

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۳۰:۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه			
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نیم سال اول (دی ماه) سال تحصیلی ۸۹-۱۳۸۸		اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	با استفاده از اصل استقراء ریاضی، درستی رابطه‌ی زیر را برای هر عدد طبیعی $n$ ثابت کنید: $(1 + \sqrt{3})^n \geq 1 + n\sqrt{3}$	۱/۵
۲	با برهان خلف، ثابت کنید که عدد $2\sqrt{3}$ گنگ است.	۱
۳	با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی هر یک را بررسی کنید: الف) برای هر عدد حقیقی $a$ ، داریم $a^2 < a^3$ ب) مقدار عبارت $2^n + 1$ برای هر عدد طبیعی $n$ ، همیشه عددی اول است. ج) حاصلضرب هر دو عدد به صورت $6k + 5$ به صورت $6k'' + 1$ می باشد.	۲
۴	۲۲ عدد طبیعی دلخواه را بر ۶ تقسیم می کنیم، نشان دهید حداقل ۴ عدد از آن‌ها باقیمانده مساوی را خواهند داشت.	۱
۵	با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها درستی رابطه‌های زیر را ثابت کنید: الف) $B \subseteq A$ ، $B \subseteq A' \Rightarrow B = \emptyset$ ب) $(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$	۱/۵
۶	$x, y$ را طوری تعیین کنید که دو زوج مرتب $(x^2, x+y)$ و $(y^2, x^2 - y^2)$ با یکدیگر مساوی باشند.	۱
۷	مجموعه‌های $A = \{x \in \mathbb{Z}, x \geq -1, 2^x \leq 4\}$ و $B = \{y \in \mathbb{N}, y^2 \leq 4\}$ را در نظر گرفته، اعضای مجموعه $A \times B - B^2$ را به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.	۱/۵
۸	رابطه‌ی $R$ روی $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر تعریف شده است: $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow x^3 - t^3 = z^3 - y^3$ الف) ثابت کنید $R$ یک رابطه هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[(-2, 3)]$ را مشخص کنید.	۱/۵
۹	هر یک از اعداد دو رقمی متشکل از ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ (بدون تکرار ارقام) را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یکی را به تصادف بر می داریم، مطلوبست تعیین: الف) فضای نمونه‌ای این تجربه تصادفی. ب) پیشامد $A$ که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد. ج) پیشامد $B$ که در آن عدد روی کارت اول باشد. د) پیشامد $A \cap B'$ .	۲
« ادامه‌ی سؤالات در صفحه‌ی دوم »		

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۱۰:۳۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه			
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نیم سال اول (دی ماه) سال تحصیلی ۸۹-۱۳۸۸		اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱۰	اگر $S = \{a, b, c, d\}$ یک فضای نمونه ای باشد، در صورتی که داشته باشیم: $p(a) = 2p(b)$ و $p(c) = p(d) = \frac{1}{4}$ ، مطلوبست محاسبه‌ی $p(a')$ ، $p(b')$	۱/۷۵
۱۱	در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۶ مهره قرمز موجود است، از این کیسه دو مهره به تصادف و هم زمان خارج می کنیم، مطلوبست احتمال آن که: الف) هر دو مهره قرمز باشند. ب) هر دو مهره هم رنگ باشند.	۱/۵
۱۲	مطالب زیر مربوط به دو روز بارش برف می باشد، نمودار درختی را رسم کرده و جای خالی را با توجه به آن کامل کنید. تعداد روزهای باریدن برف تعداد امکان های مختلف احتمال	۱
۱۳	نقطه ای به تصادف داخل مستطیلی به طول ۷ و عرض ۴ در نظر می گیریم، مطلوبست احتمال این که فاصله‌ی این نقطه از هر رأس بیشتر از ۱ باشد.	۱/۵
۱۴	اگر $A, B$ دو پیشامد باشند به طوری که $A \subseteq B$ ، ثابت کنید: الف) $p(A) \leq p(B)$ ب) $p(B - A) = p(B) - p(A)$	۱/۲۵
۲۰	جمع نمره « موفق باشید »	۲۰

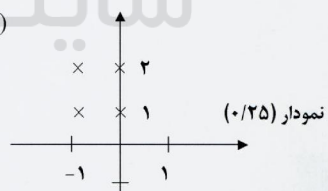
باسمه تعالی

رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۸۸ / ۱۰ / ۱۳	سال سوم آموزش متوسطه
اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی http://aee.medu.ir	دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نیم سال اول (دی ماه) سال تحصیلی ۸۹-۱۳۸۸

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	$p(1) = 1 + \sqrt{3} \geq 1 + \sqrt{3} \quad (0/25)$ <p>فرض <math>p(k) = (1 + \sqrt{3})^k \geq 1 + k\sqrt{3} \quad (0/25)</math></p> <p>حکم <math>p(k+1) = (1 + \sqrt{3})^{k+1} \geq 1 + (k+1)\sqrt{3} \quad (0/25)</math></p> <p>(0/25) طرفین فرض را در <math>1 + \sqrt{3}</math> ضرب می کنیم.</p> $(1 + \sqrt{3})^{k+1} \geq (1 + k\sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) \stackrel{?}{\geq} 1 + (k+1)\sqrt{3} \quad (0/25)$ $\begin{aligned} // &\geq 1 + \sqrt{3} + 3k + k\sqrt{3} \geq 1 + k\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ // &\geq 3k \geq 0. \quad (0/25) \end{aligned}$ <p>گزاره همواره درست است پس حکم هم درست خواهد بود.</p>	۱/۵
۲	<p>فرض خلف: فرض می کنیم <math>2\sqrt{3}</math> گنگ نباشد. (0/25)</p> <p><math>(a, b) = 1</math>, <math>a, b</math> نسبت به هم اولند.</p> $2\sqrt{3} = \frac{a}{b} \quad (0/25) \Rightarrow 12 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 12b^2 \Rightarrow a = 12k \quad (1) \quad (0/25)$ $144k^2 = 12b^2 \Rightarrow b^2 = 12k^2 \Rightarrow b = 12k' \quad (2)$ <p>از (۱) و (۲) نتیجه می شود که <math>a, b</math> نسبت به یکدیگر اول نیستند و تناقض با تعریف اعداد گویا را دارد چون باید <math>(a, b) = 1</math>. (0/25)</p>	۱
۳	<p>الف) نادرست و مثال نقض <math>a=1 \Rightarrow 1 &lt; 1</math> (0/5)</p> <p>ب) نادرست و مثال نقض <math>n=3 \Rightarrow 2^3 + 1 = 9</math> (0/5)</p> <p>ج) درست</p> $\begin{cases} x = 6k + 5 \\ y = 6k' + 5 \end{cases} \Rightarrow xy = (6k + 5)(6k' + 5) =$ $36kk' + 30k + 30k' + 25 = \Rightarrow 6(6kk' + 5k + 5k' + 4) + 1 = 6k'' + 1 \quad (0/75)$	۲
۴	<p>عدد طبیعی ۲۲ = تعداد کبوترها (0/25)</p> <p>باقیمانده بر ۶ = تعداد لانه ها <math>\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}</math></p> $22 \overline{) 6} \quad 22 = 3 \times 6 + 4 \Rightarrow$ $\frac{18}{4} \quad 3 + 1 = 4 \quad (0/25)$ <p>بر طبق اصل لانه کبوتر حداقل ۴ عدد باقیمانده یکسانی را دارند. (0/5)</p>	۱
	« ادامه در صفحه‌ی دوم »	

باسمه تعالی

رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۸۸ / ۱۰ / ۱۳	سال سوم آموزش متوسطه
اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی http://aeec.medu.ir	دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نیم سال اول (دی ماه) سال تحصیلی ۱۳۸۸-۸۹

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۵	<p>الف) <math>B \subseteq A \Rightarrow B \cap B \subseteq A \cap A' \Rightarrow B \subseteq \phi</math> (۱) (۰/۲۵)</p> <p><math>B \subseteq A' \Rightarrow \phi \subseteq B</math> (۲) <math>\Rightarrow B = \phi</math> (۰/۲۵)</p> <p>ب) <math>(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C</math></p> <p><math>(A \cup B) \cap (B \cup C)' = (A \cup B) \cap [B' \cap C'] =</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>[(A \cup B) \cap B'] \cap C' = \left[ (A \cap B') \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\phi} \right] \cap C' =</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>(A - B) - C</math></p>	۱/۵
۶	<p><math>\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \Rightarrow (x+y)(x-y) = 16 \Rightarrow 8(x-y) = 16 \Rightarrow x-y = 2 \\ x+y = 8 \end{cases}</math> (۰/۵)</p> <p><math>\begin{cases} x-y = 2 \Rightarrow x = 5 \\ x+y = 8 \Rightarrow y = 3 \end{cases}</math> (۰/۲۵)</p>	۱
۷	<p><math>A = \{-1, 0, 1, 2\}</math></p> <p><math>B = \{1, 2\}</math></p> <p><math>A \times B = \{(-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}</math> (۰/۵)</p> <p><math>B^c = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>A \times B - B^c = \{(-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2)\}</math> (۰/۵)</p> 	۱/۵
« ادامه در صفحه‌ی سوم »		



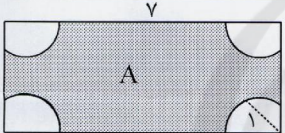
باسمه تعالی

رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۸۸ / ۱۰ / ۱۳	سال سوم آموزش متوسطه
اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی http://aee.medu.ir	دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نیم سال اول (دی ماه) سال تحصیلی ۸۹-۱۳۸۸

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۸	<p>۱) رابطه‌ی بازتابی (۰/۲۵)  <math>(x, y) R(x, y) \Rightarrow x^z - y^z = x^z - y^z</math></p> <p>۲) رابطه‌ی تقارنی (۰/۲۵)  <math>(x, y) R(z, t) \Rightarrow (z, t) R(x, y)</math>  <math>(x, y) R(z, t) \Rightarrow x^z - t^z = z^z - y^z \Rightarrow z^z - y^z = x^z - t^z \Rightarrow (z, t) R(x, y)</math></p> <p>۳) رابطه‌ی تعدی (۰/۵)  <math>(x, y) R(z, t) \Rightarrow x^z - t^z = z^z - y^z \Rightarrow x^z - f^z = e^z - y^z \Rightarrow (x, y) R(e, f)</math>  <math>(z, t) R(e, f) \Rightarrow z^z - f^z = e^z - t^z</math></p> <p><math>[(-2, 3)] = \{(x, y)   (x, y) R(-2, 3)\}</math> (۰/۲۵)  <math>x^z - 9 = -8 - y^z \Rightarrow x^z + y^z = 1</math> (۰/۲۵)</p> <p>تمام نقاطی که در این رابطه صدق کنند کلاس هم ارزی خواهند بود.</p>	۱/۵
۹	<p>الف) <math>S = \{12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43\}</math> (۰/۵)</p> <p>ب) <math>A = \{12, 24, 42\}</math> (۰/۲۵)</p> <p>ج) <math>B = \{13, 23, 31, 41, 43\}</math> (۰/۲۵)</p> <p>د) <math>B' = \{12, 14, 21, 24, 32, 34, 42\}</math> (۰/۵)</p> <p><math>A \cap B' = \{12, 24, 42\}</math> (۰/۵)</p>	۲
۱۰	<p><math>p(a) = 2p(b) = 2x</math> <span style="float:right"><math>p(a) + p(b) + p(c) + p(d) = 1</math> (۰/۲۵)</span></p> <p><math>p(b) = x</math> (۰/۲۵) <span style="float:right"><math>2x + x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1</math></span></p> <p><math>p(c) = p(d) = \frac{1}{4}</math> <span style="float:right"><math>2x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{6}</math> (۰/۲۵)</span></p> <p><math>p(a) = \frac{1}{3}</math> (۰/۲۵) , <math>p(b) = \frac{1}{6}</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>p(a') = \frac{2}{3}</math> (۰/۲۵) , <math>p(b') = \frac{5}{6}</math> (۰/۲۵)</p>	۱/۷۵
	« ادامه در صفحه‌ی چهارم »	

باسمه تعالی

رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۸۸ / ۱۰ / ۱۳	سال سوم آموزش متوسطه
اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی http://aee.medu.ir	دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نیم سال اول (دی ماه) سال تحصیلی ۱۳۸۸-۸۹

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۱	الف) $p(A) = \frac{C(6,2)}{C(11,2)} = \frac{15}{55} = \frac{3}{11}$ (۰/۲۵) ب) $p(B) = \frac{C(6,2)}{C(11,2)} + \frac{C(5,2)}{C(11,2)} = \frac{3}{55} + \frac{10}{55} = \frac{3}{11} + \frac{2}{11} = \frac{5}{11}$ (۰/۲۵)	۱/۵
۱۲	جای خالی به ترتیب برابر است با: $\frac{1}{4}, \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ رسم نمودار درختی (۰/۲۵) هر قسمت جواب (۰/۲۵)	۱
۱۳	 $p(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{28 - \pi}{7 \times 4} = \frac{28 - \pi}{28} = 1 - \frac{\pi}{28}$ (۰/۲۵) نمودار (۰/۲۵) (۱ نمره)	۱/۵
۱۴	داریم: $\left. \begin{aligned} (B - A) \cup A &= B \\ (B - A) \cap A &= \phi \end{aligned} \right\} \Rightarrow p[(B - A) \cup A] = p(B)$ (۰/۲۵) $p(B - A) + p(A) = p(B)$ (۰/۲۵) $\Rightarrow p(B) \geq p(A)$ (۰/۲۵) $p(B - A) = p(B) - p(A)$ (۰/۲۵)	۱/۲۵
	جمع نمره « موفق باشید »	۲۰