهند :

$$n = (a_k a_{k-۱} a_{k-۲} \dots a_۱ a_۰)_b$$

این نمایش را[۱]، **نمایش عدد n در مبنای b** می‌نامند. هریک از a_iها را یک **رقم** در مبنای b گویند و $k+۱$، تعداد ارقام عدد n در مبنای b است و می‌گویند n در مبنای b، $k+۱$ رقم دارد.)

نمایش اعداد در دستگاه **دودویی**، یا در مبنای ۲، به دلیل کاربرد آن در کامپیوتر و نیز تناظری که در رابطه با پرتاب سکه در احتمال دارد بسیار جالب است. علاوه بر آن، قضیهٔ ۵ در رابطه با پیدا کردن باقیماندهٔ تقسیم بر برخی از اعداد به‌کار می‌رود. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴ : قاعدهٔ پیدا کردن باقیماندهٔ تقسیم بر ۳ یا ۹

اگر $A = (a_n \dots a_۱ a_۰)_{۱۰}$ می‌دانیم این عدد برابر است با

$$A = a_n \times ۱۰^n + a_{n-۱} \times ۱۰^{n-۱} + \dots + a_۱ \times ۱۰ + a_۰$$

$$= (\overbrace{۹۹\dots۹}^{n} + ۱)a_n + (\overbrace{۹۹\dots۹}^{n-۱} + ۱)a_{n-۱} + \dots + (۹+۱)a_۱ + a_۰$$

$$= ۹(\overbrace{۱۱۱\dots۱}^{n} a_n + \overbrace{۱۱\dots۱}^{n-۱} a_{n-۱} + \dots + a_۱) + a_n + a_{n-۱} + \dots + a_۱ + a_۰$$

پس باقیماندهٔ تقسیم A بر ۹ (یا ۳) برابر است با باقیماندهٔ مجموع

$$a_n + a_{n-۱} + \dots + a_۱ + a_۰$$

بر ۹ (یا ۳). به روش مشابه، قاعدهٔ پیدا کردن باقیماندهٔ تقسیم یک عدد بر ۱۱ را نیز می‌توان پیدا کرد. (چگونه؟) ▲

۱ــ در برخی از کتاب‌ها نمایش این عدد به صورت $\overline{a_k a_{k-۱} \dots a_۱ a_۰}$ است.

۴ـ۷ـ تمرین‌ها

۱ــ کوچک ترین و بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید :

الف) $A = \{x \in \mathbb{Z}: \circ \leq x < ۵\}$

ب) $C = \{x \in \mathbb{Z}: \circ < x \leq ۱\}$

پ) $E = \{x \in \mathbb{Z}: \circ \leq x < ۱\}$

(بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ S عبارت است از $s_۱ \in S$، که برای هر $s \in S$ داشته باشیم $s \leq s_۱$)[۱].

۲ــ زیرمجموعه‌ای از اعداد صحیح مثال بزنید که کوچک‌ترین عضو نداشته باشد.

۳ــ ثابت کنید که هر مجموعهٔ ناتهی از اعداد صحیح و از پایین کراندار، دارای کوچک‌ترین عضو و هر مجموعهٔ ناتهی از اعداد صحیح و از بالا کراندار دارای بزرگ‌ترین عضو است.

(یادآوری می‌کنیم که $A \subset \mathbb{Z}$ از بالا کراندار است اگر عددی مانند $n \in \mathbb{Z}$ یافت شود که به ازای هر $a \in A$ ، $a \leq n$ و همچنین $A \subset \mathbb{Z}$ از پایین کراندار است اگر عددی مانند $n \in \mathbb{Z}$ یافت شود که برای هر $a \in A$ ، $n \leq a$.)

۴ــ خاصیت ارشمیدسی :

ثابت کنید اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، آن‌گاه یک عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $na \geq b$.

۵ ــ ثابت کنید $\binom{n}{k}$ برای اعداد طبیعی n و $\circ \leq k \leq n$ همیشه عدد طبیعی است.

۶ ــ الف) برای $n \geq ۲$، ثابت کنید :

$$\binom{۲}{۲}+\binom{۳}{۲}+\cdots+\binom{n}{۲}=\binom{n+۱}{۳}$$

ب) با استفاده از قسمت الف و اینکه برای هر عدد طبیعی $m \geq ۲$،

$$۲\binom{m}{۲}+m=m^۲$$

ثابت کنید که

$$۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲=\frac{n(۲n+۱)(n+۱)}{۶}$$

۱ــ نماد $s_۱ = \max S$ برای بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ S به‌کار می‌رود.

۷ــ کدام‌یک از اعداد زیر بر ۲۲ تقسیم‌پذیرند؟

الف) ۰ ب) ۴۴۴

پ) ۱۷۱۶ ت) ۳۲۵۱۶−

۸ ــ الف) اگر a، b، c و d اعداد صحیح باشند و $a \neq 0$، $c \neq 0$، $a|b$ و $c|d$ ثابت کنید $ac|bd$.

ب) نشان دهید اگر a، b و $c \neq 0$ اعداد صحیح باشند، آن‌گاه $a|b$ اگر و تنها اگر $ac|bc$.

پ) ثابت کنید اگر برای هر $i = 1,2,\ldots,n$، $a|b_i$ آن‌گاه برای اعداد صحیح دلخواه m_1، m_2،... و m_n داریم

$$a| m_1b_1 + m_2b_2 + \cdots + m_nb_n$$

۹ــ خارج قسمت و باقیمانده را در الگوریتم تقسیم هریک از اعداد زیر، وقتی که بر ۱۷ تقسیم شوند به‌دست آورید.

الف) ۱۰۰ ب) ۴۴−

۱۰ــ الف) ثابت کنید حاصل جمع دو عدد صحیح زوج و همچنین حاصل جمع دو عدد صحیح فرد، زوج است.

ب) ثابت کنید حاصل ضرب دو عدد فرد، فرد است.

۱۱ــ الف) ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد به صورت $4q + 1$ و همچنین حاصل‌ضرب هر دو عدد به صورت $4q + 3$، به صورت $4q + 1$ است. $(q \in \mathbb{Z})$

ب) ثابت کنید منبع هر عدد فرد به صورت $8q + 1$ است.

۱۲ــ نشان دهید حاصل‌ضرب دو عدد به صورت $6q + 5$ به صورت $6q + 1$ است.

۱۳ــ ثابت کنید حاصل‌ضرب ۳ عدد طبیعی متوالی بر ۶ تقسیم‌پذیر است.

۱۴ــ الف) عدد ۲۳۶ را در مبنای ۷ بنویسید.

ب) عدد $(۱۰۰۱۰۰۱۱)_۲$ برابر چه عددی در مبنای ۱۰ است؟

پ) عدد ۱۸۶۴ را در مبنای ۲ بنویسید.

ت) عدد $(a۳۵b۰۶)_{۱۶}$ را در مبنای ۱۰ بنویسید.

(دقت کنید که اگر مبنا بیشتر از ۱۰ باشد، ارقام بیشتر از ۹ را به ترتیب با a، b، c، d و ... نمایش می‌دهند، یعنی مثلاً در مبنای ۱۶، $a = ۱۰$، $b = ۱۱$، $c = ۱۲$، $d = ۱۳$، $e = ۱۴$ و $f = ۱۵$. البته گاهی هم عدد بالا را با $(۶\ ۰\ ۳\ ۵\ ۱۱\ ۰\ ۱۰)_{۱۶}$ نمایش می‌دهند.)

مجلهٔ ریاضی

دستگاه اعداد رمزی را ابتدا یونانی‌ها به کار گرفتند. در این دستگاه، اعداد را با حروف نمایش می‌دادند. در دورهٔ بعد از ظهور اسلام نیز به وفور از حروف ابجد استفاده می‌شد و محاسباتی با آنها صورت می گرفت. این طریقهٔ محاسبه را حساب جُمّل می گویند و جدول آن به شرح زیر است:

الف	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ی
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
	ک	ل	م	ن	س	ع	ف	ص	
	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	
ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ	غ
۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰	۷۰۰	۸۰۰	۹۰۰	۱۰۰۰

حساب جُمّل (حساب ابجدی) در ضبط تاریخ حوادث به عنوان مادهٔ تاریخ به کار می‌رود.

فصل ۵

اعداد اول

در فصل قبل، تقسیم‌پذیری هر دو عدد صحیح به عنوان یک رابطه مطرح شد. برخی از اعداد بر تعداد زیادی از اعداد طبیعی تقسیم‌پذیرند، مثل ۲۴ که بر اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۸، ۱۲ و ۲۴ تقسیم‌پذیر است. با این حال دسته‌ای دیگر از اعداد طبیعی هیچ مقسوم علیهی به جز ۱ و خود آن عدد ندارند. این اعداد غیر ۱ را اعداد اول می‌نامند.

تعریف : هر عدد طبیعی غیر از ۱ را که جز بر ۱ و خودش بر هیچ عدد طبیعی دیگری تقسیم‌پذیر نباشد **عدد اوّل** گویند. هر عدد طبیعی به‌جز ۱ را که اول نیست، **عدد مرکب** می‌نامند.

مثال ۱ : اعداد ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ اول و اعداد ۴، ۶، ۸، ۹ و ۱۰ مرکب‌اند.

قضیهٔ ۱ : هر عدد صحیح به جز ۱ و ۱− حداقل یک مقسوم‌علیه اول دارد.

اثبات : هر عدد صحیح مورد نظر را a می‌نامیم. اگر $a = 0$، هر عدد اولی آن را می‌شمارد. اگر $a \neq 0$، فرض می‌کنیم S مجموعهٔ تمام مقسوم‌علیه‌های بزرگ‌تر از ۱ عدد صحیح a باشد. S تهی نیست، چون $|a| \in S$. کوچک‌ترین عضو S را m می‌نامیم. (چرا S کوچک‌ترین عضو دارد؟) m اول است، زیرا اگر m اول نباشد آن‌گاه عدد طبیعی $m_1 > 1$، $m_1 \neq m$ وجود دارد که $m_1 | m$. پس m_1 هم عضو S است (چرا؟) که با کوچک‌تر بودن m در تناقض است. پس a حتماً یک مقسوم‌علیه اول مانند m دارد.

قضیهٔ ۲ : بی‌نهایت عدد اول وجود دارند.[۱]

۱ــ این قضیه را اقلیدس در حدود سال ۳۰۰ قبل از میلاد اثبات کرده است.

اثبات : می‌دانیم اعداد ۲ ، ۳ ، ۵ و ... اول‌اند، حال اگر این دنباله متناهی باشد، فرض می‌کنیم $p_1, p_2, \ldots, p_n$ تنها عدد اول باشند. $m = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ را درنظر می‌گیریم. چون m یک عدد طبیعی و مخالف $p_1, p_2 \ldots$ و p_n است، m باید مرکب باشد. پس یک مقسوم‌علیه اول دارد که آن را p_j می‌نامیم. داریم :

$$p_j | m \quad , \quad p_j | p_1 p_2 \ldots p_n$$

پس $m - (p_1 p_2 \ldots p_n)$ بر p_j تقسیم‌پذیر است. یعنی $p_j | 1$ که غیر ممکن است. لذا تعداد اعداد اول نامتناهی است. ■

قضیهٔ ۳ : اگر n یک عدد مرکب باشد، آن‌گاه n حداقل یک مقسوم‌علیه اول کوچک‌تر از $\sqrt{n}$ یا مساوی با آن دارد.

اثبات : چون n مرکب است، پس $n = ab$ به‌طوری که $1 < a \leq b < n$. اگر $a > \sqrt{n}$ ، آن‌گاه $b > \sqrt{n}$ و در نتیجه $n = ab > n$ که یک تناقض است. پس حتماً $a \leq \sqrt{n}$. چون $a \neq 1$، پس بنابر قضیهٔ ۱ عدد اول p وجود دارد که $p | a$ و چون $a | n$ پس $p | n$. اما $p \leq a$، یعنی عدد اول p وجود دارد که $p | n$ و $p \leq \sqrt{n}$.

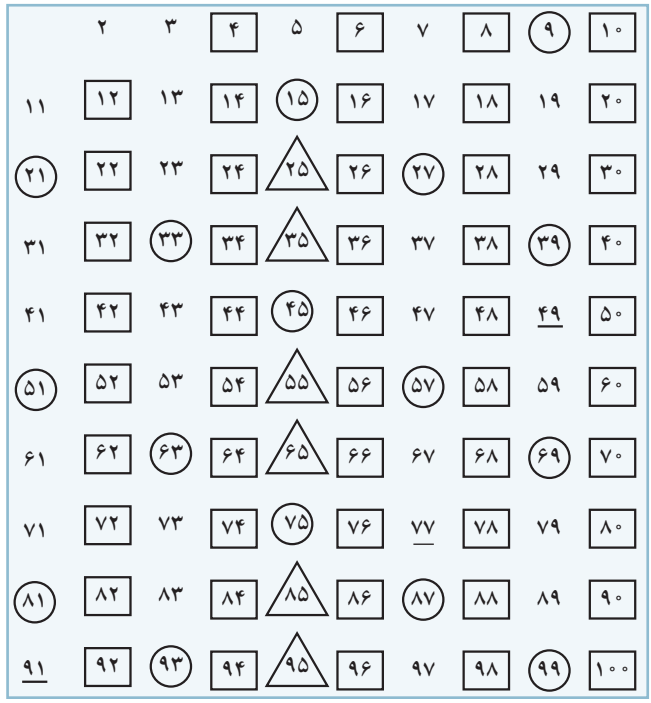
به کمک قضیهٔ ۳ می‌توان اول بودن هر عددی را بررسی کرد.

مثال ۲ : می‌خواهیم تحقیق کنیم عدد ۴۷ اول است یا نه. مشاهده می‌کنیم :

$$۲ \nmid ۴۷ \quad , \quad ۳ \nmid ۴۷ \quad , \quad ۵ \nmid ۴۷$$

و چون $۶ < \sqrt{۴۷} < ۷$ ، لذا تنها اعداد اول کوچک‌تر از $\sqrt{۴۷}$ یا مساوی با آن اعداد ۲، ۳ و ۵ هستند که هیچ‌کدام ۴۷ را نمی‌شمارند. پس ۴۷ اول است.

قضیهٔ ۳ اساس فرایند **غربالِ اراتِسْتِـنْ** است. مثلاً برای تعیین اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰۰، تمام مضرب‌های اول اعداد کوچک‌تر از $\sqrt{۱۰۰} = ۱۰$ یعنی مضرب‌های ۲، ۳، ۵ و ۷ را از جدول اعداد از ۱ تا ۱۰۰ حذف می‌کنیم. جدول صفحهٔ بعد نمونه‌ای از غربال اراتستن است.



و در نتیجه تنها اعداد اول بین ۱ تا ۱۰۰ عبارت‌اند از :

۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹,۳۱,۳۷,۴۱,۴۳,۴۷,۵۳,۵۹,۶۱,۶۷,۷۱,۷۳,۷۹,۸۳,۸۹,۹۷

۵ ـ ۱ ـ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک

می‌دانیم که عدد صحیح c را مقسوم‌علیه یا شمارندهٔ مشترک دو عدد صحیح a و b گویند هرگاه $c|a$ و $c|b$.

تعریف : عدد طبیعی d را **بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک** (ب. م. م) دو عدد صحیح a و b (که حداقل یکی از آنها مخالف صفر است) گویند، اگر d یک مقسوم‌علیه مشترک a و b باشد، و مقسوم‌علیه‌های مشترک دیگر a و b، از d کوچک‌تر باشند. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b را با (a,b) نمایش می‌دهند[۱].

۱ــ مقسوم‌علیه مشترک a و b را با نماد $a \sqcap b$ هم نمایش می‌دهند.

مثال ۳ : مقسوم‌علیه‌های مشترک ۲۴ و ۸۴ عبارت‌اند از :

$$\pm ۱, \pm ۲, \pm ۳, \pm ۴, \pm ۶, \pm ۱۲$$

پس :

$$(۲۴, ۸۴) = ۱۲$$

با استفاده از نتایج اصل خوش‌ترتیبی می‌توان ثابت کرد که ب.م.م دو عدد صحیح (که هر دو صفر نیستند) همواره وجود دارد. (چرا؟) علاوه بر آن قضیهٔ زیر را داریم :

قضیهٔ ۴ : بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح a و b که حداقل یکی از آنها صفر نیست، برابر است با کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ

$$S = \{ma + nb : \ m,n \in \mathbb{Z} , ma + nb > ۰\}$$

اثبات : مجموعهٔ S حداقل یک عضو دارد (چرا؟) پس دارای کوچک‌ترین عضو است. فرض می‌کنیم d کوچک‌ترین عضو S باشد،

$$d = m_۰a + n_۰b > ۰ \quad , \quad m_۰, n_۰ \in \mathbb{Z}$$

از الگوریتم تقسیم داریم

$$a = dq + r \ , \ ۰ \le r < d$$

اگر $r > ۰$ می‌دانیم $r \notin S$ چون $r < d$، ولی

$$r = a - m_۰aq - n_۰bq = (۱ - m_۰q)a - (n_۰q)b$$

ترکیب خطی[۱] a و b است که با کوچک‌ترین بودن d در تناقض است. پس $r = ۰$. یعنی $d|a$. به‌همین ترتیب $d|b$. یعنی d مقسوم‌علیه مشترک a و b است. اگر $c > ۰$، $c|a$ و $c|b$، آن‌گاه $c|(am_۰ + bn_۰)$ یعنی $c|d$ پس $c \le d$. در نتیجه d بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b است. ■

می‌توان ثابت کرد که هرگاه $a = bq + r$ آن‌گاه $(a,b) = (b,r)$. (چرا؟)

این مطلب، زیربنای الگوریتم اقلیدس برای یافتن بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح a و b است.

الگوریتم اقلیدس بدین‌گونه عمل می‌کند که اگر $r_۰ = a > ۰$ و $r_۱ = b > ۰$، آن‌گاه

$$r_۰ = r_۱q_۱ + r_۲ \qquad ۰ \le r_۲ < r_۱$$

پس :

$$(a, b) = (r_۰,r_۱) = (r_۱,r_۲)$$

۱ــ برای هر $m, n \in \mathbb{Z}$، $ma + nb$ را یک ترکیب خطی a و b می‌نامند.

همچنین

$$r_{۱} = r_{۲}q_{۲} + r_{۳} \qquad ۰ \le r_{۳} < r_{۲}$$
$$(a, b) = (r_{۱}, r_{۲}) = (r_{۱}, r_{۳})$$
$$\vdots$$
$$r_{n-۳} = r_{n-۲}q_{n-۲} + r_{n-۱} \qquad ۰ \le r_{n-۱} < r_{n-۲}$$
$$(a, b) = (r_{n-۳}, r_{n-۲}) = (r_{n-۱}, r_{n-۲})$$
$$r_{n-۲} = r_{n-۱}q_{n-۱} + r_{n} \qquad ۰ \le r_{n} < r_{n-۱}$$
$$(a, b) = (r_{n-۱}, r_{n-۲}) = (r_{n-۱}, r_{n})$$

چون

$$a = r_{۰} > r_{۱} > r_{۲} \ldots \ge ۰$$

پس از چند مرحله باقیمانده صفر خواهد شد، زیرا بیشتر از a عدد صحیح مختلف بین صفر و a نیست. پس برای یک عدد طبیعی n داریم $r_{n+۱} = ۰$ و $r_{n-۱} = r_{n}q_{n}$. در نتیجه

$$(a, b) = (r_{n-۱}, r_{n}) = (r_{n}, ۰) = r_{n}$$

که r_{n} آخرین باقیماندهٔ غیرصفر در این رشته از تقسیم‌های متوالی است.

مثال ۴ :

$$(۳۰, ۷۲) = (۳۰, ۷۲ - ۲ \times ۳۰) = (۳۰, ۱۲)$$
$$= (۲ \times ۱۲ + ۶, ۱۲) = (۶, ۱۲) = (۶, ۲ \times ۶ + ۰) = (۶, ۰) = ۶$$

که معمولاً به صورت خلاصهٔ نردبانی زیر می‌نویسند :

خارج قسمت	۲	۲	۲
۷۲	۳۰	۱۲	۶
باقیمانده	۱۲	۶	۰

قضیهٔ ۵ : عدد طبیعی d بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح a و b است اگر و تنها اگر

۱) $d|a$ و $d|b$

۲) هرگاه $c|a$ و $c|b$، آن‌گاه $c|d$.

اثبات : اگر $d = (a, b)$ آن‌گاه $d|a$ و $d|b$ یعنی شرط ۱ برقرار است. علاوه بر آن اعداد صحیح m و n وجود دارند که

$$d = ma + nb$$

حال اگر $c|a$ و $c|b$ آن‌گاه $c|d$ یعنی شرط ۲ هم برقرار است.

برعکس اگر d در دو شرط فوق صدق کند و c یک مقسوم‌علیه مشترک مثبت a و b باشد، آن‌گاه $c|d$ یعنی $c \le d$. پس d بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b است. ■

تعریف : دو عدد صحیح a و b را **نسبت به هم اول** یا **متباین** گویند، هرگاه $(a, b) = ۱$.

مثال ۵ : اعداد ۹ و ۱۰ و نیز دو عدد ۲۵ و ۴۲ نسبت به هم اول‌اند. ▲

با استفاده از قضیهٔ ۴، می‌توان ثابت کرد که دو عدد صحیح a و b نسبت به هم اول‌اند اگر و تنها اگر اعداد صحیح m و n وجود داشته باشند که

$$۱ = ma + nb$$

قضیهٔ ۶ : (لم اقلیدس). اگر $a|bc$ و $(a , b) = ۱$ آن‌گاه $a|c$.

اثبات : اعداد صحیح m و n را می‌توان پیدا کرد که برای آنها

$$۱ = ma + nb$$

پس :

$$c = cma + cnb$$

اما چون $a|bc$، پس $bc = aq$. در نتیجه

$$c = cma + naq = (cm + nq)a$$

یعنی $a|c$. ■

قضیهٔ ۷ : اگر p یک عدد اول باشد و $p|ab$، آن‌گاه $p|a$ یا $p|b$.

اثبات : اگر $p \nmid a$، آن‌گاه $(p, a) = ۱$، زیرا اگر $(p, a) = d$ و $d \neq ۱$ آن‌گاه $d = p$. (چرا؟)

پس $p|a$ که یک تناقض است. در نتیجه $(p, a) = ۱$، پس طبق قضیهٔ ۶، $p|d$. ■

تعریف بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد را به چند عدد نیز می‌توان تعمیم داد :

تعریف : بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک n عدد صحیح $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ که همگی آنها صفر نیستند عبارت است از بزرگ‌ترین عدد صحیحی که تمام این اعداد صحیح را بشمارد. این عدد را با $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ نمایش می‌دهند. می‌توان ثابت کرد که

$$(a_۱, a_۲, \ldots, a_n) = (a_۱, a_۲, \ldots, a_{n-۲}, (a_{n-۱}, a_n))$$

مثال ۶ :

$$(۲۴, ۳۰, ۷۲) = (۲۴, (۳۰, ۷۲))$$
$$= (۲۴, ۶) = ۶$$

۵ـ۲ـ قضیهٔ بنیادی حساب

نقش اصلی اعداد اول به عنوان عناصر سازندهٔ تمام اعداد صحیح بسیار اهمیت دارد. در قضیهٔ زیر این مطلب را بدون اثبات بیان می کنیم :

قضیهٔ ۸ : هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ را می‌توان بدون توجه به ترتیب به‌طور یکتا به صورت حاصل‌ضرب اعداد اول نوشت. یعنی n را می‌توان به صورت $n = p_۱p_۲ \dots p_k$ نمایش داد که در آن برای هر i ، p_i عددی اول است. این نمایش را تجزیهٔ عدد n به عامل‌های اول می‌نامند.

نکتهٔ ۱ : در تجزیه اعداد طبیعی به عامل‌های اول، می‌توان حاصل‌ضرب چند عدد اول مساوی را به‌صورت توانی از آن نوشت، یعنی

$$n = P_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \dots P_r^{\alpha_r} = \prod_{i=۱}^{r} p_i^{\alpha_i}$$

که در آن p_iها اعداد اول متمایز و α_iها اعدادی طبیعی‌اند. این نمایش را نمایش متعارف عدد n می‌نامند.

نکتهٔ ۲ : برای $n = ۱$، می‌توان $p^{\circ} = ۱$ را درنظر گرفت، درحالی که p هر عدد اولی می‌تواند باشد.

نکتهٔ ۳ : به طور کلی هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت زیر نمایش داد :

$$n = \prod_{p} p^{\alpha_p(n)} = ۲^{\alpha_۲(n)} ۳^{\alpha_۳(n)} ۵^{\alpha_۵(n)} \dots$$

که در آن $\prod_p$ به مفهوم ضرب روی تمام اعداد اول است و برای هر عدد اول p، $\alpha_p(n)$ بزرگ‌ترین توان p است که عدد n را می‌شمارد و به این صورت می‌نویسند :

$$p^{\alpha_p(n)} \parallel n$$

یعنی $p^{\alpha_p(n)} \mid n$ ولی $p^{\alpha_p(n)+۱} \nmid n$ (واضح است که اگر $P > n$، حتماً $\alpha_p(n) = \circ$)

حال قضیهٔ زیر را بدون اثبات بیان می کنیم :

قضیهٔ ۹ : اگر $a = P_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \dots P_n^{\alpha_n}$ و $b = P_۱^{\beta_۱} p_۲^{\beta_۲} \dots P_n^{\beta_n}$ ، آن‌گاه

$$d = (a, b) = P_۱^{\gamma_۱} p_۲^{\gamma_۲} \dots P_n^{\gamma_n}$$

که در آن برای هر عدد i،

$$\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$$

(دقت کنید که اگر برای عدد اول p، $p \nmid n$، آن‌گاه توان آن را در نمایش n برابر با صفر می‌گیریم.)

مثال ۷ :

$$۳۰ = ۲^۱ \times ۳^۱ \times ۵^۱$$
$$۷۲ = ۲^۳ \times ۳^۲ = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵^۰$$

پس $(۳۰,۷۲) = ۲^۱ \times ۳^۱ \times ۵^۰ = ۶$

▲

۵ـ۳ـ کوچک‌ترین مضرب مشترک

می‌دانیم عدد صحیح c را مضرب مشترک دو عدد صحیح a و b نامند، هرگاه a|c و b|c.

تعریف : عدد m را **کوچک‌ترین مضرب مشترک** (ک.م.م) دو عدد صحیح a و b نامند، هرگاه m مضرب مشترک مثبت دو عدد a و b باشد و اگر a|c و b|c آن‌گاه $m \leq c$. کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و b را با $[a,b]$[1] نمایش می‌دهند.

وجود کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد غیرصفر a و b را با استفاده از اصل خوش‌ترتیبی می‌توان ثابت کرد.

مثال ۸ : مضرب‌های مشترک مثبت اعداد ۴ و ۶ عبات‌اند از :

$$۱۲, ۲۴, ۳۶, \ldots$$

که کوچک‌ترین آنها ۱۲ است. یعنی $[۴,۶] = ۱۲$.

▲

قضیه‌های زیر را که در رابطه با کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عددند بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۰ : برای هر دو عدد صحیح غیرصفر a و b، $m = [a,b]$ اگر و تنها اگر

۱) a|m و b|m و

۲) اگر a|c و b|c، آن‌گاه m|c.

قضیهٔ ۱۱ : اگر $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ و $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n}$، آن‌گاه

$$m = [a,b] = p_1^{\theta_1} p_2^{\theta_2} \ldots p_n^{\theta_n}$$

که در آن برای هر i،

$$\theta_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$$

۱ــ کوچک‌ترین مضرب مشترک a و b را با نماد $a \cup b$ هم نمایش می‌دهند.

قضیهٔ ۱۲ : برای هر دو عدد صحیح غیرصفر a و b داریم :

$$[a,b](a,b) = |ab|$$

مثال ۹ :

$$۳۰ = ۲^۱ \times ۳^۱ \times ۵^۱$$
$$۷۲ = ۲^۳ \times ۳^۲ = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵^۰$$
$$[۳۰,۷۲] = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵^۱ = ۳۶۰$$
$$[۳۰,۷۲] \times (۳۰,۷۲) = ۳۶۰ \times ۶ = ۲۱۶۰$$
$$۳۰ \times ۷۲ = ۲۱۶۰$$

▲

تعریف : کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد صحیح غیرصفر $a_۱,a_۲,...,a_n$ عبارت است از کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت که بر همهٔ آنها تقسیم‌پذیر باشد، و آن را با $[a_۱,a_۲,...,a_n]$ نمایش می‌دهند.

می‌توان ثابت کرد که

$$[a_۱,a_۲,...,a_n] = [a_۱,a_۲,...,a_{n-۲},[a_{n-۱},a_n]]$$

مثال ۱۰ :

راه اول : $[۱۰,۴,۶] = [۱۰,[۴,۶]] = [۱۰,۱۲] = ۶۰$

راه دوم : $۱۰ = ۲^۱ \times ۵^۱ = ۲^۱ \times ۳^۰ \times ۵^۱$

$$۴ = ۲^۲ = ۲^۲ \times ۳^۰ \times ۵^۰$$
$$۶ = ۲ \times ۳ = ۲^۱ \times ۳^۱ \times ۵^۰$$
$$[۱۰,۴,۶] = ۲^۲ \times ۳^۱ \times ۵^۱ = ۶۰$$

▲

۵ ـ۴ـ تمرین‌ها

۱ــ کدام یک از اعداد زیر اول و کدام‌یک مرکب‌اند؟

الف) ۱ ب) ۷۳۷

پ) ۱۸۹۱ ت) ۲۰۷۹۱

۲ــ ثابت کنید بی‌نهایت عدد اول به صورت $۴q + ۳$ یافت می‌شوند.

۳ــ اعداد زیر را به عوامل اول تجزیه کنید :

الف) ۹۵۵۵ ب) ۹۹۷۳-

پ) ۳۷۴۲۳ ت) ۲۸۰۰۰

۴ــ نشان دهید که هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب یک مربع کامل و یک عدد صحیح بدون عامل مربع به‌جز ۱ (یعنی عددی که بر هیچ عدد مربعی جز ۱ قابل قسمت نباشد) نوشت.

۵ــ اگر $p_1, p_2, \ldots, p_n$ و q اعداد اول باشند و $q|p_1p_2\ldots p_n$ ثابت کنید به ازای یک $1 \le i \le n$ ، $q = p_i$.

۶ــ الف) نشان دهید اگر a نسبت به b و c اول باشد، نسبت به bc هم اول خواهد بود.

ب) نشان دهید اگر a نسبت به $b_1, b_2, \ldots$ و b_n اول باشد، نسبت به $b_1b_2\ldots b_n$ هم اول خواهد بود.

۷ــ نشان دهید اگر a و b نسبت به هم اول باشند و $c|a+b$، آن‌گاه c نیز نسبت به a و b اول خواهد بود.

۸ــ الف) اگر a و b نسبت به هم اول باشند، نشان دهید که برای اعداد طبیعی m و n ، a^n و b^m هم نسبت به هم اول‌اند.

ب) اگر برای عدد طبیعی n ، $a^n|b^n$ ثابت کنید $a|b$.

فصل ۶

همنهشتی

۶ـ۱ـ مفهوم همنهشتی

مفهوم همنهشتی را در سال‌های قبل دیده‌ایم. در زیر خلاصه‌ای از آنچه را که خوانده‌ایم بیان داشته و قضیه‌های مربوط به آن را مطرح می‌کنیم.

مسائلی از قبیل روزهای هفته، ساعت و ماه که حالت گردشی داشته و با افزودن عدد ثابتی (۷روز، ۲۴ ساعت و یا ۱۲ ماه) به وضعیت و شرایط قبلی برمی‌گردند به عنوان مثال‌هایی عملی از نظریهٔ همنهشتی هستند که در اوایل قرن نوزدهم به وسیلهٔ گاوس معرفی شد.

تعریف : فرض می‌کنیم m یک عدد طبیعی باشد، دو عدد صحیح a و b را به پیمانهٔ m **همنهشت** گویند هرگاه $a-b$ مضرب m باشد، یعنی $a-b$ بر m تقسیم‌پذیر باشد.

همنهشت بودن دو عدد a و b به پیمانهٔ m را به صورت‌های زیر نمایش می‌دهند :

$$a \equiv b \ (m \text{ پیمانهٔ})$$

و یا

$$a \overset{m}{\equiv} b$$

و می‌خوانند «**a همنهشت با b به پیمانهٔ m است**[1]»

مثال ۱ : (پیمانهٔ۶) $۱۶ \equiv ۳۴$، زیرا $۱۸ = ۱۶ - ۳۴$ بر ۶ تقسیم‌پذیر است. ولی (پیمانهٔ۶) $۵ \not\equiv ۸$، زیرا $۳ = ۵ - ۸$ بر ۶ تقسیم‌پذیر نیست. ▲

۱ــ حتی در مورد اعداد حقیقی مثلاً در مورد مقادیر زاویه یا طول کمان (برحسب رادیان) در دایرهٔ مثلثاتی (پیمانهٔ ۲π) $x \equiv y$ به‌کار می‌رود.

توجه کنید که نقیض (پیمانهٔ m) $a\equiv b$ را چنین می‌نویسند :

$a\not\equiv b$(پیمانهٔ m)

همان‌طور که در سال قبل دیدیم، همنهشتی یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ اعداد صحیح است و لذا رابطهٔ همنهشتی به پیمانهٔ m، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$را به دسته‌های هم‌ارزی افراز می‌کند. مجموعهٔ تمام دسته‌های همنهشت به پیمانهٔ m را با $\frac{\mathbb{Z}}{m}$ یا $\mathbb{Z}_m$ و مجموعهٔ تمام اعداد صحیحی را که با a همنهشت به پیمانهٔ m هستند با [a] یا $\overline{a}$ نمایش می‌دهند.

[a] یک دستهٔ هم‌ارزی و a نمایندهٔ این دسته است. اگر b عضو دیگری از دستهٔ هم‌ارزی باشد، داریم [b] = [a] و به طور کلی می‌توان ثابت کرد که

$$[a] = [b]$$

اگر و تنها اگر

$a\equiv b$ (پیمانهٔ m)

مثلاً در همنهشتی به پیمانهٔ ۶ داریم :

$$[۱۵] = [۳] = [-۳] = \cdots$$
$$[-۵] = [۱] = [۷] = \cdots$$

اگر چه در دسته‌های همنهشتی، هر عدد از یک دستهٔ همنهشتی می‌تواند نمایندهٔ آن دسته انتخاب شود اما معمولاً کوچک‌ترین عدد صحیح غیرمنفی متعلق به هر دستهٔ همنهشتی را به عنوان نماینده انتخاب می‌کنند.

نکته : بنا به تعریف، از $a\equiv b$ (پیمانهٔ m) نتیجه می‌شود که $a-b$ مضرب m است. یعنی عدد صحیح k موجود است به طوری که $a-b=mk$ یا $a=b+mk$. یعنی تمام اعداد صحیحی که با b به پیمانهٔ m همنهشت‌اند با افزودن مضربی از m بر b به‌دست می‌آیند. بنابراین :

$$[b] = \{b+mk : k\in\mathbb{Z}\}$$

مثال ۲ : مجموعهٔ تمام اعداد صحیح که به پیمانهٔ ۷ با عدد ۴ همنهشت‌اند عبارت است از :

$$[۴] = \{۴+۷k : k\in\mathbb{Z}\} = \{\ldots,-۱۰,-۳,۴,۱۱,۱۸,\ldots\}$$

با توجه به آنچه گفته شد گزاره‌های زیر همگی معادل‌اند.

ـ a به پیمانهٔ m با b همنهشت است.

ـ a و b به پیمانهٔ m همنهشت‌اند.

ـ $a \equiv b$ (پیمانهٔ m)

ـ $[a] = [b]$

ـ a و b در یک دستهٔ همنهشتی به پیمانهٔ m قرار دارند.

ـ $a-b$ مضربی از m است.

ـ $m|(a-b)$

و با استفاده از الگوریتم تقسیم می‌توان ثابت کرد که همهٔ گزاره‌های فوق با گزارهٔ زیر معادل‌اند :

ـ باقیمانده‌های تقسیم a و b بر m با هم برابرند. (چرا؟)

۶ـ۲ـ برخی از ویژگی‌های همنهشتی

رابطهٔ همنهشتی دارای ویژگی‌های مشابهی نظیر جمع و ضرب در $\mathbb{Z}$ است. موارد زیر را قبلاً خوانده‌ایم.

۱ـ اگر $a \equiv b$ (پیمانهٔ m)، آن‌گاه برای هر عدد صحیح c

$a+c \equiv b+c$ (پیمانهٔ m)

۲ـ اگر $a+c \equiv b+c$ (پیمانهٔ m)، آن‌گاه $a \equiv b$ (پیمانهٔ m)

۳ـ اگر $a \equiv b$ (پیمانهٔ m) و $c \equiv d$ (پیمانهٔ m)، آن‌گاه

$a+c \equiv b+d$ (پیمانهٔ m) و $ac \equiv bd$ (پیمانهٔ m)

۴ـ هرگاه $a_1 \equiv b_1$ (پیمانهٔ m) و ... و $a_n \equiv b_n$ (پیمانهٔ m)، آن‌گاه

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \cdots + b_n \quad (\text{پیمانهٔ } m)$$

و

$$a_1 a_2 \ldots a_n \equiv b_1 b_2 \ldots b_n \quad (\text{پیمانهٔ } m)$$

۵ ـ هرگاه $a \equiv b$ (پیمانهٔ m) آن‌گاه برای هر $n \geq 1$، $a^n \equiv b^n$ (پیمانهٔ m).

مثال ۳ : مطلوب است باقی‌ماندهٔ $۲^{۳۰}$ بر ۱۷

از $۱۶ = ۲^۴$ و $۱۶ \equiv -۱$ (پیمانهٔ ۱۷) نتیجه می‌شود که $۲^۴ \equiv -۱$ (پیمانهٔ ۱۷) اما $(-۱)^۷ \equiv (۲^۴)^۷$

یعنی $۲^{۲۸} \equiv -۱$ (پیمانهٔ ۱۷) از طرف دیگر داریم $۲^۴ \equiv ۴$ (پیمانهٔ ۱۷) و درنتیجه

$$۲^{۳۰} = ۲^{۲۸} \times ۲^۲ \equiv (-۱) \times ۴ = -۴ \quad (\text{پیمانهٔ } ۱۷)$$

اما (پیمانهٔ ۱۷) ۱۳ ≡ ۴−، پس (پیمانهٔ ۱۷) ۱۳ ≡ $۲^{۳۰}$ یعنی باقی‌ماندهٔ $۲^{۳۰}$ بر ۱۷، عدد ۱۳ است.

۶ـ۳ـ تقسیم طرفین یک رابطهٔ همنهشتی بر c

می‌دانیم که هرگاه $a \equiv b \pmod m$، آنگاه برای هر عدد صحیح c،

$$ac \equiv bc \pmod m$$

حال عکس این مطلب را بررسی می‌کنیم. یعنی آیا برای هر عدد صحیح c، اگر $ac \equiv bc \pmod m$ آنگاه $a \equiv b \pmod m$؟ ابتدا به مثال زیر توجه کنید :

می‌دانیم (پیمانهٔ ۶) ۲۱ ≡ ۳۳ یعنی (پیمانهٔ ۶) ۳×۷ ≡ ۳×۱۱ ولی (پیمانهٔ ۶) $\frac{۳۳}{۳} \not\equiv \frac{۲۱}{۳}$ اما قضیهٔ زیر را در این مورد داریم :

قضیهٔ ۱ : در رابطهٔ همنهشتی $ac \equiv bc \pmod m$ داریم

$$a \equiv b \left(\text{پیمانهٔ } \frac{m}{d}\right)$$

که در آن $d=(m,c)$.

اثبات : از فرض نتیجه می‌شود که عدد صحیح k وجود دارد که

$$ac - bc = mk$$

یعنی :

$$(a-b)c = mk$$

اگر طرفین این تساوی را بر $d=(m,c)$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت :

$$(a-b)\frac{c}{d} = \frac{m}{d}k$$

یعنی عدد صحیح $\frac{m}{d}$، عدد $(a-b)\frac{c}{d}$ را می‌شمارد. و چون $(\frac{m}{d}, \frac{c}{d}) = ۱$ (چرا؟) پس $\frac{m}{d} \mid (a-b)$ یعنی :

$$a \equiv b \left(\text{پیمانهٔ } \frac{m}{d}\right)$$

مثال ۴ : از (پیمانهٔ ۶) ۲ ≡ ۸ نتیجه می‌شود (پیمانهٔ ۳) ۱ ≡ ۴

۶ـ۴ـ حل معادلهٔ سیالهٔ خطی $ax+by=c$

سؤال دیگری که مطرح می‌شود این است که آیا می‌توان معادلهٔ

(۱) $ax+by=c$

را که با معادلهٔ همنهشتی

$ax \equiv c \pmod{b}$ (پیمانهٔ b)

هم‌ارز است، در $\mathbb{Z}$ حل کرد؟ در این معادله $a,b,c \in \mathbb{Z}$. به عبارت دیگر، آیا می‌توان عددهای صحیحی چون x_0, y_0 را یافت که

(۲) $ax_0+by_0=c$

اگر عددهای صحیح x_0, y_0 وجود داشته باشند که در رابطهٔ (۲) صدق کنند، آن‌گاه می‌گوییم **معادلهٔ سیالهٔ خطی** $ax+by=c$ جواب دارد. در این رابطه قضیهٔ زیر را داریم :

قضیهٔ ۲ : معادلهٔ سیالهٔ خطی $ax+by=c$ در مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ جواب دارد اگر و تنها اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b، عدد c را بشمارد.

اثبات : اگر $d=(a,b)$ و $d|c$ آن‌گاه عدد صحیح k وجود دارد که $c=dk$ و چون d بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b است، $d=am+bn$ که در آن $m,n \in \mathbb{Z}$. بنابراین

$c=dk=a(mk)+b(nk)$

یعنی اعداد صحیح $x_0=mk$ و $y_0=nk$ در معادلهٔ $ax+by=c$ صدق می‌کنند. پس $ax+by=c$ دارای جواب است. برعکس اگر $ax+by=c$ دارای جواب باشد، اعداد صحیح x_0 و y_0 وجود دارند که $ax_0+by_0=c$. اما چون $d|a$ و $d|b$ درنتیجه $d|ax_0+by_0$

یعنی $d|c$. ■

می‌توان ثابت کرد که اگر $(a,b)=d$ و x_0 و y_0 یک جواب برای معادلهٔ خطی $ax+by=c$ باشد، آن‌گاه تمام جواب‌های آن به‌صورت $x=x_0+k\frac{b}{d}$ و $y=y_0-k\frac{a}{d}$ است که در آن $k \in \mathbb{Z}$.

در مثال‌های زیر، روش‌هایی را برای حل معادله‌های سیاله نشان می‌دهیم :

مثال ۵ : شخصی می‌خواهد با بُن، ۵۱۰۰ ریال کتاب بخرد. اگر بُن‌ها، ۵۰۰ ریالی و ۲۰۰ ریالی باشند، چند بُن ۵۰۰ ریالی و چند بُن ۲۰۰ ریالی باید بپردازد؟

حل مسأله مستلزم پیدا کردن اعداد صحیح نامنفی x و y است که برای آنها

$$۲۰۰x+۵۰۰y=۵۱۰۰$$

یا

$$۲x+۵y=۵۱$$

چون $(۵,۲)=۱$ و $۱|۵۱$، معادلهٔ فوق جواب دارد. می‌نویسیم :

$$x=\frac{۵۱-۵y}{۲}=\frac{۵۰-۴y+۱-y}{۲}=۲۵-۲y+\frac{۱-y}{۲}$$

پس $\frac{۱-y}{۲}$ یک عدد صحیح است، یعنی عددی مانند m وجود دارد که $۱-y=۲m$. یا $y=۱-۲m$.

درنتیجه

$$x=۲۵-۲+۴m+m=۵m+۲۳$$

ولی x و y منفی نیستند، پس $۱-۲m\geq ۰$ و $۵m+۲۳\geq ۰$ یا $m\leq \frac{۱}{۲}$ و $m\geq \frac{-۲۳}{۵}=-۴/۶$. پس m مقادیر ۰ ، ۱- ، ۲- ، ۳- و۴- را می‌گیرد. یعنی تعداد بن‌های ۲۰۰ ریالی و ۵۰۰ ریالی به‌ترتیب می‌تواند جفت‌های زیر باشند :

۹,۳ ۷,۸ ۵,۱۳ ۳,۱۸ ۱،۲۳

مثال ۶ : جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ $۷x+۵y=۱۱$ را بیابید.

$$۷x+۵y=۱۱\Rightarrow ۷x\overset{۵}{\equiv}۱۱,\begin{cases}۷\overset{۵}{\equiv}۲\\ ۱۱\overset{۵}{\equiv}۱\end{cases}\Rightarrow ۲x\overset{۵}{\equiv}۱$$

$$\Rightarrow ۲x\overset{۵}{\equiv}۱+۵\Rightarrow ۲x\overset{۵}{\equiv}۲\times ۳\overset{(۲,۵)=۱}{\Rightarrow} x\overset{۵}{\equiv}۳$$

$$\Rightarrow x=۵k+۳\overset{k=۰}{\Rightarrow} x_۰=۳\Rightarrow y_۰=-۲$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۳+۵k\\ y=-۲-۷k\end{cases}$$

تابع حسابی اویلر

تعریف : برای هر عدد طبیعی n، $\phi(n)$ عبارت است از تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از یا مساوی با n که نسبت به n اول‌اند. این ضابطه، تابعی روی اعداد طبیعی تعریف می‌کند که آن را تابع حسابی اویلر می‌گویند.

اگر $n = p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$ **در این صورت**

$$\varphi(n) = n(1-\frac{1}{p_1}) \ldots (1-\frac{1}{p_k})$$

بدیهی است که اگر p یک عدد اول باشد آن‌گاه $\phi(p)=p-1$.

قضیهٔ اویلر : اگر m عددی طبیعی و a عددی صحیح باشد که $(a,m)=1$ **آن‌گاه**

$a^{\phi(m)} \equiv 1$ (پیمانهٔ m)

قضیهٔ ویلسن : اگر p عددی اول باشد آن‌گاه

$(p-1)! \equiv -1$ (پیمانهٔ p)

۶ ـ ۵ ـ تمرین‌ها

۱ــ دو عدد a و b به‌صورت‌های زیر نوشته شده‌اند :

$a=7k+5 \ , \ b=7k'-2$

دستهٔ همنهشتی $a+2b$ را به پیمانهٔ ۷ مشخص کنید.

۲ــ هرگاه $a \equiv b$ (پیمانهٔ m) و d یک مقسوم‌علیه m باشد، نشان دهید $a \equiv b$ (پیمانهٔ d).

۳ــ ثابت کنید

الف) اگر r باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m باشد، آن‌گاه $a \equiv r$ (پیمانهٔ m).

ب) اگر $a \equiv b$ (پیمانهٔ m) و c عدد صحیح باشد، آن‌گاه

$ac \equiv bc$ (پیمانهٔ m)

پ) اگر $a+b \equiv c$ (پیمانهٔ m)، آن‌گاه $a \equiv c-b$ (پیمانهٔ m)

ت) اگر m و c نسبت به هم اول باشند و $ac \equiv bc \pmod{m}$، آن‌گاه $a \equiv b \pmod{m}$

۴ــ ثابت کنید که برای هر دو عدد صحیح a و b

الف) $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pmod{ab}$

ب) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pmod{ab}$

۵ــ ثابت کنید $2^{11} - 1$ بر ۲۳ تقسیم پذیر است.

۶ــ آخرین رقم سمت راست هریک از اعداد 3^{424} و 7^{101} را به‌دست آورید.

۷ــ برای هریک از معادلات سیالهٔ زیر یا تمام جواب‌ها را به‌دست آورید و یا ثابت کنید جواب ندارد.

الف) $2x + 5y = 11$ ب) $17x + 13y = 100$

پ) $21x + 14y = 147$ ت) $60x + 18y = 97$

۸ــ پستخانه‌ای فقط تمبرهای ۱۴۰ و ۲۱۰ ریالی برای فروش دارد. برای چسباندن تمبر به بسته‌هایی که مقدار تمبر لازم برای آنها هریک از مقادیر زیر است، در صورت امکان ترکیبی از این دو نوع تمبر تعیین کنید.

الف) ۳۵۰۰ ریال ب) ۴۰۰۰ ریال

مجلهٔ ریاضی

برای اعداد طبیعی $n \geq 3$ معادلهٔ سیالهٔ $x^n + y^n = z^n$ هیچ جواب غیربدیهی در بین اعداد صحیح ندارد.

بسیاری ازمطالعات و پیشرفت‌های نظریهٔ اعداد مدیون تلاش برای حل این مسأله بوده که فرما در قرن هفدهم در حاشیهٔ کتاب حساب دیوفانتوسی خود ادعا کرده که این مسأله را حل کرده است. در سال ۱۹۹۳ با استفاده از نظریه‌های پیشرفتهٔ ریاضی آندرو وایلز حلی برای آن ارائه کرد که پس از چندی اشکالی در آن پیدا شد. ولی سرانجام در سپتامبر ۱۹۹۴ (شهریور ماه ۱۳۷۳) اشکال این حل به‌وسیلهٔ خود وایلز و با همکاری یکی از همکارانش به نام تیلر برطرف شد.

مراجع

1- D.M. Burton, Elementary Number Theory, Allyn and Bacon, Inc. 1976.

2- K.H. Rosen, Elementary Number Theory and its Applications, 3rd ed., Addison Wesley 1992.

۳ــ ویلیام و. آدامز و لری جوئل گولدشتین، آشنایی با نظریهٔ اعداد، ترجمهٔ آدینه محمدنارنجانی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ اول ۱۳۶۲.

۴ــ ابوالقاسم قربانی و حسن صفاری، حساب استدلالی، چاپ ششم مؤسسه مطبوعاتی علی‌اکبر علمی ۱۳۴۷.

۵ــ غلامرضا دانش ناروئی و میرزا جلیلی، ریاضیات جدید سال چهارم متوسطه عمومی ریاضی‌ــ فیزیک. دفتر تألیف کتاب‌های درسی وزارت آموزش و پرورش ۱۳۶۰.

۶ــ غلامحسین مصاحب، تئوری مقدماتی اعداد. جلد اول ــ انتشارات دهخدا ۱۳۵۳.

۳ مباحثی دیگر از ترکیبیات

مقدمه

در قسمت اول با نظریهٔ گراف‌ها که یکی از مباحث ترکیبیات است آشنا شدیم. در این قسمت با مباحثی دیگر از ترکیبیات آشنا می‌شویم. ترکیبیات معمولاً با مجموعه‌های متناهی سرو کار دارد و لذا یکی از مباحث ترکیبیات، شمارش است. در اینجا با بعضی از ابزارهای شمارش آشنا می‌شویم. کلاً به مقدمات بسنده می‌کنیم، با این امید که دانش‌آموزان با این آشنایی اولیه انگیزهٔ کافی پیدا کنند که خود در این مباحث به مطالعه بپردازند.

در فصل ۷ نشان می‌دهیم گراف‌ها چگونه می‌توانند به فهم مطالب دیگر ریاضی کمک کنند. گراف‌ها و ماتریس‌های متناظر با آنها با شکل و شمایل شهودی که دارند به تجسم مفاهیم انتزاعی کمک می‌کنند. یکی از دلایلی که همهٔ ما از هندسه خوشمان می‌آید شهودی بودن آن است. گراف نیز همان امتیاز را دارد. به‌علاوه چون در رسم نمودار گراف طول یال‌ها و یا مکان رأس‌ها مطرح نیست درک شهودی ساده‌تر می‌شود. در بخش ۷-۱ بعضی از این استفاده‌های شهودی را مطرح می‌کنیم. در مطالعهٔ مجموعه‌ها نیز می‌توان نمودارهایی به آنها نسبت داد. این نمودارها به درک مفاهیم کمک زیادی می‌کنند. با استفاده از این نمودارها حتی می‌توانیم مفاهیمی را که یاد گرفته‌ایم تعمیم دهیم. بخش ۷-۳ به این موضوع اختصاص دارد. با تعمیم این مفاهیم یک ابزار شمارشی به نام اصل شمول و عدم شمول را خواهیم دید. در فصل ۸ یکی دیگر از مباحث ریاضی به نام دنباله‌های بازگشتی را به‌عنوان یک ابزار شمارشی به کار خواهیم گرفت.

فصل ۷

مدل‌های شهودی و تجسمی در ترکیبیات

۷ـ۱ـ رابطه‌ها و گراف‌ها

مفاهیم مربوط به رابطه را که در کتاب جبر و احتمال سال سوم دیده‌ایم یادآوری می‌کنیم.

تعریف : هرگاه A و B دو مجموعه باشند، آن‌گاه یک **رابطه** از A به B عبارت است از زیرمجموعه‌ای از $A \times B$. زیرمجموعه‌های $A \times A$ را **رابطه‌های روی** A می‌گویند.

مثال ۱ : روی مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ یک رابطهٔ R را می‌توان چنین تعریف کرد :

aRb یا $(a,b) \in R$ هر گاه $a \leq b$.

این رابطه همان رابطهٔ معمولی «کوچک‌تر از یا مساوی با» روی $\mathbb{Z}$ است که روی Q، مجموعهٔ اعداد گویا، و روی $\mathbb{R}$، مجموعهٔ اعداد حقیقی، نیز تعریف می‌شود. ▲

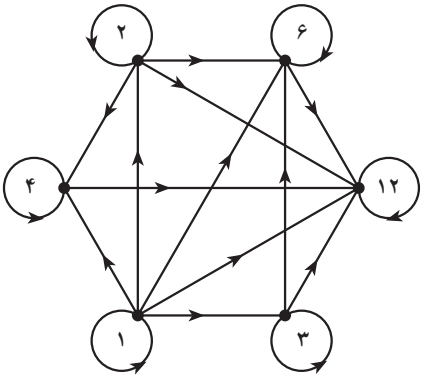
مثال ۲ : برای هر دو عضو $x,y \in \mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم :

$(x,y) \in R$ یا xRy هرگاه $x - y$ مضربی از ۷ باشد.

پس داریم : $۹R۲$ و $-۳R۱۱$، ولی $۳ \not R ۷$. ▲

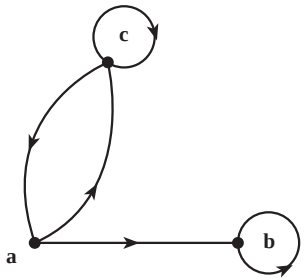
مثال ۳ : مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$ مفروض است. به‌ازای هر دو عضو $a,b \in A$ تعریف می‌کنیم : aRb هرگاه $a|b$. ▲

حال فرض کنید A یک مجموعهٔ متناهی و R یک رابطه روی A باشد. به R گراف جهت‌دار G را به‌صورت زیر نسبت می‌دهیم. رأس‌های G اعضای A هستند و رأس a به رأس b متصل است هرگاه aRb.



شکل ۱ــ گراف جهت‌دار رابطهٔ عادکردن

به‌عنوان مثال، شکل ۱، گراف مربوط به رابطه‌ای را که در مثال ۳ داده شده است نشان می‌دهد. مثلاً رأس ۱ به تمام رئوس، حتی به خود ۱، وصل است زیرا عدد ۱ تمام اعداد صحیح را می‌شمارد.



شکل ۲ــ گراف جهت‌دار یک رابطه

متقابلاً هرگراف جهت‌دار نشانگر یک رابطه است. مثلاً از گراف شکل ۲ نتیجه می‌شود که رابطه‌ای مانند R روی مجموعهٔ $A = \{a,b,c\}$ تعریف شده است و داریم :

aRb , aRc , bRb , cRa , cRc.

این تناظر بین گراف‌ها(ی جهت‌دار) و رابطه‌ها به درک بسیاری از ویژگی‌های رابطه‌ها کمک می‌کند. مثلاً می‌توانید بازتابی، متقارن‌بودن یا نبودن رابطه‌ها را فوراً از روی گراف جهت‌دار مربوط تشخیص دهید. این ویژگی‌ها در درس‌های سال‌های قبل تعریف شده‌اند. یکی از ویژگی‌های رابطه‌ها که کاربرد فراوان دارد خاصیت پاد متقارن است. رابطهٔ R را وقتی **پاد متقارن** گوییم که به‌ازای هر زوج مرتب (a,b)، اگر $(a,b) \in R$ و $(b,a) \in R$ آن‌گاه $a = b$. مثلاً رابطهٔ «کوچک‌تر از یا مساوی با» در مثال ۱ و رابطهٔ «عادکردن» در مثال ۳ دو رابطهٔ پاد متقارن‌اند ولی رابطهٔ مثال ۲ پاد متقارن نیست.

حال ارتباط این ویژگی‌ها را با گراف‌های جهت‌دار بیان می‌کنیم.

یک رابطه بازتابی است اگر و تنها اگر گراف جهت‌دار متناظر با آن در هر رأس دارای یک طوقه باشد. طوقه یالی است که یک رأس را به خودش وصل می‌کند.

یک رابطه متقارن است اگر و تنها اگر گراف جهت‌دار متناظر با آن دارای این ویژگی باشد که هرگاه از رأسی مانند a به رأسی مانند b یک یال موجود باشد آن‌گاه از رأس b به رأس a نیز یالی موجود باشد.

یک رابطه پاد متقارن است اگر و تنها اگر گراف جهت‌دار متناظر با آن دارای این ویژگی باشد که هرگاه از رأسی مانند a به رأسی دیگر مانند b یک یال موجود باشد آن‌گاه از رأس b به رأس a یالی موجود نباشد.

یک رابطه ترایایی است اگر و تنها اگر در گراف جهت‌دار متناظر با آن اگر از رأسی مانند a به رأسی دیگر مانند b یک یال موجود باشد و از رأس b به رأسی مانند c یالی موجود باشد آنگاه از رأس a به رأس c نیز یک یال وجود داشته باشد.

مثال ۴ : با توجه به شکل ۲ معلوم می‌شود که رابطهٔ متناظر با این گراف جهت‌دار هیچ‌یک از ویژگی‌های فوق را ندارد (چرا؟). درصورتی که گراف جهت‌دار شکل ۱ متناظر با رابطه‌ای است که دارای ویژگی‌های بازتابی، پادمتقارن‌بودن و ترایایی است. ▲

۷ـ۲ـ رابطه‌ها و ماتریس‌ها

در قسمت گراف‌ها به هر گراف یک ماتریس صفر و یک به‌نام ماتریس مجاورت نسبت داده شد. ماتریس مجاورت گراف‌های جهت‌دار هم به‌طور مشابه تعریف می‌شود. مثلاً ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار شکل ۲ به‌صورت زیر است :

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \end{array}$$

پس می‌توان این ماتریس را متناظر با رابطهٔ مربوط به شکل ۲ گرفت. توجه کنید که درایهٔ ijام ماتریس متناظر مساوی با ۱ است اگر و تنها اگر iRj.

اکنون می‌توانیم ویژگی‌های مربوط به رابطه‌ها را به زبان ماتریس‌ها بیان کنیم. مثلاً ویژگی بازتابی یعنی اینکه همهٔ درایه‌های قطر اصلی ماتریس ۱ باشند. بقیهٔ ویژگی‌ها را به زبان ماتریس بیان کنید.

در این فصل صرفاً ماتریس‌های صفر و یک را در نظر می‌گیریم. اکنون یک عمل جمع و یک عمل ضرب برای اعضای مجموعهٔ دو عضوی $\{۰,۱\}$ تعریف می‌کنیم که از روی آن «توان دوم» را برای ماتریس‌ها تعریف خواهیم کرد. این توان دوم با آنچه که در جبر خطی دیده‌ایم فرق دارد.

تعریف : روی مجموعهٔ $\{۰,۱\}$ دو عمل $\dot{+}$ و $\odot$ موسوم به **عمل‌های بولی** را به‌ترتیب زیر تعریف می‌کنیم :

$$۱\dot{+}۰=۰+۱=۱ \quad , \quad ۰\dot{+}۰=۰ \quad , \quad ۱\dot{+}۱=۱$$
$$۱\odot۱=۱ \ , \ ۱\odot۰=۰\odot۱=۰\odot۰=۰$$

با توجه به تعریف بالا، توان دوم ماتریس $M=[m_{ij}]_{n\times n}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$M^{(۲)}=[m_{i۱}\odot m_{۱j}\dot{+}m_{i۲}\odot m_{۲j}\dot{+}\cdots\dot{+}m_{in}\odot m_{nj}]_{n\times n}$$

به عبارت دیگر برای به دست‌آوردن توان دوم یک ماتریس که در اینجا تعریف کردیم مانند توان دوم معمولی در ماتریس‌ها عمل می‌کنیم ولی در نهایت به جای هر درایهٔ غیرصفر که به‌دست آمده باشد عدد ۱ قرار می‌دهیم.

مثال ۵ : اگر $M=\begin{bmatrix}۰&۱&۱\\۰&۱&۰\\۱&۰&۱\end{bmatrix}$ ، آن‌گاه داریم : $M^{(۲)}=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۰&۱&۰\\۱&۱&۱\end{bmatrix}$

تعریف : هرگاه R رابطه‌ای روی مجموعهٔ A باشد **ترکیب رابطهٔ** RoR، رابطه‌ای روی A است که با قاعدهٔ زیر تعریف می‌شود :

$a(RoR)c$ هرگاه عضوی مانند $b\in A$ وجود داشته باشد که aRb و bRc.

با توجه به تعریف‌های فوق قضیهٔ زیر را می‌توان به سادگی اثبات کرد.

قضیهٔ ۱ : فرض کنید A یک مجموعهٔ nعضوی، $n\in\mathbb{N}$ و R یک رابطه روی A باشد. هرگاه $M(R)$ ماتریس متناظر R باشد داریم :

الف) $M(R)=[O]_{n\times n}$ (یعنی همهٔ درایه‌های $M(R)$ صفرند) اگر و تنها اگر $R=\phi$؛

ب) $M(R)=[۱]_{n\times n}$ (یعنی همهٔ درایه‌های $M(R)$ یک‌اند) اگر و تنها اگر $R=A\times A$؛

پ) $M(RoR)=[M(R)]^{(۲)}$.

اثبات : بند (الف) و (ب) بلافاصله از تعریف نتیجه می‌شوند. برای اثبات بند (پ)، اول فرض کنید $i(RoR)j$. پس عضوی مانند $k\in A$ وجود دارد به‌طوری‌که iRk و kRj. پس درایه‌های ikام و kjام در ماتریس M مساوی با ۱ هستند. درنتیجه درایهٔ ijام در ماتریس $M^{(۲)}$ برابر با ۱ است. حال به‌عکس اگر درایهٔ ijام در ماتریس $M^{(۲)}$ برابر با ۱ باشد یعنی

$$m_{i۱}\odot m_{۱j}\dot{+}m_{i۲}\odot m_{۲j}\dot{+}\cdots\dot{+}m_{in}\odot m_{nj}=۱$$

آن‌گاه حداقل یکی از جمعوندها باید مساوی با ۱ باشد. مثلاً $m_{ik} \odot m_{kj}=1$. از آنجا $m_{ik}=m_{kj}=1$، که نتیجه می‌شود : kRj و iRk. پس بنا به تعریف خواهیم داشت $i(RoR)j$.

مثال۶ : مجموعهٔ $A = \{1,2,3,4\}$ و رابطهٔ R روی A به‌صورت

$$R = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,3),(3,4)\}$$

مفروض است. مطلوب است محاسبهٔ RoR.

داریم

$$M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس :

$$[M(R)]^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M(RoR)$$

و از آنجا $RoR = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}$

تعریف : فرض کنید ماتریس‌های صفر و یک $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ از اندازهٔ $m \times n$ باشند. گوییم A **کوچک‌تر از یا مساوی** با B است و می‌نویسیم $A << B$ هرگاه به‌ازای هر $1 \le i \le m$ و هر $1 \le j \le n$ داشته باشیم $a_{ij} \le b_{ij}$.

روشن است که اگر M_1 و M_2 ماتریس‌های متناظر با رابطه‌های R_1 و R_2 روی یک مجموعهٔ A باشند، آن‌گاه $R_1 \subseteq R_2$ اگر و تنها اگر $M_1 << M_2$.

قضیهٔ ۲ : مجموعهٔ n عضوی A، $n \in \mathbb{N}$، و رابطهٔ R روی آن را در نظر می‌گیریم. فرض کنید M ماتریس متناظر با این رابطه باشد. آن‌گاه

(الف) R بازتابی است اگر و تنها اگر $I_n << M$. (I_n ماتریس همانی $n \times n$ است).

(ب) Rمتقارن است اگر و تنها اگر $M = M^T$. (ماتریس M^T ترانهادهٔ M است و آن ماتریسی است که از قراردادن سطرهای M به جای ستون‌های M، با حفظ ترتیب، به‌دست می‌آید.)

(پ) R ترایایی است اگر و تنها اگر $M^{(2)} << M$.

(ت) R پاد متقارن است اگر و تنها اگر $M \wedge M^T << I_n$. (ماتریس $M \wedge M^T$ با عمل روی درایه‌های M و M^T نظیر به نظیر با ضرب مؤلفه به مؤلفه تشکیل می‌شود).

اثبات : هرکدام از حکم‌های فوق با توجه به تعریف‌های مربوط به سادگی اثبات می‌شوند. ما دو حکم آخر را ثابت می‌کنیم.

برای اثبات (پ)، فرض کنید $M^{(2)} << M$. باید نشان دهیم R ترایایی است. هر گاه xRy و yRz، آن‌گاه در ماتریس M، درایهٔ سطر xام و ستون yام و همچنین درایهٔ سطر yام و ستون zام برابر ۱ است. درنتیجه درایهٔ واقع در سطر xام و ستون zام در ماتریس $M^{(2)}$ برابر ۱است. چون $M^{(2)} << M$ پس درایهٔ سطر xام و ستون zام ماتریس M نیز باید ۱ باشد یعنی xRz.

به عکس، فرض کنید R ترایایی باشد. باید نشان دهیم که $M^{(2)} << M$. فرض کنید m_{xz}، درایهٔ واقع در سطر xام و ستون zام در ماتریس $M^{(2)}$، مساوی ۱ باشد، آن‌گاه باید $y \in A$ وجود داشته باشد که در ماتریس M : $m_{yz} = ۱$ و $m_{xy} = ۱$. درنتیجه باید xRy و yRz و چون R ترایایی است xRz. پس $m_{xz} = ۱$. یعنی نشان داده‌ایم که $M^{(2)} << M$.

برای اثبات حکم (ت)، فرض کنید R پاد متقارن باشد. اگر به ازای دو عضو متمایز i و j داشته باشیم $(i,j) \notin R$ آن‌گاه درایهٔ ijام در M و درنتیجه در $M \wedge M^T$ برابر با ۰ است. اگر $(i,j) \in R$ آن‌گاه $(j,i) \notin R$. یعنی اگر درایهٔ ijام $(i \neq j)$ در M مساوی با ۱ باشد آن‌گاه درایهٔ jiام در M مساوی با ۰ است. پس در این صورت نیز درایهٔ ijام در $M \wedge M^T$ برابر با ۰ است. یعنی $M \wedge M^T << I_n$.

به عکس از $M \wedge M^T << I_n$ نتیجه می‌شود که همهٔ درایه‌های غیرقطری $M \wedge M^T$ صفرند. یعنی به‌ازای $i \neq j$ داریم $m_{ij} . m_{ji} = ۰$. در این صورت فقط سه حالت زیر امکان‌پذیرند : $m_{ij} = m_{ji} = ۰$ یا $m_{ij} = ۰ , m_{ji} = ۱$ و یا $m_{ij} = ۱, m_{ji} = ۰$. که نتیجه می‌شود : اگر iRj و jRi آن‌گاه $i = j$.

اثبات بقیهٔ حکم‌ها را به‌عنوان تمرین به عهده دانش‌آموزان می‌گذاریم. ■

قضیه‌های ۱ و ۲ ارتباط بین رابطه‌ها و ماتریس‌های صفر و یک را نشان می‌دهند. این قضیه‌ها با وجود سادگی اهمیت زیادی دارند. زیرا بهترین راه معرفی یک رابطه به کامپیوتر از طریق ماتریس صفر و یک است. از طریق حکم‌های فوق می‌توان با کامپیوتر ویژگی‌های هر رابطه‌ای را بررسی کرد.

مثال ۷ : با استفاده از قضیهٔ ۲ می‌توان یک الگوریتم نوشت و با برنامهٔ کامپیوتری هم‌ارزی بودن رابطه‌ای را که روی یک مجموعهٔ متناهی A داده شده است امتحان کرد. یعنی رابطهٔ R یک رابطهٔ هم‌ارزی است اگر و تنها اگر M، ماتریس صفر و یک متناظر با آن، دارای شرایط زیر باشد :

(الف) $I_n << M$

(ب) $M = M^T$

(پ) $M^{(2)} << M$

▲

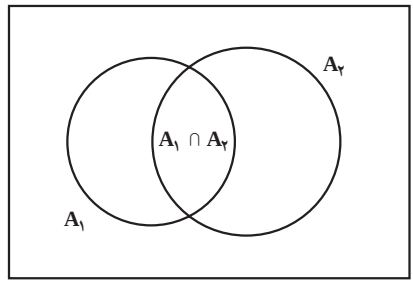
۷ـ۳ـ اصل شمول و عدم شمول

یکی از ابزارهای شمارش به اصل شمول و عدم شمول معروف است. حالت خاص آن را قبلاً در کتاب جبر و احتمال دیده‌اید. اگر A یک مجموعهٔ متناهی باشد تعداد عناصر آن را با $|A|$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید A_1 و A_2 دو مجموعهٔ متناهی باشند. داریم :

$$(1) \qquad |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

با توجه به شکل ۳ رابطهٔ (۱) درست است، زیرا در مجموع $|A_1| + |A_2|$ هر عضوی که فقط به یکی از مجموعه‌های A_1 یا A_2 متعلق باشد یک بار به حساب می‌آید ولی هر عضوی که به هر دو مجموعهٔ A_1 و A_2 تعلق داشته باشد دو بار شمرده می‌شود. پس با کم کردن $|A_1 \cap A_2|$ از حاصل جمع $|A_1| + |A_2|$ هر عضو از $A_1 \cup A_2$ دقیقاً یک بار به‌حساب می‌آید.



شکل ۳ــ نمودار ون برای دو مجموعه

رابطهٔ (۱) وجه تسمیهٔ «شمول و عدم شمول» را نیز توجیه می‌کند. زیرا در شمارش اعضای مجموعهٔ $A_1 \cup A_2$، اول همهٔ اعضای A_1 و A_2 را به‌حساب می‌آوریم (شمول) ولی چون در این صورت اعضای $A_1 \cap A_2$ دوبار به حساب می‌آیند آنها را از شمارش خود خارج می‌کنیم (عدم شمول).

مثال ۸ : چند عضو از مجموعهٔ $A = \{n \in \mathbb{N} : 1 \le n \le ۶۳۰۰\}$ نه بر ۵ تقسیم‌پذیرند ونه بر ۳؟

فرض کنید A_1 زیرمجموعهٔ A متشکل از مضارب ۳ و A_2 زیرمجموعهٔ A متشکل از مضارب ۵ باشند. می‌خواهیم $|\overline{A_1 \cup A_2}|$ را پیدا کنیم ($\overline{B}$ متمم[۱] مجموعهٔ B را نمایش می‌دهد). داریم :

$$|A_1| = \frac{۶۳۰۰}{۳} = ۲۱۰۰$$

$$|A_2| = \frac{۶۳۰۰}{۵} = ۱۲۶۰$$

۱ــ متمم مجموعهٔ B را گاهی با B' یا B^c هم نمایش می‌دهند. به‌جای متمم گاهی اصطلاح مکمل را به‌کار می‌برند.

و چون $A_1 \cap A_2$ مجموعهٔ اعدادی هستند که هم بر ۳ و هم بر ۵ تقسیم‌پذیرند پس :

$$|A_1 \cap A_2| = \frac{۶۳۰۰}{(۳)(۵)} = ۴۲۰$$

درنتیجه با توجه به رابطهٔ (۱) داریم :

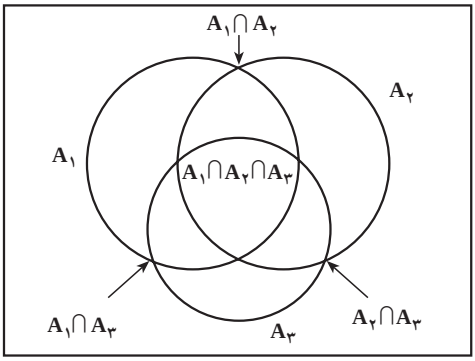
$$|A_1 \cup A_2| = ۲۱۰۰ + ۱۲۶۰ - ۴۲۰$$
$$= ۲۹۴۰$$

و از آنجا $|\overline{A_1 \cup A_2}| = ۶۳۰۰ - ۲۹۴۰ = ۳۳۶۰$.

حال برای $n = ۳$ اصل شمول و عدم شمول را مطالعه می‌کنیم. ▲

قضیهٔ ۳ : فرض کنید A_1 و A_2 و A_3 سه زیرمجموعهٔ متناهی از یک مجموعهٔ A باشند. داریم

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3|$$
$$- |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \qquad (۲)$$



شکل ۴ــ نمودار ون برای سه مجموعه

اثبات : نشان می‌دهیم که هر عضو x از A به تعداد مساوی در دو طرف رابطهٔ (۲) به‌حساب می‌آید. به شکل ۴ توجه کنید.

دو حالت داریم :

حالت ۱ : اگر x متعلق به هیچ‌کدام از مجموعه‌های A_1 و A_2 و A_3 نباشد، آن‌گاه x در دو طرف رابطهٔ (۲)، صفر بار به حساب می‌آید.

حالت ۲ : فرض کنید x به s مجموعه از مجموعه‌های A_1 و A_2 و A_3 تعلق داشته باشد $(۳ \geq s \geq ۱)$. آن‌گاه x یک بار در طرف چپ به حساب می‌آید، و در طرف راست نیز

اگر $s=۱$، یک بار به حساب می‌آید،

اگر $s=۲$، باز هم $۱ = ۱ - ۲$ بار به حساب می‌آید و

اگر $s=۳$، در این صورت هم $۱ = ۱ + ۳ - ۳$ بار به حساب می‌آید. ■

اثبات بالا را می‌توان به n مجموعه تعمیم داد و قضیه‌ای بیان کرد که به اصل شمول و عدم شمول معروف است. در مثال‌های زیر خواهیم دید که چگونه بعضی از مسائل کلاسیک شمارش را می‌توان با اصل شمول و عدم شمول حل کرد.

مثال ۹ : تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ ۴عضوی B به یک مجموعهٔ ۳عضوی A را پیدا کنید. باید توجه کرد که منظور از تابع $f: B \longrightarrow A$ تابعی است که روی همهٔ اعضای B تعریف شده است و تابع $f: B \longrightarrow A$ را پوشا می‌نامیم هرگاه $R_f = A$ = بُرد f.

فرض کنید $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ و $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. مجموعهٔ تمام توابع $f: B \to A$ را با S نمایش می‌دهیم و ابتدا |S| را محاسبه می‌کنیم. به ازای هر $b_j \in B$ برای $f(b_j)$ سه امکان وجود دارد، زیرا $f(b_j)$ امکان دارد a_1، a_2 یا a_3 باشد. این امکان‌ها به ازای هر دو عضو متمایز B به هم وابسته نیستند یعنی مثلاً به‌ازای هر انتخاب برای هر سه عضو B، عضو چهارم می‌تواند دارای سه انتخاب باشد. پس تعداد کل این توابع ۸۱=۳.۳.۳.۳ است. حال فرض کنید A_i مجموعهٔ توابعی باشد که هیچ عضوی از B را به a_i نسبت نمی‌دهند.

یعنی : $A_i = \{f \in S:\ a_i \notin f(B)\}$ $\qquad i = 1,2,3$

منظور شمارش تعداد اعضای مجموعهٔ $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$ است. از فرمول (۲) در قضیهٔ ۳ استفاده می‌کنیم. مشابه استدلال فوق داریم

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^4 = 16$$

و

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1$$

و

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

پس :

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 2^4 + 2^4 + 2^4 - (1+1+1) + 0 = 45$$

و از آنجا

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = 81 - 45 = 36$$

که تعداد توابع پوشای از B به A است. ▲

برای حل معادلات با جواب‌های صحیح و با محدودیت‌های مختلف، می‌توان از اصل شمول و عدم شمول استفاده کرد. برای توضیح این روش، اول به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۰ : فرض کنید k نوع مختلف گل و به تعداد فراوان از هر نوع موجود است. می‌توان ثابت کرد که تعداد انتخاب n گل از این k نوع گل که در آن تکرار نیز مجاز است برابر است با تعداد

جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ و مساوی است با $\binom{n+k-1}{n}$.

اگر x_i را تعداد گل‌های انتخاب‌شده از نوع iام بگیریم به‌سادگی دیده می‌شود که یک تناظر یک به یک بین انتخاب‌ها و جواب‌های معادلهٔ فوق موجود است. اثبات برابری تعداد انتخاب‌ها با مقدار داده شده را به عنوان تمرین به عهدهٔ دانش‌آموزان گذاشته‌ایم. باید دقت کرد که در این مثال حالت‌هایی را هم در نظر گرفته‌ایم که یک یا چند نوع گل را اصلاً انتخاب نکرده باشیم. ▲

مثال ۱۱ : تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ را به‌طوری که به‌ازای $i = 1,2,3$، $0 \le x_i \le 2$ باشد پیدا کنید.

مجموعه‌های A_1، A_2 و A_3 را به‌ترتیب زیر تعریف می‌کنیم :

$A_i = \{$جواب‌های معادلهٔ فوق به‌شرطی که $x_i > 2$ باشد$\}$, $i = 1,2,3$

باید تعداد مجموعهٔ $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$ را پیدا کنیم. بنابر فرمول (۲) از قضیهٔ ۳ داریم :

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= |S| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

که در آن S مجموعهٔ تمام جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ فوق است. پس بنا به مثال ۱۰ داریم.

$$|S| = \binom{3+4-1}{4} = 15$$

از طرف دیگر مثلاً تعداد A_1 مساوی است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. زیرا کافی است که در جواب معادلهٔ اخیر به x_1، عدد ۳ اضافه کنیم تا یک جواب معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ با شرط $x_1 > 2$ به‌دست آید و برعکس. اما به‌سادگی دیده می‌شود که تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ مساوی است با ۳. پس $|A_1| = 3$ و به همین ترتیب $|A_2| = |A_3| = |A_1| = 3$.

از طرف دیگر داریم

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \phi$$

همین‌طور $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \phi$. پس $\left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}\right| = 15 - 3 - 3 - 3 = 6$. در حقیقت ۶ جواب فوق چنین‌اند :

$$(0,2,2),(1,1,2),(1,2,1),(2,0,2),(2,1,1),(2,2,0)$$

در قسمت نظریهٔ اعداد با **تابع حسابی اویلر** ϕ به‌عنوان «مجلهٔ ریاضی» آشنا شده‌ایم. منظور از $\phi(n)$ عبارت است از تعداد اعداد صحیح و مثبت m که کوچک‌تر از n یا مساوی با آن بوده و m و n نسبت به هم اول باشند. قضیهٔ زیر حالت خاصی از قضیه‌ای کلی دربارهٔ این تابع است.

قضیهٔ ۴ : فرض کنید عدد صحیح و مثبت n برابر با حاصل‌ضرب سه عدد اول و متمایز به‌صورت زیر باشند :

$$n = p_1 p_2 p_3$$

در این صورت

$$\phi(n) = n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})(1-\frac{1}{p_3})$$

اثبات : مجموعه‌های A_i را به‌ترتیب زیر تعریف می‌کنیم :

$$A_i = \{m: 1 \le m \le n, p_i | m\},\ i = 1,2,3$$

حال اصل شمول و عدم شمول را برای مجموعه‌های A_i می‌نویسیم. داریم :

$$\phi(n) = \left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}\right| \text{ و برای } i = 1,2,3$$

$$A_i = \left\{p_i, 2p_i, 3p_i, \ldots, (\frac{n}{p_i})p_i\right\}$$

پس $|A_i| = \frac{n}{p_i}$. به همین ترتیب به ازای $i \neq j$، $|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}$، و $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \frac{n}{p_1 p_2 p_3}$. اکنون از رابطهٔ (۲) در قضیهٔ ۳ نتیجه می‌گیریم که :

$$n - \phi(n) = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \frac{n}{p_3} - \frac{n}{p_1 p_2} - \frac{n}{p_1 p_3} - \frac{n}{p_2 p_3} + \frac{n}{p_1 p_2 p_3}$$

$$\phi(n) = n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - \frac{n}{p_3} + \frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \frac{n}{p_2 p_3} - \frac{n}{p_1 p_2 p_3}$$

$$= n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})(1-\frac{1}{p_3})$$

مثال ۱۲ : ثابت کنید $\phi(۴۲) = ۱۲$.

چون $۴۲ = ۲.۳.۷$، حکم از قضیهٔ ۴ به‌دست می‌آید :

$$\phi(۴۲) = ۴۲(۱-\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۳})(۱-\frac{۱}{۷}) = ۱۲$$

این نتیجه را می‌توان مستقیماً هم بررسی کرد. زیرا تمام اعداد صحیح و مثبت نابیشتر از ۴۲ که نسبت به آن اول هستند عبارت‌اند از :

۱،۵،۱۱،۱۳،۱۷،۱۹،۲۳،۲۵،۲۹،۳۱،۳۷،۴۱

▲

۷ـ۴ـ تمرین‌ها

۱ــ فرض کنید $A = \{۱,۲,۳,۴\}$. برای هریک از حالت‌های زیرگرافی رسم کنید که رابطهٔ متناظر با آن

الف) بازتابی و متقارن باشد ولی ترایایی نباشد،

ب) بازتابی و ترایایی باشد ولی متقارن نباشد،

پ) متقارن و ترایایی باشد ولی بازتابی نباشد.

جواب‌های خود را با ماتریس‌های متناظر امتحان کنید.

۲ــ فرض کنید $A = \{w,x,y,z\}$. تعداد رابطه‌های روی A با ویژگی‌های داده‌شده در هریک از حالت‌های زیر را بیابید :

الف) بازتابی؛

ب) متقارن؛

پ) بازتابی و متقارن؛

ت) بازتابی و شامل (x,y)؛

ث) پاد متقارن؛

ج) پاد متقارن و شامل (x,y)؛

چ) متقارن و پاد متقارن؛

ح) پاد متقارن، متقارن و بازتابی؛

خ) هم‌ارزی (راهنمایی : تعداد افرازهای مختلف را پیدا کنید).

۳ــ فرض کنید $A = \{۱,۲,۳,۴\}$. دو رابطهٔ R و S روی A به‌صورت زیر داده شده‌اند.

$R = \{(۱,۲),(۱,۳),(۲,۴),(۴,۴)\}$,

$S = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۳),(۲,۴)\}$

رابطه‌های RoR و SoS را پیدا کنید.

۴ــ بندهای (الف) و (ب) از قضیهٔ ۱ را اثبات کنید.

۵ ــ بندهای (الف) و (ب) از قضیهٔ ۲ را اثبات کنید.

۶ ــ فرض کنید R یک رابطهٔ بازتابی روی مجموعهٔ متناهی A باشد. نشان دهید که رابطهٔ RoR نیز بازتابی است.

۷ــ ماتریس صفر و یک $E = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. تعداد ماتریس‌های صفر و یک F با شرط $E << F$ را بیابید.

۸ ــ با استفاده از قضیه‌هایی که در این فصل خوانده‌اید نشان دهید که آیا رابطهٔ زیر روی مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است یا خیر.

$R = \{(۱,۱),(۲,۱),(۴,۲),(۲,۴),(۱,۳),(۱,۲),(۴,۴),(۳,۳),(۲,۲),(۱,۱)\}$

۹ــ یک ماتریس $n \times n$ از اعداد متمایز مثلاً $۱,۲,۳,\ldots,n^۲$ را **یک مربع وفقی** (یا مربع جادویی) می‌نامیم، هرگاه حاصل جمع درایه‌های هر سطر، حاصل جمع درایه‌های هر ستون، حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی و حاصل جمع درایه‌های قطر فرعی با هم مساوی باشند. به‌عنوان مثال یک مربع وفقی ۳×۳ در زیر نشان داده شده است.

۲	۷	۶
۹	۵	۱
۴	۳	۸

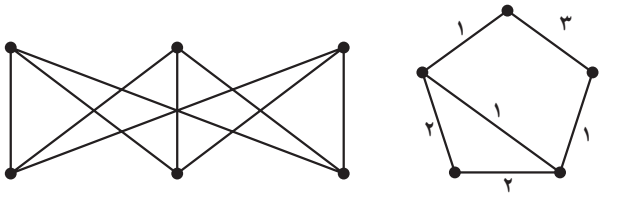
ثابت کنید که در هر مربع وفقی ۳×۳ که از اعضای $۱,۲,۳,\ldots,۹$ تشکیل شده است عضوی که در مرکز مربع قرار می‌گیرد همیشه عدد ۵ است.

۱۰ــ گراف G داده شده است. یک **برچسب‌گذاری جادویی** G عبارت است از متناظرکردن اعدادی، معمولاً صحیح و مثبت، به یال‌های G به‌طوری که حاصل‌جمع اعداد متناظر با یال‌های مارّ

بر هر رأس عددی ثابت باشد. در گرافی که در شکل ۵ (الف) داده شده است اعدادی که روی یال‌ها نوشته شده‌اند یک برچسب‌گذاری جادویی را نشان می‌دهد، زیرا حاصل‌جمع اعداد متناظر به یال‌های مارّ بر هر رأس مساوی با ۴ است.

با استفاده از مربع وفقی ۳ × ۳ یک برچسب‌گذاری جادویی برای گراف شکل ۵ (ب) به‌دست آورید.

۱۱ــ ثابت کنید که تعداد انتخاب n گل از k نوع مختلف گل، که تکرار نیز مجاز باشد مساوی است با $\binom{n+k-1}{n}$.



(ب) (الف) یک برچسب‌گذاری جادویی

شکل ۵

۱۲ــ تعداد جواب‌های صحیح و مثبت هریک از معادلات زیر را پیدا کنید.

الف) $x_1 + x_2 + x_3 = 7$

ب) $x_1 + x_2 + x_3 = 8 \quad , \quad 2 \le x_1 \le 3 \quad , \quad 4 \le x_2 \le 8 \quad , \quad x_3 \ge 1$

پ) $x_1 + x_2 + x_3 = 14 \quad , \quad 1 \le x_i \le 7 \quad , \quad i = 1,2,3$

۱۳ــ مطلوب است تعداد شمارهٔ شناسنامه‌های پنج‌رقمی که در آنها هریک از رقم‌های ۱، ۳ و ۷ حداقل یک بار ظاهر می‌شوند.

۱۴ــ در یک نظرخواهی از ۱۰۰ نفر دانش‌آموز نتایج زیر به‌دست آمده است : ۶۰ نفر آنها مجلهٔ A را می‌خوانند، ۵۰ نفر مجلهٔ B، ۵۰ نفر مجلهٔ C، ۳۰ نفر مجله‌های A و B، ۲۰ نفر مجله‌های B و C، ۴۰ نفر مجله‌های A و C و بالاخره ۱۰ نفر هر سه مجلهٔ A و B و C را می‌خوانند. مطلوب است تعداد دانش‌آموزانی که :

الف) هیچ مجله‌ای نمی‌خوانند؛

ب) دقیقاً ۲ مجله می‌خوانند؛

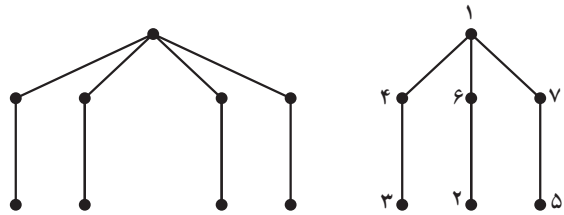
پ) حداقل ۲ مجله می‌خوانند.

۱۵ــ الف) اصل شمول و عدم شمول را در حالت چهار مجموعه بنویسید و آن را اثبات کنید.

ب) در منطقه‌ای چهار روستا وجود دارد. قرار است راه‌هایی دوطرفه بین بعضی از روستاها ساخته شود به‌طوری که نهایتاً هیچ روستایی منفرد (یعنی بدون ارتباط با هیچ روستای دیگر) نماند. این کار به چند طریق امکان دارد؟

۱۶ــ برای درخت‌ها برچسب گذاری‌های مختلف تعریف می‌شود. یک **برچسب‌گذاری دلپذیر** برای یک درخت n رأسی عبارت است ازنسبت‌دادن اعداد $1,2,3,\ldots,n$ به رئوس آن، به‌طوری که برچسب یال‌ها $n-1$ عدد متمایز باشند و برچسب هر یال از قدرمطلق تفاضل برچسب رأس‌های دو انتهای آن به‌دست آید. مثلاً در شکل ۶ (الف) یک برچسب‌گذاری دلپذیر را می‌بینیم.

یک برچسب‌گذاری دلپذیر برای درخت شکل ۶ (ب) پیدا کنید : **حدس** این است که «هر درخت یک برچسب‌گذاری دلپذیر دارد». ولی این حدس هنوز ثابت یا رد نشده است.



(الف) یک برچسب‌گذاری دلپذیر (ب)

شکل ۶

مراجع

۱ــ ایوان نیون، ریاضیات انتخاب یا چگونه بدون شمارش بشماریم. ترجمهٔ علی عمیدی و بتول جذبی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ اول ۱۳۶۸.

2 – R.P. Grimaldi, Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction, 2nd. ed., Addison– Wesley 1989.

مجلهٔ ریاضی

مربع وفقی یکی از ساختارهای ترکیبیاتی است که ریاضی‌دانان شرق دربارهٔ آن کارهای بسیاری انجام داده‌اند و روش‌های ساخت این مربع‌ها برای اندازه‌های مختلف منسوب به این دانشمندان است. اصولاً ساختارهای ترکیبیاتی یکی از مهم‌ترین مباحث ترکیبیات است که دارای کاربردهای فراوان نیز هستند. از مهم‌ترین ساختارهای ترکیبیاتی مربع‌های لاتین و طرح‌های بلوکی است. یک مربع لاتین عبارت است از یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های $1,2,3,\ldots,n$ به‌طوری که در هر سطر و در هر ستون درایه‌های تکراری نباشند.

مربع‌های لاتین با مربع‌های وفقی نیز ارتباط دارند. یکی از کاربردهای مربع‌های لاتین در مبحث رمزنگاری است. به‌ازای هر n داده شده می‌توان یک مربع لاتین از مرتبه n ساخت. از مربع‌هایی که در زیر به‌ازای $n=4$ و $n=5$ ساخته شده‌اند می‌توان به‌راحتی برای حالت کلی نیز ایده گرفت.

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۱
۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳

دقت کنید که در هر دو مربع فوق بعضی از درایه‌های واقع در دو گوشهٔ چپ بالا و راست پایین را پررنگ نوشته‌ایم. در مربع اول ۴ تا و در مربع دوم ۶ تا از این درایه‌های پررنگ قرار دارند. جالب این است که اگر در هریک از این دو مربع فقط این درایه‌ها را به ما بدهند می‌توانیم بقیه درایه‌ها را به‌طور یکتا به‌دست آوریم.

تعداد درایه‌های پررنگ داده شده در حالت کلی $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ است. حال فرض کنید درایه‌های یک مربع لاتین اطلاعاتی است که می‌خواهید به یک شخص مورد اعتماد خود بدهید. یک مربع $n \times n$ از n^2 اطلاعات تشکیل می‌شود. الگوی فوق پیشنهاد می‌کند که فقط کافی است که حدود $\frac{1}{4}$ از اطلاعات را منتقل کنید. شخص مورد اعتماد می‌تواند بقیه را به‌طور یکتا پیدا کند.

۴ احتمال

مقدمه

امروزه همهٔ سازمان‌های دولتی و خصوصی، در هر رسته‌ای که باشند، اعم از اقتصادی، صنعتی، اجتماعی و غیره برای تعیین سیاست و روند کار آیندهٔ خود ناگزیر به برنامه‌ریزی هستند. تصمیم‌گیری‌ها و آینده‌نگری‌ها علی رغم وجود اطلاعاتی از گذشته و داده‌هایی از حال، همواره دستخوش عدم قطعیت‌هایی هستند که نمی‌توان در رویارویی با آنها با یقین کامل برنامه‌ریزی کرد. علم احتمال و بر پایهٔ آن علم آمار با شاخه‌های متعددش، در مقابل لجام گسیختگی این عدم قطعیت‌ها و یا به اصطلاح عرف در مقابل شانس قد علم کرده‌اند و براساس قوانین محکم ریاضی، اثر شانس را کنترل می‌کنند. استنباط آماری که پایه‌ای برای تصمیم‌گیری است بر قوانین احتمال تکیه کرده است و در حال حاضر کوچک‌ترین گام پژوهشی در هر زمینه، مستلزم استفاده از این نوع استنباط‌هاست. کاربرد احتمال در کارهای نظامی، فیزیک، ارتباطات، نظریهٔ اطلاعات، علوم فضایی، نظریهٔ رمزنگاری و امثال آنها به سرعت گسترش یافته است. با این وجود تصور می‌رود هنوز در اوایل راهی هستیم که سه سدهٔ پیش به صورتی مقدماتی آغاز شده است. ما با شما از ابتدای این راه همراه می‌شویم و با هم چند گامی مقدماتی از این راه را طی می‌کنیم و از آن جنبهٔ احتمال که صورتی گسسته دارد سخن می‌گوییم. شاید که راهنمای شما برای ادامهٔ راه باشد.

فصل ۸

احتمال

۸ـ۱ـ یادآوری

خلاصه‌ای از آنچه را که سال گذشته دربارهٔ احتمال خوانده‌ایم در زیر می‌آوریم :

الف) می‌دانیم که اگر آزمایشی یا پدیده‌ای قبل از رخداد، نتیجه‌اش معلوم نباشد ولی نتیجه‌های ممکن آن مشخص باشند آن را **آزمایش تصادفی** یا **پدیدهٔ تصادفی** می‌نامند. مجموعهٔ همهٔ نتایج ممکن را **فضای نمونه‌ای** آزمایش تصادفی می‌نامیم. فضای نمونه‌ای را با S نشان می‌دهیم. هر نتیجهٔ ممکن، یعنی هر عضو S را یک **برآمد** می‌گوییم. در هر آزمایش تصادفی تنها یکی از عضوهای این مجموعه رخ خواهد داد.

مثال ۱ : قرار است فردا تیم A در مقابل تیم B بازی کند. تیم A چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آورد؟

به طور مطمئن نمی‌دانیم. اما نتیجه‌هایی که یکی از آنها رخ می‌دهد عبارت‌اند از :

برابر شدن دو تیم = c باختن تیم A=b بردن تیم A=a

پس مجموعهٔ S= {a,b,c} فضای نمونه‌ای است و هر عضو این مجموعه برآمدی است که ممکن است رخ دهد. از سه برآمد تنها یکی رخ می‌دهد. ▲

ب) هر پیشامد، زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است. مثلاً E_1= {a,b} یک پیشامد است و به‌معنای آن است که در بازی فردا «تیم A یا می‌برد و یا می‌بازد». در هر حال وقتی می‌گوییم پیشامد E_1 رخ خواهد داد به معنای آن است که تنها یکی از برآمدهای آن رخ خواهد داد. اگر E_2= {a,c} رخ بدهد بدان معناست که تیم A فردا یا می‌برد و یا برابر می‌کند. دو پیشامد را که برآمد مشترکی ندارند **ناسازگار** می‌گویند. سال گذشته اعمال روی پیشامدها را که همان اعمال روی مجموعه‌ها هستند دیده‌اید.

تذکر : منظور از «رخداد» یک پیشامد وقوع آن پیشامد، یعنی مشاهدهٔ عضوی از آن پیشامد به عنوان نتیجهٔ آزمایش است.

پ) اگر فضای نمونه‌ای به جای ۳ برآمد ممکن، n برآمد ممکن داشته باشد تعداد پیشامدها، یعنی تعداد زیر مجموعه‌های آن ۲^n است. در مثال بالا $۸=۲^۳$ پیشامد در فضای نمونه‌ای حاصل می‌شوند که عبارت‌اند از :

$$\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\phi$$

ϕ **پیشامد ناممکن** است. پیشامد $S=\{a,b,c\}$ حتماً رخ می‌دهد زیرا به معنای آن است که یکی از سه برآمد a، b و c رخ می‌دهد و این مسلم است که فردا، در صورت انجام بازی، تیم A یا می‌برد، یا می‌بازد و یا برابر می‌کند. پس S رخ می‌دهد. لذا S را **پیشامد مطمئن** می‌گوییم. تعداد اعضای مجموعهٔ S، یعنی تعداد برآمدهای فضای نمونه‌ای ممکن است **متناهی** یا **شمارا نامتناهی** یا **ناشمارا نامتناهی** باشد. اگر لامپی را از فرایند تولید لامپ انتخاب کنیم و بخواهیم سالم بودن آن را امتحان کنیم فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی دو برآمد دارد، لذا S مجموعه‌ای متناهی است. اگر هدف این باشد که سکه‌ای را آنقدر بیندازیم تا برای اولین بار رو ظاهر شود فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی، بی‌نهایت برآمد دارد که می‌توان این برآمدها را با اعداد طبیعی متناظر کرد. وقتی تعداد برآمدهای فضایی نمونه‌ای متناهی یا شمارا نامتناهی باشد آن را **فضای نمونه‌ای گسسته** می‌گوییم. تعداد برآمدهای فضای نمونه‌ای ممکن است ناشمارا نامتناهی باشد که در این صورت فضای نمونه‌ای گسسته نیست، مثل انتخاب تصادفی نقطه در بازهٔ $(۰,۱)$.

ت) وقتی فضای نمونه‌ای S را برای آزمایشی تصادفی داریم، احتمال پیشامدهای فضای S را به صورت مقادیر حقیقی یک تابع مجموعه‌ای P تعریف می‌کنیم، که این تابع براساس ۳ **اصل موضوع** زیر، اعداد حقیقی را به پیشامدها یعنی به زیر مجموعه‌های S نسبت می‌دهد،

اصل موضوع ۱ : احتمال هر پیشامد، عددی نامنفی است، یعنی برای هر پیشامد A از S،

$$P(A)\geq ۰$$

اصل موضوع ۲ :

$$P(S)=۱$$

اصل موضوع ۳ : اگر $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n دنباله‌ای متناهی[۱] از پیشامدهای دو به دو ناسازگار S باشند آن گاه

$$P(A_۱\cup A_۲\cup\ldots\cup A_n)=P(A_۱)+P(A_۲)+P(A_۳)+\ldots+P(A_n)$$

۱ــ در واقع اگر دنبالهٔ پیشامدها نامتناهی نیز باشد، اصل موضوع ۳ استوار است.

این اصول موضوع منسوب به کولموگوروف هستند. هر تابع حقیقی مقدار که در این اصول صادق باشد به تابع احتمال موسوم است. فضای S و تابع P و مجموعهٔ پیشامدها را مدل احتمال آزمایش تصادفی می‌نامند. تعریف دقیق‌تری از مدل احتمال را در مقاطع بالاتر تحصیلی می‌بینید. دیده‌اید که اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای گسسته S باشد، P(A) برابر با مجموع احتمال‌های برآمدهایی است که در A هستند. به خصوص اگر S دارای n برآمد باشد و تابع احتمال به هر برآمد عدد $\frac{1}{n}$ را نسبت دهد می‌توانید برقراری ۳ اصل بالا را به سهولت تحقیق کنید. همان‌طور که می‌دانید چنین فضای نمونه‌ای را یکنواخت یا متساوی‌الاحتمال می‌نامند. اگر در این فضا پیشامد A متشکل از m برآمد باشد آن گاه $P(A)=\frac{m}{n}$ است که با مفهوم فراوانی نسبی در آمار مطابقت دارد.

وقتی مثلاً پیشامد $A=\{a,b,c\}$ را داریم که a، b و c برآمدها هستند احتمال این پیشامد را چنین می‌نویسیم

$$P(A)=P(\{a,b,c\})$$

در مواردی که پیشامد، تک عضوی مانند $\{a\}$ باشد برای سادگی احتمال آن را به جای $P(\{a\})$ به صورت $P(a)$ می‌نویسیم.

وقتی فضای نمونه‌ای گسسته است در تخصیص اندازهٔ احتمال، لازم نیست که احتمال هر زیر مجموعه ممکن را مشخص کنیم، و این امتیاز بزرگی است، زیرا مثلاً اگر فضای نمونه‌ای ۲۰ برآمد داشته باشد تعداد پیشامدهای S یعنی تعداد زیر مجموعه‌های آن $۱۰۴۸۵۷۶=۲^{۲۰}$ است. در این حالت اگر اندازهٔ احتمال منسوب به رخداد هر برآمد معلوم باشد مدل احتمال مشخص می‌شود.

دیده‌اید که روی یک فضای نمونه‌ای می‌توان تابع‌های P ی مختلف تعریف کرد.

مثال۲ : به مثال ۱ رجوع کنید. فرض کنید در گذشته تیم A مثلاً ۲۰ بار با تیم B مسابقه داده است و شرایط زمانی و مکانی و تیمی همهٔ بازی‌ها یکی بوده‌اند، و جمعاً ۱۰ بار تیم A برنده، ۶ بار بازنده شده و ۴ بار برابر کرده باشد. پس $\frac{۱۰}{۲۰}$ بارها برنده، $\frac{۶}{۲۰}$ بارها بازنده شده و $\frac{۴}{۲۰}$ بارها برابر کرده است. در این صورت معقول است که بگوییم فردا تیم A با احتمال $\frac{۵}{۱۰}$ برنده، با احتمال $\frac{۳}{۱۰}$ بازنده خواهد شد و با احتمال $\frac{۲}{۱۰}$ برابر خواهد کرد. پس با توجه به فراوانی نتیجه‌های بازی‌های گذشته تابع P را به‌صورتی تعریف می‌کنیم که به برآمدهای فضای نمونه‌ای $S=\{a,b,c\}$ احتمال‌های زیر را تخصیص دهد.

$$P(a)=\frac{۵}{۱۰} \quad ، \quad P(b)=\frac{۳}{۱۰} \quad ، \quad P(c)=\frac{۲}{۱۰}$$

می‌توانیم از روی اطلاعات دیگر، مثلاً ملاحظه مسابقات تمرین چند روز قبل دو تیم، احتمال‌های دیگری را به برآمدها نسبت دهیم. با معلوم بودن S و P می‌توانیم احتمال هر پیشامد S را مشخص کنیم، مثلاً

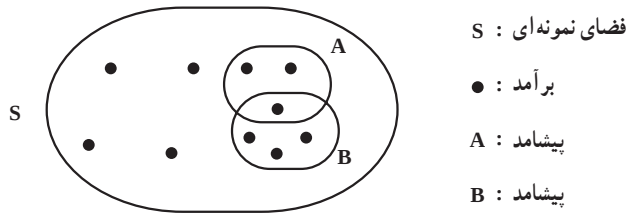
$$P(\{a,c\}) = P(a)+P(c) = \frac{۷}{۱۰}$$

یعنی احتمال اینکه تیم A برنده شود یا برابر کند $\frac{۷}{۱۰}$ است. ▲

وقتی فضای نمونه‌ای ناشمارا نامتناهی باشد تخصیص احتمال به همه برآمدها عملی نیست. در بیشتر این حالت‌ها احتمالی که به هر یک از برآمدها نسبت می‌دهند باید برابر صفر باشد و تعیین احتمال پیشامدهایی که احتمال آنها صفر نیست از روی برآمدها مشکل خواهد شد. برای ساختن مدل احتمال در این حالت‌ها احتمال‌ها را به پیشامدها نسبت می‌دهیم. همان‌طور که سال قبل دیده‌ایم این فضای نمونه‌ای می‌تواند به صورت مجموعه‌ای از اعداد حقیقی مثل بازهٔ $(۰,۱)$ یا تمام خط حقیقی یا مجموعه‌ای از نقاط واقع در فضای سه بعدی مانند نقاط داخل یک مکعب و نظایر این‌ها باشد. در این صورت تابع P، همان‌طور که می‌دانیم، به هر پیشامد که متناظر با مثلاً فاصله‌ای روی خط حقیقی یا ناحیه‌ای روی دایره یا ناحیه‌ای درون مکعب و امثال آن است عددی را به عنوان احتمال نسبت می‌دهد. ما در این کتاب تنها از فضاهای نمونه‌ای گسسته صحبت می‌کنیم.

ث) همان‌طور که در (ب) گفتیم اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند وقتی که برآمدی مشترک نداشته باشند آنها را **ناسازگار** می‌گویند. اگر A و B برآمدهایی مشترک داشته باشند، یعنی $A\cap B$ تهی نباشد آن‌گاه $A\cap B$ که خود زیر مجموعهٔ S است، یک پیشامد است و وقتی رخ می‌دهد که برآمدی از آن، که ناچار هم عضو A و هم عضو B است، رخ دهد. اگر پیشامد $A\cup B$ را در نظر بگیریم وقتی این پیشامد رخ می‌دهد که حدّاقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد. واضح است این برآمد که متعلق به A و یا متعلق به B است می‌تواند متعلق به اشتراک A و B هم باشد. در سال قبل دیده‌ایم که

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$



شکل ۱ــ نمایش فضای نمونه‌ای، برآمد و پیشامد

فرمول صفحهٔ قبل به شما اجازه می‌دهد که وقتی از روی مدل احتمال، احتمال رخداد پیشامد A، احتمال رخداد پیشامد B و احتمال رخداد پیشامد $A\cap B$ را دارید احتمال رخداد پیشامد $A\cup B$ را به‌دست آورید. برابری‌های زیر را نیز یادآوری می‌کنیم.

اگر پیشامد $\overline{A}$ متمم پیشامد A باشد آن‌گاه

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

که بی‌درنگ نتیجه می‌شود

$$P(\phi)=1-P(S)=0$$

همچنین اگر $A\subseteq B$، آن‌گاه

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

و

$$P(A)\leq P(B)$$

اینک پس از این یادآوری‌ها به بیان مطالبی جدید در زمینهٔ احتمال می‌پردازیم.

۸ـ۲ـ مدل احتمال شرطی

فرض کنید می‌خواهیم آزمایشی تصادفی را انجام دهیم. ابتدا فضای نمونه‌ای را مشخص می‌کنیم و احتمالی به رخداد هر پیشامد نسبت می‌دهیم و بدین ترتیب مدل احتمال را معین می‌کنیم. این مدل را می‌شناسید. حال اگر اطلاعی اضافی دربارهٔ فضای نمونه‌ای داشته باشیم، مثلاً به دلیلی بدانیم که پیشامد B از این فضای نمونه‌ای رخ داده است آن‌گاه معمولاً مدل احتمال قبلی به هم می‌ریزد و آگاهی از رخداد حتمی پیشامد B در مقدار احتمال سایر پیشامدها اثر می‌گذارد، که در این صورت احتمال‌های پیشامدهای فضای نمونه‌ای با احتمال‌های مدل قبلی تفاوت دارند. اگر بتوانیم تحت این شرط که پیشامد B حتماً رخ می‌دهد احتمال پیشامدهای دیگر فضای نمونه‌ای را مشخص کنیم مدل احتمال جدیدی به‌دست می‌آید که آن را مدل **احتمال شرطی** می‌نامیم. قبل از توضیح بیشتر مثالی می‌زنیم.

مثال ۳ : می‌خواهید یک تاس قرمز و یک تاس سفید را با هم بریزید. تاس‌ها همگن‌اند. می‌دانید که فضای نمونه‌ای ۳۶ برآمد دارد :

$$S=\{(\text{۶ قرمز و ۶ سفید}),\ldots,(\text{۱ قرمز و ۶ سفید}),\ldots,(\text{۶ قرمز و ۱ سفید}),\ldots,(\text{۱قرمز و ۱سفید})\}$$

پس از انجام آزمایش، یکی از این ۳۶ برآمد رخ خواهد داد. احتمال رخداد هر برآمد $\frac{1}{36}$ است. حال فرض کنید این اطلاع اضافی را داریم که پس از انجام آزمایش مجموع شماره‌های دو

تاس حتماً کوچک‌تر از ۷ است. پیشامد «مجموع دو شماره کوچک‌تر از ۷» را B می‌نامیم. پیشامد B از برآمدهای زیر تشکیل می‌شود :

(۱,۱), (۱,۲), (۱,۳), (۱,۴), (۱,۵)

(۲,۱), (۲,۲), (۲,۳), (۲,۴)

(۳,۱), (۳,۲), (۳,۳)

(۴,۱), (۴,۲)

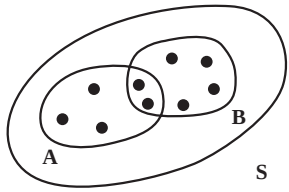
(۵,۱)

یعنی پیشامد B، متشکل از ۱۵ برآمد از ۳۶ برآمد فضای نمونه‌ای است. وقتی شرط می کنیم که B حتماً رخ می‌دهد، یعنی یکی از این ۱۵ برآمد نتیجهٔ ریختن دو تاس است.

برآمدهایی مثل (۱,۶) یا (۲,۵) یا (۴,۵) و غیره که مجموع دو شمارهٔ آنها ۷ یا بیش از ۷ است رخ نخواهند داد. حال که می‌دانیم پیشامد B به طور مطمئن رخ می‌دهد آن را فضای نمونه‌ای جدید فرض می کنیم و بدین ترتیب مدل احتمال جدیدی داریم که آن را مدل احتمال شرطی با شرط «مجموع دو شماره کوچک‌تر از ۷ است» می‌نامیم. حال اگر بخواهیم به شرط رخداد پیشامد B، احتمال رخداد یک جفت را بدانیم و پیشامد داشتن جفت را با A نشان دهیم در این صورت احتمال پیشامد داشتن جفت به شرط رخداد پیشامد B را با P(A|B) نشان می‌دهیم و می‌خوانیم احتمال **پیشامد A به شرط رخداد پیشامد B** و یا به صورتی ساده احتمال **پیشامد A به شرط B**. وقتی می‌دانیم B رخ داده، تنها ممکن است یکی از ۱۵ برآمد بالا رخ دهد. بین این برآمدها جفت‌های ممکن (۱,۱)، (۲,۲) و (۳,۳) هستند. چون احتمال رخداد هر برآمد مساوی $\frac{۱}{۱۵}$ است، لذا

$$P(A \mid B) = P\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\} = \frac{۳}{۵}$$

در مثال بالا، احتمال شرطی، یعنی P(A|B) را به سادگی حساب کردیم زیرا فضای نمونه‌ای آزمایش یکنواخت، یا برآمدها متساوی‌الاحتمال یعنی هم شانس بودند، ولی اگر احتمال برآمدها یکی نباشند کار کمی مشکل است. قبل از اینکه تعریف کلی احتمال شرطی را مطرح کنیم، به این مطلب به صورتی شهودی می اندیشیم. به شکل ۲ توجه کنید.



شکل ۲

S فضای نمونه‌ای آزمایش است. B پیشامدی است که می‌دانیم رخ خواهد داد. A پیشامدی است که می‌خواهیم به شرط آنکه B رخ دهد، احتمال رخدادش را بیابیم. وقتی B رخ می‌دهد که یکی از برآمدهایش رخ دهد. اگر برآمدی که رخ می‌دهد در $A\cap B$ باشد طبیعتاً A هم رخ می‌دهد. پس هر چه احتمال رخداد پیشامد $A\cap B$ بیشتر باشد احتمال رخداد پیشامد A به شرط B بیشتر است. لذا به‌طور شهودی $P(A|B)$ باید در رابطهٔ مستقیم با $P(A\cap B)$ باشد. این رابطه را به صورت،

(۱) $P(A|B)=KP(A\cap B)$

فرض می‌کنیم. در این برابری اگر به جای پیشامد A پیشامد B قرار بگیرد نتیجه می‌شود

$P(B|B)=KP(B\cap B)$

اما احتمال رخداد پیشامد B به شرط B برابر ۱ است زیرا B حتماً رخ می‌دهد و $B\cap B=B$، پس برابری بالا به صورت

$1=K.P(B)$

در می‌آید و داریم $K=\frac{1}{P(B)}$. اگر این مقدار را در (۱) قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

این رابطه را به طور شهودی به‌دست آوردیم. براساس همین رابطهٔ شهودی تعریف زیر را برای احتمال شرطی ارائه می‌دهیم.

تعریف احتمال شرطی : اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند وقتی $P(B)\neq 0$، احتمال پیشامد A به شرط اینکه پیشامد B رخ دهد به صورت

(۲) $$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

تعریف می‌شود. وقتی $P(B)=0$، احتمال شرطی قابل تعریف نیست.

تذکر : اگر فضای نمونه‌ای گسسته و هم‌شانس باشد می‌توانیم رابطهٔ احتمال شرطی را ساده کرده و به‌صورت $P(A\mid B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$ از آن استفاده کنیم.

مثال ۴ : سازندهٔ قطعات یدکی یک کارخانه از روی تجربه‌های گذشته می‌داند احتمال اینکه سفارشی به موقع برای ارسال آماده شود ۰/۹ است و احتمال اینکه سفارشی به موقع برای ارسال آماده و به موقع تحویل مشتری شود برابر ۰/۸ است. احتمال اینکه سفارشی به موقع تحویل شود به شرط آنکه به موقع ارسال شده باشد چقدر است؟

ابتدا قرار می‌دهیم :

پیشامد آماده بودن به موقع، برای ارسال =A

پیشامد تحویل به موقع سفارش، به مشتری =B

بنابر داده‌های مسأله، $P(A)=۰/۹$ و $P(A\cap B)=۰/۸$

زیرا پیشامد $A\cap B$ به معنای این است که سفارش هم به موقع آماده برای ارسال بوده و هم به‌موقع تحویل مشتری می‌شود. آنچه می‌خواهیم، $P(B|A)$ است، یعنی احتمال تحویل به موقع سفارش به مشتری به شرط آنکه به موقع ارسال شده باشد. بنابر تعریف احتمال شرطی

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{۰/۸}{۰/۹}=\frac{۸}{۹}$$

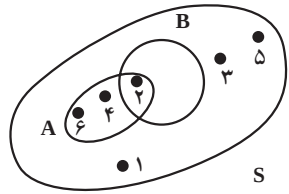
مثال ۵ : تاسی همگن را با چشم بسته انداخته‌ایم. برآمد حاصل را نگفته‌اند، ولی اعلام کرده‌اند که برآمد حاصل عددی زوج است. احتمال اینکه شمارهٔ ۲ ظاهر شده باشد چقدر است؟

قرار می‌دهیم :

پیشامد ظاهر شدن شمارهٔ زوج =A

پیشامد ظاهرشدن شمارهٔ ۲ =B

به شکل ۳ توجه کنید.



شکل ۳

$$\text{لذا}\qquad P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۳}\quad \text{یا}\quad P(B\mid A)=\frac{n(B\cap A)}{n(A)}=\frac{۱}{۳}$$

زیرا $P(A)=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۲}$. به‌عبارت‌دیگر می‌توانید تصور کنید که فضای نمونه‌ای $\{۲,۴,۶\}$ است که حتماً رخ داده است و لذا روی این فضا، رخ دادن ۲ دارای یک شانس از ۳ شانس است یعنی احتمال رخداد برآمد ۲ برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

۸ـ۳ـ قاعدهٔ ضرب احتمال

از تعریف

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad P(B) \neq 0$$

نتیجه می‌شود که $P(A \cap B) = P(B).\ P(A|B), \quad P(B) \neq 0$

این رابطه به **قاعدهٔ ضرب احتمال** موسوم است. به کمک این قاعده می‌توان احتمال رخداد هم‌زمان دو پیشامد را تعیین کرد.

مثال ۶ : جعبه‌ای محتوی ۱۲ لامپ است که می‌دانیم ۳ تای آنها معیوب‌اند. از این جعبه به تصادف ۱ لامپ برمی‌داریم. سپس مجدداً بدون جای‌گذاری لامپ اول، لامپ دیگری به تصادف برمی‌داریم. احتمال اینکه هر دو لامپ معیوب باشند چقدر است؟

ابتدا قرار می‌دهیم :

$A =$ پیشامد معیوب بودن لامپ اول

$B =$ پیشامد معیوب بودن لامپ دوم

بنابراین $A \cap B$ پیشامد معیوب بودن هر دو لامپ است. واضح است که :

$$P(A) = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$$

اگر لامپ اول معیوب باشد، لامپ دوم را از بین ۱۱ لامپ باقی مانده که ۲ تای آنها معیوب است برمی‌داریم پس :

$$P(B \mid A) = \frac{۲}{۱۱}$$

لذا از قاعدهٔ ضرب احتمال داریم :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B \mid A) = \frac{۱}{۴}.\frac{۲}{۱۱} = \frac{۱}{۲۲}$$

۸ـ۴ـ استقلال دو پیشامد

پیشامدهای A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند که احتمال آنها مثبت است. اگر آگاهی از رخداد پیشامد B در احتمال رخداد پیشامد A مؤثر نباشد A را **مستقل** از B می‌گویند. پس برای مستقل بودن A از B باید

$$P(A|B) = P(A)$$

ولی می‌دانیم که

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

از مقایسهٔ دو برابری داریم :

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

یا

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \quad (۳)$$

به سادگی می‌توان دید که اگر B از A مستقل باشد باز همین رابطه برقرار است. پس اگر A از B مستقل باشد یا B از A مستقل باشد باید رابطهٔ (۳) برقرار باشد. از طرفی با داشتن رابطهٔ (۳) می‌توان به رابطه‌های $P(B|A)=P(B)$ و $P(A|B)=P(A)$ رسید. (چرا؟) یعنی رابطهٔ (۳) شرط لازم و کافی برای استقلال A از B و B از A است. بر این اساس می‌گوییم A و B مستقل‌اند. پس :

تعریف : دو پیشامد A و B از یک فضای نمونه‌ای مستقل‌اند اگر و تنها اگر

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

اگر $P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$ می‌گویند **دو پیشامد وابسته‌اند.**

مثال ۷ : فرض کنید برای ریاست شرکتی ۴ داوطلب وجود دارند. احتمال انتخاب‌شدن همهٔ داوطلب‌ها یکی است. برآمدهای انتخاب افراد را به ترتیب با ۱، ۲، ۳ و ۴ نمایش می‌دهیم. نشان دهید که پیشامدهای $A=\{۱,۴\}$ و $B=\{۱,۳\}$ از هم مستقل‌اند.

فضای نمونه‌ای به صورت $S=\{۱,۲,۳,۴\}$ است. بنابر داده‌های مثال،

$$P(۱) = P(۲) = P(۳) = P(۴) = \frac{۱}{۴}$$

می‌خواهیم نشان دهیم که پیشامد A یعنی انتخاب فرد اول یا چهارم، از پیشامد B یعنی از انتخاب فرد اول یا سوم مستقل است. واضح است که

$$A \cap B = \{۱,۴\} \cap \{۱,۳\} = \{۱\}$$

پس :

$$P(A \cap B) = P(۱) = \frac{۱}{۴}$$

از طرفی :

$$P(A) = P(B) = \frac{۱}{۲}$$

در نتیجه :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{۱}{۴}$$

یعنی پیشامدهای A و B از هم مستقل‌اند.

توجه : اگر دو پیشامد یک فضای نمونه‌ای ناسازگار باشند یعنی برآمدی مشترک نداشته باشند و احتمال هر دو مثبت باشد آن دو پیشامد از هم مستقل نیستند. به عبارت دیگر ناسازگاری دو پیشامد به استقلال دو پیشامد ربطی ندارد. زیرا اگر $A\cap B=\phi$، آن‌گاه

$$P(A\cap B)=P(\phi)=0$$

و اگر A و B مستقل باشند باید

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

از مقایسهٔ دو برابری اخیر نتیجه می‌شود که

$$P(A).P(B)=0$$

یعنی دو پیشامد ناسازگار وقتی مستقل‌اند که $P(A)=0$ یا $P(B)=0$، و اگر این دو احتمال صفر نباشند A و B مستقل نیستند.

۸ـ۵ـ فرمول احتمال کل

اگر فضای نمونه‌ای S به n پیشامد $B_1, B_2, \ldots, B_n$ افراز شده باشد و اگر A پیشامدی از S باشد آن‌گاه به شرط $P(B_i)\neq 0$ ، $i=1,\ldots,n$ ،

$$(۴)\quad P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\cap B_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$$

زیرا همان‌طور که در سال پیش دیده‌ایم

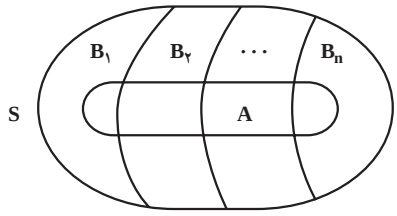
$$B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n=S$$

و هر دو پیشامد B_i و B_j وقتی $i\neq j$، ناسازگارند، یعنی $B_i\cap B_j=\phi$، $i\neq j$، بدیهی است که

$$A=A\cap S=A\cap(B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n)=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\ldots\cup(A\cap B_n)$$

اما همه پیشامدهای طرف دوم رابطه بالا دو به دو ناسازگارند، پس، طبق اصل موضوع ۳، داریم :

$$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+\ldots+P(A\cap B_n)$$



شکل ۴ــ افراز فضای نمونه‌ای

یا به صورت خلاصه، $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A\cap B_i)$. اما می‌دانیم که با توجه به تعریف احتمال شرطی و با فرض $P(B_i)\neq 0$، $P(A\cap B_i)=P(B_i)P(A|B_i)$، پس نتیجه می‌شود که $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\,P(A\mid B_i)$.

این فرمول به فرمول **احتمال کل** موسوم است.

مثال ۸ : سه ظرف همانند داریم. اولین ظرف شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۱۱ مهرهٔ سیاه است. دومین ظرف شامل ۳ مهرهٔ سفید و ۹ مهرهٔ سیاه است، و سومین ظرف تنها شامل مهره‌های سفید است. با چشم بسته یکی از سه ظرف را انتخاب و از آن مهره‌ای در می‌آوریم. احتمال اینکه مهره سفید باشد چقدر است؟

پیشامد استخراج مهرهٔ سفید را با A نشان می‌دهیم. می‌خواهیم $P(A)$را حساب کنیم پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم

$B_1=\{$ظرف اول انتخاب شود$\}$

$B_2=\{$ظرف دوم انتخاب شود$\}$

$B_3=\{$ظرف سوم انتخاب شود$\}$

بدیهی است $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}$. از طرفی

$$P(A\mid B_1)=\frac{5}{16}\ ,\ P(A\mid B_2)=\frac{1}{4}\ ,\ P(A\mid B_3)=1$$

حال با توجه به فرمول احتمال کل

$$P(A)=P(B_1).P(A|B_1)+P(B_2).P(A|B_2)+P(B_3).P(A|B_3)$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{5}{16}+\frac{1}{3}.\frac{1}{4}+\frac{1}{3}.1=\frac{25}{48}$$

۸ـ۶ـ قاعدهٔ بیز

(حالت ساده). در آزمایش‌های معمولی مواردی وجود دارند که برآمد نهایی آزمایش به آنچه در مراحل قبلی رخ می‌دهند بستگی دارد. برای توضیح این مطلب ابتدا به معرفی قاعدهٔ بیز می‌پردازیم.

دیدیم که اگر A و B دو پیشامد با احتمال مثبت از فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشند، آن‌گاه داریم

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

و

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

اگر از برابری دوم $P(A\cap B)$ یعنی $P(B|A).P(A)$ را در برابری اول قرار دهیم، نتیجه می‌شود که

$$(۵)\quad P(A\,|\,B)=\frac{P(A)}{P(B)}.P(B\,|\,A)$$

این رابطه را **قاعدهٔ بیز** می‌نامند. قاعدهٔ بیز در حالت کلی مفصل‌تر است. تامس‌بیز (۱۷۶۱ــ۱۷۰۲) کشیشی انگلیسی بود که حالت کلی‌تر این قاعده را ارائه داد. در مثال زیر یک مورد استفاده از قاعدهٔ بیز را می‌بینید.

مثال ۹ : وقتی یک مرکز مخابرهٔ تلگراف، پیامی را به مرکز دیگر می‌فرستد گاهی خطاهایی در انتقال صورت می‌گیرد. به ویژه وقتی از الفبای مورس برای مخابره استفاده می‌شود و کدهای «نقطه» و «خط» را به کار می‌برند[۱] این خطاها بدین صورت است که کدی که مرکز M به صورت نقطه می‌فرستد در مرکز N خط دریافت می‌شود و یا برعکس. به تجربه دریافته‌اند که به طور متوسط در هر متنی که مرکزی می‌فرستد نسبت فراوانی نقطه به فراوانی خط برابر ۳ به ۴ است. همچنین به طور تقریب می‌دانند که با احتمال $\frac{۱}{۸}$ نقطه‌ای که مرکز M می‌فرستد در مرکز N در اثر تداخل خطوط مخابره، اشتباهاً خط دریافت می‌شود و با همین احتمال خطی را که مرکز M می‌فرستد در مرکز N نقطه دریافت می‌شود. حال اگر در مرکز N کدی به صورت نقطه دریافت شده باشد چقدر احتمال دارد که این کد واقعاً به‌صورت نقطه فرستاده شده باشد؟

اگر در فرمول بیز قرار دهیم

$A=$ پیشامد فرستادن نقطه

$B=$ پیشامد دریافت نقطه

آن‌گاه فرمول

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A)}{P(B)}.P(B\,|\,A)$$

به صورت زیر درمی‌آید

$$\text{الف) }P(\text{فرستادن نقطه}|\text{دریافت نقطه})=\frac{P\ (\text{فرستادن نقطه})}{P\ (\text{دریافت نقطه})}.P(\text{دریافت نقطه}|\text{فرستادن نقطه})$$

آنچه می‌خواهیم به‌دست آوریم طرف اول رابطه است. زیرا در مرکز N نقطه‌ای دریافت شده است و می‌خواهیم احتمال اینکه این کد به صورت نقطه فرستاده شده باشد را بدانیم. پس سه احتمال طرف دوم را حساب می‌کنیم.

۱ــ این روزها، در ارتباط‌های الکترونیکی از کدهای ۰ و ۱ استفاده می‌کنند.

(ب) $P(A)=P(\text{فرستادن نقطه})=\frac{۳}{۷}$

(پ) $P(B|A)=P(\text{فرستادن نقطه} \mid \text{دریافت نقطه})=\frac{۷}{۸}$

محاسبهٔ سومین احتمال یعنی (دریافت نقطه)P کمی مفصل‌تر است. وقتی نقطه‌ای دریافت می‌شود باید فکر کنیم که نقطه‌ای فرستاده‌اند و یا خطی فرستاده‌اند که به خطا نقطه دریافت شده است. پس

(ت) $P(B)=P(\text{دریافت نقطه})=P(\text{فرستادن نقطه} \cap \text{دریافت نقطه}) + P(\text{فرستادن خط} \cap \text{دریافت نقطه})$

اما از فرمول حاصل‌ضرب احتمال می‌توانیم دو جملهٔ طرف دوم را حساب کنیم.

$P(\text{فرستادن نقطه} \cap \text{دریافت نقطه})=P(\text{فرستادن نقطه}).P(\text{فرستادن نقطه} \mid \text{دریافت نقطه})$

$$=\frac{۳}{۷}.\frac{۷}{۸}=\frac{۳}{۸}$$

$P(\text{فرستادن خط} \cap \text{دریافت نقطه})=P(\text{فرستادن خط}).P(\text{فرستادن خط} \mid \text{دریافت نقطه})$

می‌دانیم که طبق داده‌های مثال، $P(\text{فرستادن خط})=\frac{۴}{۷}$ و $P(\text{فرستادن خط} \mid \text{دریافت نقطه})=\frac{۱}{۸}$. پس :

$$P(\text{فرستادن خط} \cap \text{دریافت نقطه})=\frac{۴}{۷}.\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۱۴}$$

اگر مقادیر این دو جمله را در (ت) قرار دهیم

(ث) $P(B)=P(\text{دریافت نقطه})=\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۱۴}=\frac{۲۵}{۵۶}$

حال اگر (ب)، (پ) و (ث) را در (الف) قرار دهیم جواب مسأله به دست می‌آید :

$$P(\text{دریافت نقطه} \mid \text{فرستادن نقطه})=\frac{\frac{۳}{۷}}{\frac{۲۵}{۵۶}}.\frac{۷}{۸}=\frac{۲۱}{۲۵}$$

پس اگر در مرکز N نقطه‌ای دریافت شود احتمال $\frac{۲۱}{۲۵}$ وجود دارد که این کد واقعاً به صورت نقطه فرستاده شده باشد.

مثال ۱۰ : در جعبهٔ $A_۱$ سه مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی و در جعبهٔ $A_۲$ پنج مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی وجود دارد. یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب و ۱ مهره از آن خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم

که آبی است. چقدر احتمال دارد این مهره از جعبهٔ A_1 باشد؟

پیشامد اینکه مهره از A_1 باشد $=A$

پیشامد اینکه مهره آبی باشد $= B$

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)}{P(B)}\times P(B\mid A)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times(\frac{4}{7}+\frac{3}{8})}\times\frac{4}{7}=\frac{32}{53}$$

۸ـ۷ـ تمرین‌ها

۱ــ جعبه‌ای محتوی ۳ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه است. متوالیاً دو مهره به تصادف از جعبه بدون جای‌گذاری برمی‌داریم.

الف) اگر اولین مهره سیاه باشد احتمال اینکه دومین مهره هم سیاه باشد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه مهرهٔ دوم هم‌رنگ مهرهٔ اول باشد چقدر است؟

۲ــ برحسب تجربهٔ گذشته می‌دانیم احتمال اینکه رتبهٔ اول سال آخر رشتهٔ ریاضی دبیرستانی در مسابقهٔ ورودی دانشگاه قبول شود ۰/۹۵ است. با توجه به سوابق تحصیلی علی در این دبیرستان، احتمال اینکه او در سال آخر رشتهٔ ریاضی دبیرستان رتبهٔ اول شود ۰/۹ است. احتمال اینکه علی هم رتبهٔ اول شود و هم در مسابقهٔ ورودی دانشگاه قبول شود چقدر است؟

۳ــ سکه‌ای همگن را ۳ بار می‌اندازیم. اگر A پیشامد رخ‌دادن رو در دو پرتاب اول، B پیشامد رخ‌دادن پشت در پرتاب سوم و C پیشامد رخ‌دادن دقیقاً دو پشت در سه پرتاب باشد، نشان دهید که A و B مستقل‌اند ولی B و C مستقل نیستند.

۴ــ احتمال زنده‌ماندن در یک عمل پیوند عضو برابر ۰/۵ است. اگر بیماری پس از عمل زنده باشد احتمال اینکه بدن او در طول یک ماه پیوند را قبول نکند و بمیرد ۰/۲ است. احتمال زنده ماندن یک بیمار پیوندی پس از این دو مرحله چقدر است؟

۵ــ جعبه‌ای شامل ۱۲ لامپ است که ۳ تای آنها معیوب‌اند. اگر به تصادف ۳ لامپ متوالیاً بدون جای‌گذاری از جعبه برداریم احتمال اینکه هر ۳ لامپ معیوب باشند چقدر است؟

۶ــ یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۵ برآمد a، b، c، d و e است. به شرط آنکه $P(\{a,b,c\})=\frac{1}{2}$، $P(a)=\frac{1}{4}$ مطلوب است:

الف) محاسبهٔ $P(\{b,c,d\}\mid\{a,b,c\})$

ب) محاسبهٔ $P(\{a\}\mid\{a,b,c\})$

۷ــ ۴ مهره به شماره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ را در ظرفی ریخته‌ایم. اگر بخواهیم دو مهره به تصادف از ظرف بیرون بیاوریم شش امکان (۱,۲)، (۱,۳)، (۱,۴)، (۲,۳)، (۲,۴) و (۳,۴) وجود دارند. تفاضل هر دو شماره را R و مجموع آنها را S فرض می‌کنیم.

الف) احتمال پیشامدی را که برای آن R=۲، به‌دست آورید.

ب) احتمال پیشامدی را که برای آن S=۵، به‌دست آورید.

آیا این پیشامدها مستقل‌اند؟

پ) اگر در قسمت الف، R برابر یک باشد و در قسمت ب، S همچنان ۵ باشد پیشامدها مستقل‌اند؟

۸ــ در دو جعبه به ترتیب ۳۰ و ۲۰ عدد لامپ همانند وجود دارد. در جعبهٔ اول ۵ عدد لامپ معیوب و در جعبهٔ دوم ۳ عدد لامپ معیوب موجود است. از اولی ۱۰ لامپ و از دومی ۸ لامپ به تصادف انتخاب می‌کنیم و آنها را به صورت درهم در جعبه‌ای جدید قرار می‌دهیم. از این جعبه به تصادف لامپی برمی‌داریم. احتمال اینکه این لامپ معیوب باشد چقدر است؟

۹ــ دو ظرف داریم. اولی شامل ۱۰ مهرهٔ سفید و ۸ مهرهٔ سیاه است و دومی شامل ۱۲ مهرهٔ سفید و ۹ مهرهٔ سیاه است. از ظرف اول به تصادف مهره‌ای در می‌آوریم و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. آن‌گاه از ظرف دوم به تصادف مهره‌ای درمی‌آوریم. احتمال اینکه این مهره سفید باشد چقدر است؟

۱۰ــ تکمیل بنای راهی ممکن است به دلیل اعتصاب کارگران به تأخیر افتد. فرض کنید احتمال اینکه اعتصابی رخ دهد ۰/۶۵ باشد و احتمال اینکه اگر اعتصابی نباشد کار به موقع انجام شود ۰/۸ و احتمال اینکه اگر اعتصابی باشد کار به موقع انجام شود ۰/۳ باشد. احتمال اینکه کار بنای راه به موقع انجام شود چقدر است؟

۱۱ــ اگر A_1، A_2 و A_3 سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند ثابت کنید

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \le P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$

۱۲ــ اگر B_1، B_2 و B_3 سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S و با احتمال مثبت باشند، $P(B_3|B_2 \cap B_1)$ به معنای احتمال رخداد پیشامد B_3 به شرط رخداد هر دو پیشامد B_1 و B_2 است. با این تعریف ثابت کنید

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(B_3|B_2 \cap B_1)$$

۱۳ــ اگر B_1، B_2 و B_3 سه پیشامد دو به دو ناسازگار و با احتمال مثبت باشند که اجتماع آنها برابر با S است و اگر A پیشامدی از S باشد ثابت کنید.

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{3} P(A \mid B_i)P(B_i)}, \quad i = 1,2,3$$

فصل ۹

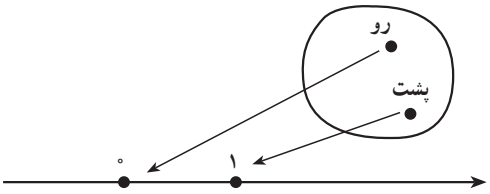
توزیع‌های گسستهٔ احتمال

۹ـ۱ـ متغیر تصادفی گسسته

به‌طوری که قبلاً گفتیم در هر آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای را مشخص می‌کنیم و به رخداد هر پیشامد آن عددی بین ۰ و ۱ به عنوان احتمال نسبت می‌دهیم. حال می‌خواهیم مجموعهٔ دیگری را به‌جای فضای نمونه‌ای قرار دهیم. ابتدا به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱ : وقتی سکه‌ای را می‌اندازیم، S دارای دو برآمد رو و پشت است. تابع X را بدین صورت تعریف می‌کنیم که حوزهٔ تعریف (دامنه) آن مجموعهٔ S با دو عضو رو و پشت و حوزهٔ مقادیر (برد) آن دو عدد ۰ و ۱ از محور اعداد حقیقی باشد. به عبارت دیگر

$$\begin{cases} X(\text{رو}) = 0 \\ X(\text{پشت}) = 1 \end{cases}$$



شکل ۱

چنین تابع X را متغیر تصادفی می‌گوییم که دو مقدار ۰ و ۱را اختیار می‌کند. چون احتمال رخداد برآمد رو $\frac{۱}{۲}$ است پس $X=0$ که نمایش سادهٔ $X(\text{رو}) = 0$ است و در واقع نمادی برای رخداد برآمد رو است، دارای همان احتمال $\frac{۱}{۲}$ و همین‌طور احتمال $X = 1$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است. در واقع به‌جای جدول را

جدول

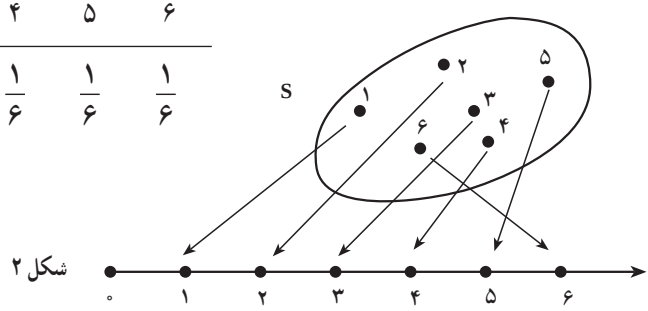
برآمد	رو	پشت
احتمال	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$

x_i	۰	۱
p_i	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$

قرار می‌دهیم. x_iها مقادیر X و p_iها احتمال‌های متناظر با آنها هستند. توجه کردید که فضای نمونه‌ای، {پشت، رو} = S، جای خود را به مجموعهٔ {۱ ، ۰} داده است.

مثال ۲ : در انداختن یک تاس همگن مجموعهٔ S دارای ۶ برآمد است. به هر برآمد S، احتمال $\frac{۱}{۶}$ را نسبت می‌دهیم. اگر X تابعی باشد که بر هر برآمد S عددی صحیح از ۱ تا ۶ را که همان اعداد حک شده بر وجوه تاس‌اند نسبت دهد، یعنی بر هر برآمد S نقطه‌ای از محور اعداد حقیقی را نسبت دهیم، متغیر تصادفی X با مقادیر صحیح ۱ تا ۶ به‌وجود می‌آید که احتمال هر مقدار آن، همان احتمال برآمد S متناظر با آن است (شکل ۲). پس جدول زیر برای ریزش تاس نتیجه می‌شود.

x_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
p_i	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$



شکل ۲

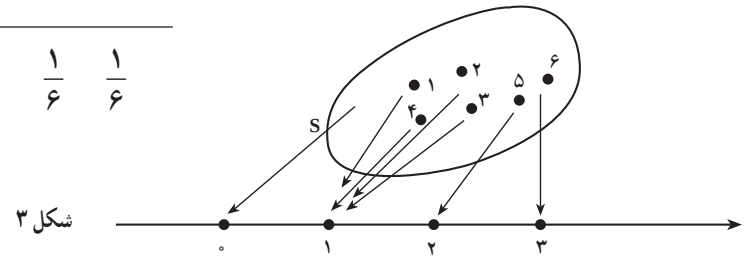
مثال ۳ : بر فضای نمونه‌ای S، در مثال قبل، می‌توان متغیر تصادفی دیگری را تعریف کرد. تابع X را تابعی بگیرید که شماره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ را با نقطهٔ به طول ۱ و شمارهٔ ۵ را با نقطهٔ به طول ۲، و شمارهٔ ۶ را با نقطهٔ به طول ۳ از محور اعداد حقیقی متناظر کند (مطابق شکل ۳).

در این صورت

$$\begin{cases} X(\text{شمارهٔ ۱}) = X(\text{شمارهٔ ۲}) = X(\text{شمارهٔ ۳}) = X(\text{شمارهٔ ۴}) = ۱ \\ X(\text{شمارهٔ ۵}) = ۲ \\ X(\text{شمارهٔ ۶}) = ۳ \end{cases}$$

بنابراین جدول احتمال زیر به‌دست می‌آید.

x_i	۱	۲	۳
p_i	$\frac{۴}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$



شکل ۳

توجه کنید که رخداد $(X = ۱)$ یعنی رخداد پیشامد {شمارهٔ ۴، شمارهٔ ۳، شمارهٔ ۲، شمارهٔ ۱}، و می‌دانیم این پیشامد دارای احتمال $\frac{۴}{۶}$ است. ▲

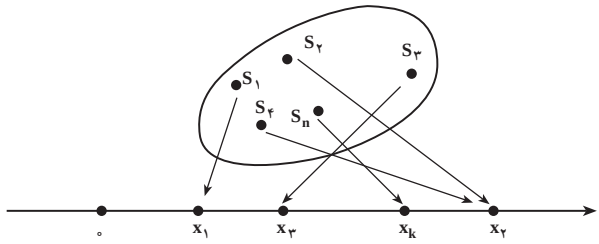
در متغیرهای تصادفی این سه مثال، تعداد مقادیری که هر متغیر اختیار می‌کرد متناهی بود. متغیر تصادفی را در احتمال مقدماتی به صورت زیر تعریف می‌کنند :

تعریف متغیر تصادفی[۱] تابعی از فضای نمونه‌ای S بر اعداد حقیقی است. این تابع را با X نشان می‌دهیم.

همان‌طور که در مثال‌های قبل دیدیم مجموعهٔ اعداد حقیقی یک فضای نمونه‌ای جدید است. اگر حوزهٔ مقادیر X متناهی یا شمارا نامتناهی باشد متغیر تصادفی X را **گسسته** می‌گوییم. برای درک مطلب فرض کنید فضای نمونه‌ای $S = \{s_۱ , \dots , s_n\}$ را داریم و احتمال‌هایی که به ترتیب به برآمدها S تخصیص داده‌ایم $p_۱, p_۲, \dots , p_n$ باشند. تابعی مانند X را درنظر می‌گیریم که حوزهٔ تعریف آن S و حوزهٔ مقادیر آن نقاطی از محور اعداد حقیقی است، به قسمی که هر برآمد یا هر پیشامد S، با نقطه‌ای از محور مزبور متناظر باشد. در این صورت مطابق شکل ۴،

$$X(s_۱) = x_۱, X(s_۲) = x_۲, X(s_۳) = x_۳, X(s_۴) = x_۲, \dots, X(s_n) = x_k$$

تابع X، متغیر تصادفی است و $x_۱$، $x_۲$، ... و x_k مقادیر آن هستند.



شکل ۴

۱ــ در واقع متغیر تصادفی، نه متغیر است و نه تصادفی است، بلکه یک تابع روی مدل احتمال است.

۹ـ۲ـ تابع جرم احتمال

تابع جرم احتمال یک متغیر تصادفی گسسته X ، تابعی است که به هریک از مقادیر X ، یعنی به هر یک از x_iها $i = ۱, ۲, \ldots, k$ احتمال $P(X = x_i) = p_i$ را نسبت می‌دهد. به صورت جدول، داریم :

x_i	$x_۱$	$x_۲$	$\cdots$	x_k
p_i	$p_۱$	$p_۲$	$\cdots$	p_k

بدیهی است که $p_۱ + p_۲ + \cdots + p_k = ۱$. اگر نقاط به طول $x_۱$، $x_۲$، ... و $x_۳$ را نقاطی مادّی تلقی کنیم می‌توانیم $p_۱$ ، $p_۲$، ... و p_k را به ترتیب جرم این نقاط بگیریم. به همین دلیل رابطهٔ

$$P(X = x_i) = p_i \quad \text{و} \quad i = ۱, ۲, \ldots, n$$

را **تابع جرم احتمال** یا صرفاً **تابع احتمال** متغیر تصادفی X می‌نامند. جدول بالا نشان می‌دهد که مقدار کل احتمال ۱ به چه ترتیب بین مقادیر متغیر X **توزیع** شده است و آن را جدول توزیع احتمال می‌گویند. تعداد مقادیری که X پذیرفته است متناهی هست. گاهی تعداد مقادیری که X اختیار می‌کند نامتناهی ولی شماراست. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴ : جامعهٔ کودکان زیر ده سال را درنظر بگیرید. هر کودک را برای اینکه ببینید به بیماری هموفیلی مبتلاست یا نه آزمایش می‌کنند. فرض کنید متغیر تصادفی را به صورت زیر تعریف کنیم :

$X =$ تعداد کودکانی که باید آزمایش شوند تا اولین مورد هموفیلی ظاهر شود

ببینیم که X چه مقادیری را انتخاب می‌کند. ممکن است اولین نفری که در جامعهٔ مزبور آزمایش می‌شود به هموفیلی مبتلا باشد پس در این صورت $X = ۱$. ممکن است اولین نفر مبتلا نبوده، دومین نفر مبتلا باشد پس $X = ۲$ و نظایر آن. می‌توانید مجسم کنید که ممکن است یک میلیون کودک آزمایش شوند و کودکی مبتلا پیدا نشود یعنی X می‌تواند بیش از یک میلیون هم باشد. به همین ترتیب مقادیری که X می‌تواند اختیار کند شمارا بوده ولی نامتناهی است. در این حالت داریم

$$P(X = x_i) = p_i \quad \text{و} \quad i = ۱, ۲, \ldots$$

بدیهی است، $\sum_{i=۱}^{\infty} p_i = ۱$. یعنی باید احتمال ۱ را بین بی‌نهایت مقدار x_i توزیع کرد. ▲

تذکر : هر تابع احتمال مربوط به متغیر تصادفی گسسته X دارای ویژگی‌های زیر است :

۱ـ $\quad ۰ \le P(X = x_i) \le ۱ \quad , \quad i = ۱, ۲, \ldots$

$$\sum_i P(X = x_i) = ۱$$ ـ۲

برعکس اگر تابعی به صورت $P(X = x_i) = p_i$, $i = ۱, ۲, \ldots$ دارای دو ویژگی بالا باشد یک تابع احتمال است.

مثال ۵ : سکه‌ای را متوالیاً می‌اندازیم. سکه منصف نیست. تعداد دفعاتی که سکه را می‌اندازیم تا برای اولین بار رو ظاهر شود متغیر تصادفی X می‌نامیم.

الف) X چه مقادیری اختیار می‌کند؟ ب) احتمال رخداد هر مقدار X چیست؟

الف) ممکن است در بار اول رو ظاهر شود پس $X = ۱$. اگر بار اول رو ظاهر نشود ولی بار دوم رو بیاید $X = ۲$. به همین ترتیب ممکن است تا پرتاب شمارهٔ ۳، ۴، ۵، ...، ۱۰۰۰، ... برای بار اول رو ظاهر نشود، پس X همهٔ مقادیر صحیح طبیعی را اختیار می‌کند.

ب) فرض می‌کنیم در پرتاب i ام برای اولین بار رو بیاید می‌خواهیم احتمال این پیشامد یعنی $P(X = i)$ را به‌دست آوریم. اگر در یک بار انداختن سکه، H معرف برآمد رو و T معرف برآمد پشت باشد، پیشامد

$$\underbrace{TT\ldots TH}_{\text{بار } (i-۱)}$$

بدین معناست که $i-۱$ بار متوالیاً پشت بیاید و در i امین بار رو ظاهر شود. باید احتمال این پیشامد را که مستلزم رخداد i برآمد است به‌دست آوریم. سکه منصف نیست یعنی احتمال رو آمدن و احتمال پشت آمدن $\frac{۱}{۲}$ نیست. فرض می‌کنیم احتمال ظاهر شدن رو p و احتمال ظاهر شدن پشت q باشد. واضح است که $p + q = ۱$. هر انداختن سکه از انداختن‌های دیگر مستقل است. حال قبل از محاسبهٔ احتمال موردنظر متذکر می‌شویم که اگر برای چند آزمایش تصادفی جدا از هم فضاهای نمونه‌ای و مدل‌های احتمال را بسازیم و اگر $A_۱$ پیشامدی از فضای اول، $A_۲$ پیشامدی از فضای دوم، ... باشد آن‌گاه شرط استقلال $A_۱$، $A_۲$، ... از هم را به‌صورت زیر بیان می‌کنند.

$$P(A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots) = P(A_۱).P(A_۲)\ldots$$

پس، اگر برای هر انداختن سکه یک فضای نمونه‌ای درنظر بگیریم، آن‌گاه مثلاً

$$P(TT) = q.q = q^۲$$

به همین ترتیب :

$$P(\underbrace{TT\ldots T}_{\text{بار } (i-۱)}) = \underbrace{q.q\ldots q}_{\text{بار } (i-۱)} = q^{i-۱}$$

و بالاخره :

$$P(\underbrace{TT\ldots,TH}_{\text{بار}(i-1)}) = q^{i-1}.p$$

پس :

$$P(X = i) = q^{i-1}.p$$

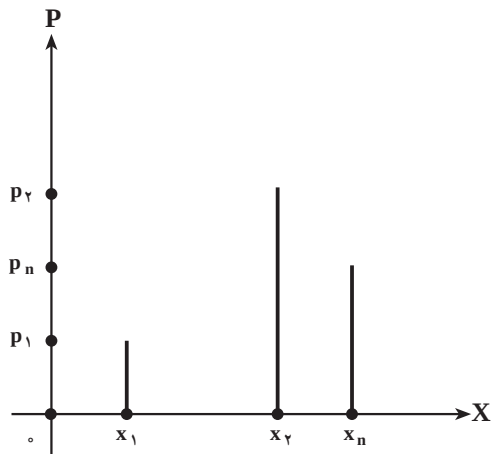
اگر i را برابر ۱، ۲، ... بگیریم احتمال‌های متناظر با مقادیر X به‌دست می‌آیند. جدول زیر را می‌توانیم بنویسیم

x_i	۱	۲	۳	...	i	...
p_i	p	qp	q^2p	...	$q^{i-1}p$	...

رابطهٔ $P(X = i) = q^{i-1}p$، ...، $i = ۱, ۲$ تابع احتمال متغیر تصادفی X است. ▲

شما می‌توانید به میل خود جدولی تشکیل دهید که سطر اول مقادیر متغیر تصادفی X باشد (هر مقداری که مایل هستید به آن نسبت دهید) و سطر دوم آن احتمال‌هایی دلخواه باشند، فقط لازم است که مجموع احتمال‌ها ۱ باشد. اگر هر مقداری را که متغیر تصادفی X اختیار می‌کند طول یک نقطه، و احتمال متناظر با آن را عرض آن نقطه نسبت به دو محور متعامد بگیریم نموداری برای احتمال X به‌دست می‌آوریم.

لازم نیست که واحد طول را روی دو محور یکی بگیریم. عرض‌های نقاط، مقادیر p_1، p_2، ... و p_n هستند که همه بین صفر و یک‌اند. طول‌های نقاط، مقادیر x_1، x_2، ...، x_n هستند (مطابق شکل ۵).



شکل ۵ ــ نمودار میله‌ای

در واقع می‌توان طول میله‌های بالای x_1، x_2، ...، x_n را احتمال‌های متناظر با آنها گرفت. این نمودار را نمودار میله‌ای می‌نامند. برای هر تابع احتمال گسسته می‌توانید چنین نموداری رسم کنید.

همان‌طور که گفتیم می‌توانیم جدول‌های توزیع احتمال دلخواه فراوانی بنویسیم اما آن جدول‌ها و مدل‌هایی مورد توجه‌اند که ارزش کاربردی داشته باشند. ذیلاً چند توزیع احتمال مهم را ذکر می‌کنیم.

۹-۳- توزیع برنولی

وقتی لامپی را امتحان می‌کنیم ممکن است سالم باشد یا معیوب. به‌طور کلی وقتی کالایی را در موقع خرید امتحان می‌کنیم یا سالم است و یا ناقص. وقتی از فردی در مورد اعتیادش به سیگار سؤال می‌کنیم یا سیگاری است یا نیست. از این پدیده‌های دو حالتی زیادند. اگر سالم بودن کالا یا سیگاری بودن فرد را با $X = ۱$ و ناقص بودن کالا و سیگاری نبودن فرد را با $X = ۰$ نشان دهیم متغیری تصادفی داریم که دو مقدار ۰ و ۱ را اختیار می‌کند. این آزمایش‌های دو حالته را امتحان می‌نامیم و فضای نمونه‌ای هر امتحان دو برآمد دارد. ریختن سکه هم یک امتحان است.

اگر احتمال سالم بودن کالا یا سیگاری بودن فرد را p بگیریم احتمال ناقص بودن کالا و یا سیگاری نبودن فرد برابر q است. پس جدول توزیع احتمال زیر را برای هر امتحان داریم

x_i	۰	۱
p_i	q	p

$p + q = ۱$

مرسوم است که دو برآمد امتحان را پیروزی و شکست می‌نامند. برآمدی که مورد توجه است پیروزی نامیده می‌شود. مثلاً ممکن است لامپ‌ها را یک به یک برای یافتن لامپی معیوب امتحان کنیم، در این صورت یافتن لامپ معیوب یک پیروزی است. این جدول را می‌توان به صورت رابطهٔ زیر هم خلاصه کرد.

$$P(X = i) = \begin{cases} p^i q^{۱-i} & i = ۰,۱ \\ ۰ & \text{به ازای سایر مقادیر } i \end{cases}$$

به‌طورکلی اگر پیشامد A از یک فضای نمونه‌ای را درنظر بگیریم و رخداد A را پیروزی گرفته، احتمال پیروزی را p فرض کنیم، آن‌گاه متغیر تصادفی X که به صورت

$$\begin{cases} X = ۱ & \text{اگر A رخ دهد} \\ X = ۰ & \text{اگر A رخ ندهد} \end{cases}$$

تعریف می‌شود دارای تابع احتمال بالاست.

متغیر تصادفی X را که تنها دو مقدار ۰ و یک را می‌پذیرد متغیر برنولی و توزیع احتمال آن را **توزیع برنولی** می‌گویند.

۹ـ۴ـ تمرین‌ها

۱ــ پنج سکهٔ منصف را باهم پرتاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه‌ای را بنویسید.

ب) یک متغیر تصادفی تعریف کنید که تعداد «شیرها» را نشان دهد.

پ) تابع احتمال متغیر تصادفی بند ب را بنویسید.

۲ــ دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X را مجموع دو عدد ظاهر شده در روی دو تاس تعریف می‌کنیم.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید.

ب) تابع احتمال X را به‌دست آورید.

پ) احتمال اینکه $X \leq ۷$ باشد چقدر است؟

۳ــ یک تاس پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$X = \begin{cases} ۱ & \text{اگر عدد فرد بیاید} \\ ۲ & \text{اگر عدد زوج بیاید} \end{cases}$$

الف) تابع احتمال X را بیابید.

ب) آیا X یک متغیر تصادفی برنولی است؟

۴ــ سکه‌ای منصف را آن‌قدر پرتاب می‌کنیم تا «شیر» بیاید.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید.

ب) یک متغیر تصادفی تعریف کنید که براساس آن بتوان احتمال شیر آمدن را محاسبه کرد.

پ) احتمال اینکه اولین بار در آزمایش صدم، شیر ظاهر شود چقدر است؟

۵ــ توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$P(X = i) = \frac{i}{i^۲ + ۳} \qquad i = ۱, ۲, ۳$$

$$P(X = j) = \frac{۱}{۱۴} \qquad j = ۴, ۵, ۶$$

الف) جدول توزیع X را بسازید.

ب) نمودار توزیع را رسم کنید.

پ) مقدار $P(X \geq ۳)$ را حساب کنید.

۶ــ احتمال اینکه فردی مسن مبتلا به دیابت باشد $\frac{۱}{۸۰}$ است. در روستایی مردان مسن را تحت آزمایش قرار می‌دهند. اگر متغیر تصادفی X را برابر با تعداد افرادی تعریف کنیم که به ترتیب آزمایش می‌شوند تا اولین فرد دیابتی مشخص شود، تابع احتمال متغیر X را به‌دست آورید. احتمال اینکه دومین نفر دیابتی باشد چقدر است؟

۷ــ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی ۳ برآمد دارد. اگر احتمال‌های متناظر با ۳ برآمد به‌ترتیب $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۶}$ باشد، متغیری تصادفی روی این فضا تعریف کنید.

۸ــ نشان دهید که تابع زیر یک تابع احتمال است.

$$P(X=x)=\frac{۱}{n^{۲}}\left[۲(n-x)+۱\right] \quad , \quad x=۱,۲,...,n$$

مراجع

1 – S. Ross, A First Course in Probability, Macmilan 1976.

۲ــ جان فروند و رانلد والپول، آمار ریاضی ترجمهٔ علی عمیدی و محمدقاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ سوم ۱۳۷۳.

۳ــ جواد بهبودیان، آمار و احتمال مقدماتی، انتشارات آستان قدس ۱۳۶۸.

۴ــ علی عمیدی، احتمال و کاربرد آن، انتشارات دانشگاه پیام نور ۱۳۷۴.

معلّمان محترم، صاحب‌نظران، دانش‌آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظرات اصلاحی خود را دربارهٔ مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۴۸۷۴/۱۵۸۷۵ـ گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار (Email) talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطهٔ نظری