

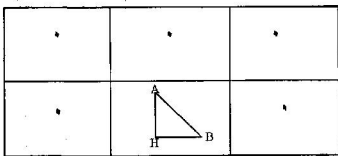
باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهائی درس: جبر و احتمال		رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۳۰ : ۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۱ / ۱۰ / ۱۳۸۷		
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نیم سال اول (دی ماه) سال تحصیلی ۸۸-۱۳۸۷		اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی		
ردیف	سؤالات			
۱	با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید ۳ برابر مربع یک عدد فرد منهای ۳، مضرب ۱۲ است.			
۲	به روش استقراء ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم: $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$			
۳	آیا مجموع دو عدد گنگ، همواره عددی گنگ است؟ چرا؟			
۴	اگر $\sqrt{5}$ و $\sqrt{7}$ دو عدد گنگ باشند، ثابت کنید $(2\sqrt{5} + 3\sqrt{7})$ نیز عددی گنگ است. (برهان خلف)			
۵	هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ متر انتخاب می کنیم، ثابت کنید حد اقل ۲ نقطه از آنها فاصله ای کمتر از $2\sqrt{2}$ متر را دارند.			
۶	ثابت کنید مجموعه تهی زیر مجموعه ی همه مجموعه ها است.			
۷	با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها ثابت کنید: $A - (B \cup C) = (A - C) - B$			
۸	اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x = 8\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 4\}$ مفروض باشند، مجموعه $B \times A - A^2$ را مشخص کنید.			
۹	نمودار رابطه $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x \geq y^2, y \geq x^2\}$ را رسم کنید.			
۱۰	فرض کنیم $A = \{1, 2, 3\}$ و رابطه R در A^2 به صورت زیر تعریف شده باشد: $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ الف) ثابت کنید R یک رابطه هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[(3, 1)]$ را بیابید.			
۱۱	یک تاس سالم را دو بار می اندازیم، مطلوب است تعیین: الف) پیشامد A آنکه عدد ظاهر شده در پرتاب اول ۳ باشد. ب) پیشامد B آنکه عدد ظاهر شده در هر دو پرتاب عددی اول باشد. ج) پیشامد C آنکه عدد ظاهر شده در هر دو پرتاب یکسان باشد. د) پیشامد آنکه C رخ دهد ولی B رخ ندهد.			
«ادامه‌ی سؤالات در صفحه‌ی دوم»				

باسمه تعالی

ردیف	سؤالات	نمره
سوالات امتحان نهائی درس: جبر و احتمال رشته: ریاضی فیزیک ساعت شروع: ۳۰ : ۱۰ صبح مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه		
سال سوم آموزش متوسطه تاریخ امتحان: ۱۱ / ۱۰ / ۱۳۸۷		
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نیم سال اول (دی ماه) سال تحصیلی ۸۸-۱۳۸۷ اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی		
ردیف	سؤالات	نمره
۱۲	یک جعبه محتوی ۱۰ لیوان می باشد که ۴ عدد آنها معیوب است ، از این جعبه ۵ لیوان به تصادف برمی داریم ، مطلوب است محاسبه : الف) احتمال آنکه ۲ لیوان معیوب باشد. ب) احتمال آنکه تمام لیوان ها سالم باشند.	۱/۵
۱۳	در یک کلاس ، (احمد و علی و بهرام) داوطلب انتخاب نمایندگی کلاس می باشند ، اگر احتمال انتخاب علی دو برابر احمد و احتمال انتخاب بهرام سه برابر علی باشد ، احتمال انتخاب هریک را بیابید.	۱/۵
۱۴	در یک آزمون ۱۵ سوالی که سوالات دارای پاسخ (بلی - خیر) می باشند ، مطلوب است احتمال آنکه فردی به ۳ سوال پاسخ (بلی) داده باشد .	۰/۷۵
۱۵	نقطه‌ای به تصادف از فضای نمونه ای $S = \{(x, y) x, y \in \mathbb{R}, 1 \leq x + y \leq 3\}$ انتخاب می کنیم ، مطلوب است احتمال آنکه $x \leq 1$ و $y \leq 1$ باشد .	۱/۷۵
۱۶	اگر $p(A') = \frac{1}{3}$ و $P(B) = 2p(A \cup B)$ و $P(A' \cup B') = \frac{1}{4}$ باشد ، مطلوب است محاسبه $p(B)$.	۱/۵
	«موفق باشید»	۲۰
	جمع نمره	

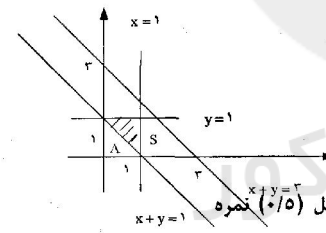
باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهائی درس: جبر و احتمال		رشته: ریاضی فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۸۷ / ۱۰ / ۱۱
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نیم سال اول (دی ماه) سال تحصیلی ۱۳۸۷-۸۸		اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی
ردیف	راهنمای تصحیح	
۱	<p>حکم: $(۰/۵)$ $۳(۲k+۱)^۲ - ۳ = ۱۲k'$</p> <p>$x = ۲k+۱ \rightarrow$ عدد فرد</p> <p>$۳(۴k^۲ + ۴k+۱) - ۳ = ۱۲k^۲ + ۱۲k = ۱۲(k^۲ + k) = ۱۲k'$ $(۰/۵)$</p>	۱
۱/۷۵	<p>$p(۱): 1 - \frac{1}{۴} = \frac{1+۲}{۲+۲} \Rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۴}$ $(۰/۲۵)$</p> <p>فرض استقراء $(۰/۲۵)$ $p(k): \left(1 - \frac{1}{۴}\right)\left(1 - \frac{1}{۹}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(k+۱)^۲}\right) = \frac{k+۲}{۲k+۲}$</p> <p>حکم استقراء $(۰/۲۵)$ $p(k+۱): \left(1 - \frac{1}{۴}\right)\left(1 - \frac{1}{۹}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(k+۱)^۲}\right)\left(1 - \frac{1}{(k+۲)^۲}\right) = \frac{k+۳}{۲k+۴}$</p> <p>$p(k+۱): \left(\frac{k+۲}{۲k+۲}\right)\left(1 - \frac{1}{(k+۲)^۲}\right) = \left(\frac{k+۲}{۲k+۲}\right)\left(\frac{(k+۲)^۲ - 1}{(k+۲)^۲}\right) = \frac{k^۲ + ۴k + ۳}{(۲k+۲)(k+۲)}$</p> <p>$\frac{(k+۳)(k+۱)}{۲(k+۱)(k+۲)} = \frac{k+۳}{۲k+۴}$ (۱ نمره)</p>	۲
۰/۵	<p>$a = \sqrt{۲}$, $b = 1 - \sqrt{۲} \Rightarrow a+b = 1 \in \mathbb{Q}$ $(۰/۲۵)$</p>	۳ خیر - مثال نقض
۱	<p>فرض خلف $(۰/۲۵)$ $۲\sqrt{۵} + ۳\sqrt{۷} \notin \mathbb{Q}' \Rightarrow ۲\sqrt{۵} + ۳\sqrt{۷} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow ۲\sqrt{۵} = \frac{a}{b} - ۳\sqrt{۷} \Rightarrow$</p> <p>$۲۰ = \frac{a^۲}{b^۲} + ۶۳ - ۶\sqrt{۷} \frac{a}{b} \Rightarrow ۶\sqrt{۷} \frac{a}{b} = \frac{a^۲}{b^۲} + ۴۳$ $(۰/۲۵)$</p> <p>طرف راست رابطه مجموع دو عدد گویا عددی گویا است و طرف چپ رابطه عددی گنگ است. پس به تناقض رسیده و همان حکم اولیه درست است. $(۰/۲۵)$</p>	۴
۱/۲۵	<p>تعداد لانه‌ها $(۰/۲۵)$ $= ۶$</p> <p>تعداد کیبوترها $= ۷$</p> <p>بر طبق اصل لانه کیبوتری حد اقل ۳ نقطه درون یک مربع قرار می‌گیرند $(۰/۲۵)$</p>  <p>شکل $(۰/۲۵)$ $AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ < ۲^۲ + ۲^۲ \Rightarrow AB^۲ < ۸ \Rightarrow AB < ۲\sqrt{۲}$ $(۰/۵)$</p>	۵
« ادامه ی سوالات در صفحه ی دوم »		

باسمه تعالی

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
رشته: ریاضی فیزیک سال سوم آموزش متوسطه دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نیم سال اول (دی ماه) سال تحصیلی ۱۳۸۷-۸۸ اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی		
۶	پس x ای عضو تهی هست که عضو A نیست. و این تناقض با تعریف مجموعه تهی (که خالی است)، دارد. (۰/۵)	۰/۵
۷	$A - (B \cup C) = A \cap (B \cup C)' = A \cap (B' \cap C') = (A \cap C') \cap B' = (A - C) - B$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)	۱
۸	$A = \{-۴, ۲\}$, $B = \{۱, ۲\}$ $B \times A = \{(۱, -۴), (۱, ۲), (۲, -۴), (۲, ۲)\}$ (۰/۵) $A^{\vee} = A \times A = \{(-۴, -۴), (-۴, ۲), (۲, -۴), (۲, ۲)\}$ (۰/۵) $B \times A - A^{\vee} = \{(۱, -۴), (۱, ۲)\}$ (۰/۵)	۱/۵
۹	کشیدن هر نمودار (۰/۲۵) و تعیین قسمت مشترک (۰/۵)	۱
۱۰	(۰/۲۵) رابطه‌ی بازتابی $(a, b) R(a, b) \Rightarrow a^{\vee} + b^{\vee} = a^{\vee} + b^{\vee}$ $(a, b) R(c, d) \Rightarrow (c, d) R(a, b)$ رابطه‌ی تقارنی (۰/۲۵) $a^{\vee} + b^{\vee} = c^{\vee} + d^{\vee} \Rightarrow c^{\vee} + d^{\vee} = a^{\vee} + b^{\vee} \Rightarrow (c, d) R(a, b)$ $(a, b) R(c, d), (c, d) R(e, f) \Rightarrow (a, b) R(e, f)$ رابطه‌ی تعدی (۰/۵) $a^{\vee} + b^{\vee} = c^{\vee} + d^{\vee}$ $c^{\vee} + d^{\vee} = e^{\vee} + f^{\vee} \Rightarrow a^{\vee} + b^{\vee} = e^{\vee} + f^{\vee} \Rightarrow (a, b) R(e, f)$ هر سه خاصیت را دارد پس هم ارزی است. $A^{\vee} = \{(۱, ۱), (۱, ۲), (۱, ۳), (۲, ۱), (۲, ۲), (۲, ۳), (۳, ۱), (۳, ۲), (۳, ۳)\}$ $[(۳, ۱)] = \{(x, y) (x, y) R(۳, ۱)\} \Rightarrow x^{\vee} + y^{\vee} = ۹ + ۱ = ۱۰$ $[(۳, ۱)] = \{(۳, ۱), (۱, ۳)\}$ (۰/۵)	۱/۵
« ادامه‌ی سوالات در صفحه‌ی سوم »		

باسمه تعالی

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهائی درس: جبر و احتمال رشته: ریاضی فیزیک سال سوم آموزش متوسطه تاریخ امتحان: ۱۱ / ۱۰ / ۱۳۸۷ دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نیم سال اول (دی ماه) سال تحصیلی ۸۸-۱۳۸۷ اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی		
۱۱	$A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$ (۰/۵) $B = \{(2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 5)\}$ (۰/۵) $C = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$ (۰/۵) $C - B = \{(1, 1), (4, 4), (6, 6)\}$ (۰/۵)	۲
۱۲	۶ لیوان سالم و ۴ لیوان معیوب $n(S) = \binom{10}{5} = 252$ (۰/۵) الف) $n(A) = \binom{6}{3} \times \binom{4}{2} = 120$ (۰/۲۵) $\Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{120}{252} = \frac{10}{21}$ (۰/۲۵) ب) $n(B) = \binom{6}{5} = 6$ (۰/۲۵) $\Rightarrow p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{252} = \frac{1}{42}$ (۰/۲۵)	۱/۵
۱۳	$p(\text{احمد}) + p(\text{علی}) + p(\text{بهرام}) = 1 \rightarrow 2x + 4x + x = 1 \rightarrow 7x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{7}$ (۰/۲۵) $p(\text{علی}) = 2p(\text{احمد}) = 2x$ $p(\text{بهرام}) = 4p(\text{علی}) = 4x$ $p(\text{احمد}) = x = \frac{1}{7}$ (۰/۲۵) $p(\text{علی}) = \frac{2}{7}$ (۰/۲۵) $p(\text{بهرام}) = \frac{4}{7}$ (۰/۲۵)	۱/۵
۱۴	$p(A) = \frac{\binom{15}{3}}{15}$ (۰/۷۵)	۰/۷۵
۱۵	$a(S) =$ بی نهایت (۰/۵) $a(A) = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$ (۰/۲۵) $P(A) = \frac{a(A)}{a(S)} = 0$ (۰/۵)	۱/۷۵
 <p>شکل (۰/۵) نمره</p>		
۱۶	$p(A' \cup B') = p(A \cap B)' = 1 - p(A \cap B) = \frac{1}{4} \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{3}{4}$ (۰/۲۵) $p(A') = \frac{1}{4} \Rightarrow p(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (۰/۲۵) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow \frac{1}{4} = p(B) - \frac{3}{4} \Rightarrow p(B) = \frac{1}{4}$ (۰/۲۵)	۱/۵
۲۰	جمع نمره	