

باسمه تعالی

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۹ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۸۹ / ۶ / ۹		سال سوم آموزش متوسطه	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دوره‌ی تابستانی (شهریور ماه) سال ۱۳۸۹	

ردیف	سوالات	نمره
۱	جای خالی را، با عبارت های مناسب کامل کنید. الف) استدلال ، روش نتیجه گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات است. ب) هنگامی از استدلال استفاده می کنیم ، که مطمئن هستیم ، نتیجه مسئله همیشه درست است. ج) احکامی که همیشه برقرار هستند را می نامند. د) مثال نقض ، مثالی است که نشان می دهد نتیجه کلی است.	۱
۲	با استفاده از اصل استقراء ریاضی ، به ازای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، ثابت کنید : $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} > n$	۱/۵
۳	اگر A یک زیرمجموعه ۲۷ عضوی از اعداد طبیعی باشد و اعضای A را بر عدد ۲۶ تقسیم کنیم ، نشان دهید که حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقیمانده یکسانی بر ۲۶ هستند.	۰/۷۵
۴	با استفاده از برهان خلف ، ثابت کنید که $\sqrt{3}$ گنگ است.	۱/۲۵
۵	اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند ، ثابت کنید که رابطه زیر برقرار است : $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$	۱
۶	نمودار رابطه زیر را رسم کنید : $R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \leq 1 \right\}$	۱
۷	اگر A و B دو مجموعه باشند : الف) با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها درستی رابطه زیر را ثابت کنید. $[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] = B$ ب) ثابت کنید : $(A')' = A$	۲
۸	اگر $A = [-5, 2]$ و $B = (-\infty, -1)$ ، نمودار حاصلضرب دکارتی $A \times B$ را رسم کنید.	۰/۷۵
۹	اگر داشته باشیم : $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow y - t = 3(x - z)$ الف) ثابت کنید R یک رابطه هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[(1, 2)]$ را بیابید.	۱/۷۵
« ادامه ی سوالات در صفحه ی دوم »		

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۹ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۸۹ / ۶ / ۹		
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دوره‌ی تابستانی (شهریور ماه) سال ۱۳۸۹	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		

ردیف	سؤالات	نمره
۱۰	کیسه ای دارای ۴ مهره یکسان است که ۲ تا سفید و ۲ تا قرمز هستند، از این کیسه ۲ مهره به تصادف خارج می کنیم مطلوب است: الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب رنگ های مهره های خارج شده را بنویسید. ب) پیشامد A آنکه فقط یکی از مهره ها سفید باشد. ج) پیشامد B آنکه حداقل یکی از مهره ها قرمز باشد. د) پیشامد $A \cup B'$ را بیابید.	۲
۱۱	یک کارت از میان ۳۰ کارت که از ۱ تا ۳۰ شماره گذاری شده اند، به تصادف بیرون می آوریم، احتمال آن را بیابید که: الف) عدد روی کارت مضرب ۲ یا ۳ باشد. ب) عدد روی کارت مضرب ۲ و ۳ باشد.	۲
۱۲	از میان ۱۰ نقطه مطابق شکل زیر، ۴ نقطه به تصادف انتخاب می کنیم، احتمال آن را بیابید که با این ۴ نقطه یک چهارضلعی ساخته شود که روی هر خط فقط یک رأس آن قرار بگیرد.	۱/۵
۱۳	دانش آموزی به ۲۰ سؤال دو گزینه ای به تصادف پاسخ می دهد، احتمال آن را بیابید که به ۱۲ سؤال پاسخ درست داده باشد.	۱
۱۴	تاسی به گونه ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد زوج آن دو برابر احتمال وقوع هر عدد فرد آن است، اگر در پرتاب این تاس، A پیشامد وقوع عددی کوچکتر یا مساوی ۳ باشد، $P(A)$ را محاسبه کنید.	۱/۵
۱۵	برای دو پیشامد دلخواه A و B، ثابت کنید رابطه زیر برقرار است: $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$	۱
	جمع نمره	۲۰
	«موفق باشید»	

باسمه تعالی

ساعت شروع: ۹ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۸۹ / ۶ / ۹		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دوره تابستانی (شهریور ماه) سال ۱۳۸۹

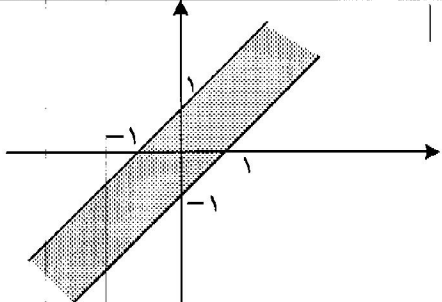
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	الف) استقرایی ب) استنتاجی ج) قضایای کلی (قضیه) د) نادرست	۱
۲	هر قسمت (۰/۲۵) $P(2): 1 + \sqrt{2} > 2$ (۰/۲۵) فرض استقرآء $P(k): 1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{k} > k$ (۰/۲۵) حکم استقرآء $P(k+1): 1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{k} + \sqrt{k+1} > k+1$ (۰/۲۵) به طرفین فرض $\sqrt{k+1}$ را اضافه می کنیم (۰/۲۵) $1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{k} + \sqrt{k+1} > k + \sqrt{k+1} > k+1$ (۰/۲۵) \Rightarrow $\sqrt{k+1} > 1$ این گزاره همواره درست چون $k \geq 2$ است، پس حکم برقرار می باشد. (۰/۲۵)	۱/۵
۳	۲۷ عضو مجموعه $A =$ تعداد کبوترها ، $\{0, 1, \dots, 25\}$ باقیمانده های تقسیم بر ۲۶ = تعداد لانه ها (۰/۲۵) ۲۶ > ۲۷ بر طبق اصل لانه کبوتر حتماً حداقل دو عدد باقیمانده یکسانی بر ۲۶ را دارند. (۰/۲۵)	۰/۷۵
۴	$\sqrt{3} \in Q \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a}{b}$, $(a, b) = 1 \Rightarrow 3 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 3b^2 \Rightarrow (a = 3k)$ (۰/۲۵) $\Rightarrow (3k)^2 = 3b^2 \Rightarrow 9k^2 = 3b^2 \Rightarrow (b = 3k')$ (۰/۲۵) پس a, b هر دو مضربی از ۳ هستند و نسبت به هم اول نیستند، پس به تناقض رسیده و حکم اصلی درست است. (۰/۲۵)	۱/۲۵
۵	$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3}{a^2 b^2} \geq \frac{a+b}{ab} \Leftrightarrow \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{ab} \geq a+b$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ (۰/۲۵) گزاره همواره درست و برطبق استدلال برگشتی و برگشت پذیر بودن روابط حکم درست است. (۰/۲۵)	۱
	« ادامه در صفحه ی دوم »	

باسمه تعالی

ساعت شروع: ۹ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۸۹ / ۶ / ۹		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دوره‌ی تابستانی (شهریور ماه) سال ۱۳۸۹

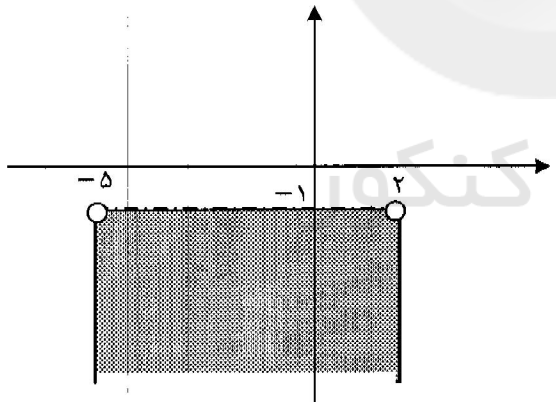
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۶	$ x - y \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x - y \leq 1$ (۰/۲۵) رسم هر خط (۰/۲۵) و ناحیه مشترک (۰/۲۵)	۱
---	---	---



۷	الف) $[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] = [(A \cap A') \cup (A \cap B)] \cup [(B \cap A') \cup (B \cap B')] =$ $[\phi \cup (A \cap B)] \cup [(B \cap A') \cup \phi] = (A \cap B) \cup (B \cap A') = B \cap (A \cup A') = B \cap U = B$ ب) $(A')' = \{x \mid x \in U, x \notin A'\} = \{x \mid x \in U, x \in A\} = A$	۲
---	--	---

۸	مشخص کردن قسمت A و B هر قسمت (۰/۲۵) مشخص شدن محل مشترک $A \times B$ (۰/۲۵)	۰/۷۵
---	---	------



۹	الف) رابطه بازتابی (۰/۲۵) $(x, y) R (x, y) \Rightarrow y - y = r(x - x) \Rightarrow 0 = 0$ ب) $(x, y) R (z, t) \Rightarrow (z, t) R (x, y)$ $(x, y) R (z, t) \Rightarrow y - t = r(x - z) \Rightarrow -(t - y) = -r(z - x) \Rightarrow t - y = r(z - x) \Rightarrow$ رابطه تقارنی $(z, t) R (x, y)$ ج) $(x, y) R (z, t), (z, t) R (e, f) \Rightarrow (x, y) R (e, f)$	۱/۷۵
---	--	------

« ادامه در صفحه ی سوم »

باسمه تعالی

ساعت شروع: ۹ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۸۹ / ۶ / ۹		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دوره‌ی نایستانی (شهریور ماه) سال ۱۳۸۹

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

	<p>دو رابطه را جمع می کنیم</p> $\left. \begin{aligned} (x,y) R (z,t) &\Rightarrow y-t = r(x-z) \\ (z,t) R (e,f) &\Rightarrow t-f = r(z-e) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y-f = r(x-e) \Rightarrow (x,y) R (e,f) \quad (./25)$ <p>رابطه تعدی</p> <p>چون هر سه خاصیت را دارد، پس رابطه هم ارزی است.</p> <p>ب) $[(1,2)] = \{(x,y) \mid (x,y) R (1,2)\} \Rightarrow y-2 = r(x-1) \Rightarrow y = rx - 1 \quad (./5)$</p>	
۲	$S = \left\{ (س و س) و (س و ق) و (س و ق) و (ق و ق) \right\} \quad (./5)$ $A = \left\{ (س و ق) و (ق و س) \right\} \quad (./5)$ $B = \left\{ (ق و ق) و (س و ق) و (ق و س) \right\} \quad (./5)$ $A \cup B' = \left\{ (س و س) و (س و ق) و (ق و س) \right\} \quad (./5)$	۱۰
۲	<p>الف) $S = \{1, 2, \dots, 30\}$, $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30\}$</p> <p>$P(A) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \quad (./25)$</p> <p>ب) $B = \{6, 12, 18, 24, 30\}$, $P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \quad (./25)$</p>	۱۱
۱/۵	<p>هر قسمت نوشته شده صورت کسر $(./25)$</p> $P(A) = \frac{\binom{1}{1} \binom{2}{1} \binom{3}{1} \binom{4}{1}}{\binom{10}{4}} = \frac{24}{210} = \frac{4}{35} \quad (./25)$	۱۲
« ادامه در صفحه ی چهارم »		

باسمه تعالی

ساعت شروع: ۹ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۸۹ / ۶ / ۹		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دوره تابستانی (شهریور ماه) سال ۱۳۸۹

نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
۱	$P(A) = \frac{\binom{0}{5} \binom{20}{12}}{\binom{20}{5}}$	۱۳
۱/۵	$P(۲) = P(۴) = P(۶) = ۲x$ $P(۱) = P(۳) = P(۵) = x \quad (۰/۵)$ $P(۱) + P(۲) + \dots + P(۶) = ۱ \Rightarrow ۹x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۹} \quad (۰/۵)$ $A = \{۱, ۲, ۳\} \Rightarrow P(A) = x + ۲x + x = ۴x = \frac{۴}{۹} \quad (۰/۵)$	۱۴
۱	$P(A \cup B) \leq ۱ \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq ۱ \Rightarrow$ <p>اصل کولموگروف (۰/۲۵)</p> $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - ۱ \quad (۰/۲۵)$	۱۵
۲۰	جمع نمره	

مصححین گرامی:

لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر هم به تناسب نمره منظور فرمایید.