

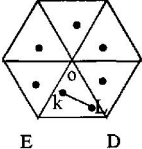
باسمه تعالی

ردیف	سؤالات	نمره
سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال رشته‌ی: ریاضی فیزیک ساعت شروع: ۸ صبح مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه سال سوم آموزش متوسطه تاریخ امتحان: ۱۳۸۸ / ۳ / ۲ دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال تحصیلی ۱۳۸۸ اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی http://aee.medu.ir		
۱	با استفاده از اصل استقراء ریاضی، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:	۱/۵
	$\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$	
۲	عبارت‌های زیر را در نظر بگیرید و دلیل درستی یا نادرستی هر یک را بنویسید. الف) اگر $x > 1$ آنگاه داریم: $4 - x^2 < 3$ ب) مکعب هر عدد فرد منتهای یک، عددی زوج است.	۱/۲۵
۳	اگر a, b, c سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید که: $a^2 + b^2 \geq -2(a + b + c)$	۰/۷۵
۴	با استدلال برهان خلف ثابت کنید که اگر $\sqrt{3}$ عددی گنگ است، $\sqrt{\sqrt{3} + 2}$ نیز عددی گنگ است.	۱
۵	هفت نقطه درون شش ضلعی منتظمی به طول ضلع ۱ انتخاب می‌کنیم، ثابت کنید فاصله دست کم دو تا از این نقطه‌ها از ۱ کمتر است.	۱
۶	با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $[A \cap (A - B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] = B$	۱/۷۵
۷	قضیه دو شرطی زیر را ثابت کنید: $A \subseteq B$ و $B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$	۱
۸	اگر $A_n = \left[\frac{-1}{n}, \frac{2n-1}{n} \right]$ باشد، ابتدا A_1 و A_2 را مشخص کرده سپس نمودار $A_1 \times A_2$ را رسم کنید.	۱
۹	رابطه در R در Z به صورت $4 x - y \Leftrightarrow x R y$ تعریف شده است: الف) ثابت کنید R یک رابطه هم ارزی است. ب) کلاس‌های هم ارزی آن را مشخص کنید.	۱/۷۵
	« ادامه ی سؤالات در صفحه ی دوم »	

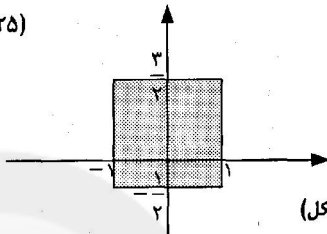
باسمه تعالی

ردیف	سوالات	نمره
سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال رشته‌ی: ریاضی فیزیک ساعت شروع: ۸ صبح مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه سال سوم آموزش متوسطه تاریخ امتحان: ۱۳۸۸ / ۳ / ۲ دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال تحصیلی ۱۳۸۸ اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی http://aee.medu.ir		
۱۰	چهار سکه را با هم پرتاب می‌کنیم، مطلوب است: الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ی این تجربه تصادفی. ب) پیشامد A که در آن حداقل سه بار رو بیاید. ج) پیشامد B که در آن فقط یک بار پشت بیاید. د) پیشامد $A - B$ را بیابید.	۲
۱۱	می‌خواهیم یک تیم سه نفری از ۱۰ دانش‌آموز رشته تجربی و ۶ دانش‌آموز در رشته ریاضی انتخاب کنیم، مطلوب است احتمال آنکه: الف) هر سه نفر رشته ریاضی باشند. ب) دو نفر رشته تجربی و یک نفر رشته ریاضی باشند.	۱/۵
۱۲	تاسی به گونه‌ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد اول، سه برابر احتمال وقوع هر عدد غیر اول است، اگر در پرتاب این تاس A پیشامد وقوع عدد کوچکتر از ۴ باشد، احتمال وقوع پیشامد A را محاسبه کنید.	۱/۵
۱۳	اگر x, y دو عدد تصادفی از بازه حقیقی $[۰, ۲]$ باشند، احتمال آن را بیابید که داشته باشیم: $۲ \leq y + ۲x \leq ۴$	۱/۵
۱۴	تاس سالمی را ۸ بار می‌اندازیم، احتمال آن را حساب کنید که حداقل ۶ بار عددی فرد آمده باشد.	۱
۱۵	اگر A, B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند و داشته باشیم: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ و $P(B) = ۲P(A) = ۰/۸$ ، مطلوب است محاسبه $P(A' \cap B')$.	۱/۵
۲۰	جمع نمره	« موفق باشید »

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس جبر و احتمال		رشته‌ی: ریاضی فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۸۸ / ۳ / ۲
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال تحصیلی ۱۳۸۸		اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی http:// aee.medu.ir
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	$P(1) = 0 = 1 - 1 \Rightarrow 0 = 0 \quad (0/25)$ $P(k) = \frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{k!} \quad (0/25)$ <p>فرض استقراء</p> $p(k+1) = \frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{k-1}{k!} + \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!} \quad (0/25)$ <p>حکم استقراء</p> $p(k+1) = 1 - \frac{1}{k!} + \frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)! - (k+1) + k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)! - 1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!} \quad (0/25)$	۱/۲۵
۲	<p>(الف) درست $(0/5)$</p> $4 - x^2 < 3 \Rightarrow 1 < x^2 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \quad (0/5)$ <p>(ب) درست $(0/25)$</p> $x = 2k + 1 \Rightarrow (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1) = 2(2k^2 + 2k) = 2k'(2k+1) \quad (0/25)$	۱/۲۵
۳	$a^2 + b^2 + 2(a+b+2) \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 + 2a + 2) + (b^2 + 2b + 2) \geq 0 \Leftrightarrow (a+2)^2 + (b+2)^2 \geq 0 \quad (0/25)$ <p>گزاره همواره درست و بر طبق استدلال برگشتی برقرار است.</p>	۰/۲۵
۴	$\sqrt{\sqrt{3}+2} \notin Q' \Rightarrow \sqrt{\sqrt{3}+2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{3}+2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a^2}{b^2} - 2 \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a^2 - 2b^2}{b^2} \quad (0/25)$ <p>به تناقض رسیده ایم و همان حکم اولیه برقرار است. $(0/25)$</p>	۱
۵	<p>تعداد کبوترها = ۷ نقطه $(0/25)$</p> <p>تعداد لانه‌ها = ۶ مثلث $(0/25)$</p> <p>بر طبق اصل لانه کبوتر $(0/25)$، $(7 > 6)$ یعنی حداقل دو نقطه وجود دارد که درون مثلثی قرار دارد. $(0/25)$</p> $kL < OD \Rightarrow kL < 1 \quad (0/25)$ 	۱
۶	$[A \cap (A \cap B)'] \cup [B \cap (A' \cup B')] = [A \cap (A' \cup B)] \cup [(B \cap A') \cup (B \cap B')] = \quad (0/25) \quad (0/25) \quad (0/25)$ $[(A \cap A') \cup (A \cap B)] \cup (B \cap A') = (A \cap B) \cup (B \cap A') = B \cap (A \cup A') = B \cap U = B \quad (0/25) \quad (0/25) \quad (0/25)$	۱/۲۵
« ادامه در صفحه ی دوم »		

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس جبر و احتمال		رشته‌ی: ریاضی فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۸۸ / ۳ / ۲
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال تحصیلی ۱۳۸۸		اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی http:// aee.medu.ir
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۷	اثبات: اگر $A \subseteq B$ تمام اعضای A در B قرار دارند و اگر $B \subseteq A$ تمام اعضای B در A قرار دارند پس $A = B$ (۰/۵). $(A \subseteq B, B \subseteq A) \Rightarrow A = B$ (فرض ، حکم) اثبات: $A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$ (۰/۵) $(A \subseteq A, A = B) \Rightarrow A \subseteq B, B \subseteq A$ (حکم)	۱
۸	$A_1 = [-1, 1]$ (۰/۲۵) ، $A_2 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ (۰/۲۵)  (۰/۵ شکل)	۱
۹	(الف) $(x R y) \Leftrightarrow x - y = 4k$ $(x R x) \Rightarrow x - x = 4k \Rightarrow 0 = 4k$ (۰/۲۵) رابطه بازتابی $(x R y) \Rightarrow (y R x)$ $x R y \Rightarrow x - y = 4k \Rightarrow y - x = -4k = 4(-k) = 4k'$ (۰/۲۵) رابطه تقارنی $(x R y), (y R z) \Rightarrow (x R z)$ $x R y \Rightarrow x - y = 4k$ $y R z \Rightarrow y - z = 4k' \Rightarrow x - z = 4(k + k') = 4k'' \Rightarrow (x R z)$ (۰/۵) رابطه تعدی هر سه خاصیت را دارد پس هم ارزی است. (۰/۲۵) (ب) چهار کلاس هم ارزی $[0], [1], [2], [3]$ را دارد. (۰/۵)	۱/۷۵
۱۰	۲ الف) $n(s) = 2^4 = 16$ (۰/۵) ب) $A = \{(r, r, r, r), (r, r, r, p), (r, r, p, r), (r, r, p, p), (r, p, r, r), (p, r, r, r)\}$ (۰/۵) ج) $B = \{(r, r, r, r), (r, r, r, p), (r, r, p, r), (r, p, r, r)\}$ (۰/۵) د) $A - B = \{(r, r, p, p)\}$ (۰/۵)	۲
۱۱	۱/۵ $n(s) = \binom{16}{3} = 560$ (۰/۲۵) ب) $P(B) = \frac{\binom{10}{2} \binom{6}{1}}{\binom{16}{3}} = \frac{27}{56}$ (۰/۷۵) ، الف) $P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{16}{3}} = \frac{1}{28}$ (۰/۵)	۱/۵
« ادامه در صفحه ی سوم »		

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال		رشته‌ی: ریاضی فیزیک																
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۸۸ / ۳ / ۲																
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال تحصیلی ۱۳۸۸		اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی http:// aee.medu.ir																
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره																
۱۲	$P(۲) = P(۳) = P(۵) = ۳x \quad (۰/۲۵)$ $\Rightarrow ۳x + ۳x + ۳x + x + x + x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۱۲} \quad (۰/۵)$ $P(۱) = P(۴) + P(۶) = x \quad (۰/۲۵)$ $A = \{۱, ۲, ۳\} \rightarrow P(A) = x + ۳x + ۳x = ۷x = \frac{۷}{۱۲} \quad (۰/۵)$	۱/۵																
۱۳	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse;"> <tr><td>$y + 2x = 4$</td><td></td></tr> <tr><td>x</td><td>y</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۰</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td></tr> </table> <table border="1" style="border-collapse: collapse;"> <tr><td>$y + 2x = 2$</td><td></td></tr> <tr><td>x</td><td>y</td></tr> <tr><td>۰</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۰</td></tr> </table> </div> $P(A) = \frac{S_A}{S_S} = \frac{4 - (\frac{2 \times 1}{2} + \frac{2 \times 1}{2})}{4} = \frac{1}{2} \quad (۰/۲۵)$ <p style="text-align: center;">(شکل ۰/۵)</p>	$y + 2x = 4$		x	y	۲	۰	۱	۲	$y + 2x = 2$		x	y	۰	۲	۱	۰	۱/۵
$y + 2x = 4$																		
x	y																	
۲	۰																	
۱	۲																	
$y + 2x = 2$																		
x	y																	
۰	۲																	
۱	۰																	
۱۴	$P(A) = \frac{\binom{۸}{۶}}{۲^۸} + \frac{\binom{۸}{۷}}{۲^۸} + \frac{\binom{۸}{۸}}{۲^۸} = \frac{۲۸}{۲۵۶} + \frac{۸}{۲۵۶} + \frac{۱}{۲۵۶} = \frac{۳۷}{۲۵۶} \quad (۰/۲۵)$	۱																
۱۵	$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = ۱ - P(A \cup B) =$ $۱ - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = ۱ - [P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)] =$ $۱ - [۰/۴ + ۰/۸ - ۰/۳۲] = ۱ - ۰/۸۸ = ۰/۱۲ \quad (۰/۲۵)$	۱/۵																
۲۰	جمع نمره	همکار محترم ضمن عرض خسته نباشید، لطفاً به راه حل های صحیح دیگر هم به تناسب نمره منظور فرمایید.																