

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۹ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۶ / ۶ / ۱۳۹۰		
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهر پیور ماه سال ۱۳۹۰	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		

ردیف	سؤالات	نمره
۱	با استدلال استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید که رابطه‌ی زیر برقرار است. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$	۱/۵
۲	با استدلال استنتاجی، نشان دهید حاصل ضرب دو عدد صحیح زوج متوالی، مضرب ۸ است.	۱
۳	با ذکر دلیل بنویسید آیا $(4 + 3^n)$ همیشه یک عدد اول است؟	۰/۵
۴	اگر n عدد طبیعی و $(3n+2)$ عددی فرد باشد، با استدلال برهان خلف، نشان دهید که n نیز عددی فرد است.	۱
۵	نشان دهید که اگر هر زیر مجموعه ۶ عضوی از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ را در نظر بگیریم، حداقل دو عضو وجود دارد که مجموع آنها برابر ۱۰ باشد.	۱/۲۵
۶	مجموعه‌های زیر را به صورت ریاضی (گزاره نما) نشان دهید. $A = \{ \dots, 27, 8, 1, 0, -1 \}$ و $B = \{ \sqrt{2}, -\sqrt{2} \}$	۱/۲۵
۷	اگر A زیر مجموعه B باشد، با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها، درستی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید. $B - (B - A) = A$	۱/۵
۸	نمودار رابطه‌ی زیر را رسم کنید. $R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 4, y \leq x^2 \}$	۰/۷۵
۹	رابطه‌ی R روی اعداد صحیح (Z) ، به صورت $a R b \Leftrightarrow a^2 + 2b = b^2 + 2a$ تعریف شده است: الف) ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[2]$ را محاسبه کنید.	۱/۵
	«ادامه سؤالات در صفحه‌ی دوم»	

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۹ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۶ / ۶ / ۱۳۹۰		
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهر یور ماه سال ۱۳۹۰	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		

ردیف	سؤالات	نمره
۱۰	<p>کدام یک از عبارات های زیر درست و کدام یک نادرست است .</p> <p>الف) مثال نقض ، برای اثبات درستی یک قضیه کلی به کار می رود .</p> <p>ب) اگر $(A \cap B) \neq \emptyset$ آنگاه $x \in B'$ یا $x \in A'$.</p> <p>ج) حاصل ضرب دکارتی $A \times B = \emptyset$ آنگاه $A = \emptyset$ و $B = \emptyset$.</p> <p>د) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند به طوری که $A \subseteq B$ ، آنگاه داریم :</p> $P(B - A) = P(B) - P(A)$	۱
۱۱	<p>با اعداد طبیعی کوچکتر از ۶ ، اعداد دو رقمی می سازیم :</p> <p>الف) تعداد اعضای فضای نمونه این پیشامد تصادفی را بنویسید .</p> <p>ب) پیشامد A را طوری بنویسید که تمام اعضای آن ، اعداد زوج و کمتر از ۴۰ باشند .</p> <p>ج) پیشامد B را طوری بنویسید که تمام اعضای آن ، اعداد فرد و بیشتر از ۴۰ باشند .</p>	۲
۱۲	<p>می خواهیم یک تیم سه نفری از ۱۰ دانش آموز رشته تجربی و ۶ دانش آموز رشته ریاضی انتخاب کنیم ، مطلوب است احتمال آنکه لااقل یک نفر رشته ریاضی باشد .</p>	۱/۵
۱۳	<p>اگر $S = \{a, b, c, d\}$ یک فضای نمونه ای باشد و داشته باشیم :</p> $P(a) = 2P(b) \text{ و } P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$ <p>مطلوب است محاسبه $P(b)$ و $P(a')$.</p>	۱/۵
۱۴	<p>یک نقطه به طور تصادفی درون یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۴ انتخاب می کنیم ، مطلوب است احتمال آن که فاصله آن نقطه از هر رأس بیشتر از ۱ باشد .</p>	۱/۵
۱۵	<p>عددی به تصادف از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ انتخاب می کنیم ، مطلوب است احتمال آن که عدد انتخابی بر ۵ بخش پذیر باشد ولی بر ۳ بخش پذیر نباشد .</p>	۱/۵
۱۶	<p>اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $P(A) = 0/2$ و $P(B) = 0/3$ و $P(A \cup B) = 0/4$ احتمال آن را محاسبه کنید که هر دو پیشامد A و B با هم اتفاق بیفتند .</p>	۰/۷۵
	« موفق باشید »	۲۰

ساعت شروع : ۹ صبح	رشته‌ی : ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال
تاریخ امتحان : ۱۶ / ۶ / ۱۳۹۰		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۰

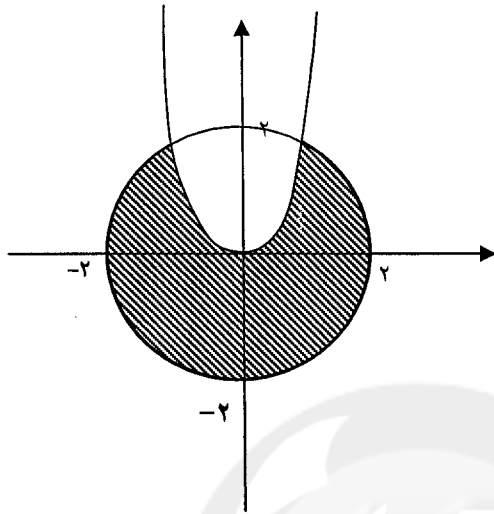
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
------	---------------	------

۱/۵	$P(1): 1^r = \left(\frac{1(r)}{r}\right)^r \Rightarrow 1 = 1 \quad (0/25)$ $P(K): 1^r + 2^r + 3^r + \dots + K^r = \left(\frac{K(K+1)}{2}\right)^r \quad \text{فرض استقراء} \quad (0/25)$ $P(K+1): 1^r + 2^r + 3^r + \dots + K^r + (K+1)^r = \left(\frac{(K+1)(K+2)}{2}\right)^r \quad \text{حکم استقراء} \quad (0/25)$ $P(K+1): \left(\frac{K(K+1)}{2}\right)^r + (K+1)^r = (K+1)^r \left(\frac{K^r}{2} + K+1\right) =$ $(K+1)^r \left(\frac{K^r + 4K + 4}{4}\right) = \left(\frac{(K+1)(K+2)}{2}\right)^r \quad (0/25)$	۱
۱	$(2K)(2K+2) = (4K^2 + 4K) = 4k(k+1) = 4(2K) = 8K \quad (0/25)$	۲
۰/۵	خیر (۰/۲۵) ، $n=4 \Rightarrow 4+3^4=85$ اول نیست . (۰/۲۵)	۳
۱	$n=2k \Rightarrow 3(2k)+2=6k+2=2(3k+1)=2A$ <p>خلاف حکم (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)</p> <p>به خلاف فرض رسیده ایم ، پس همان حکم داده شده صحیح است. (۰/۲۵)</p>	۴
۱/۲۵	<p>هر مجموعه A که ۶ عضوی انتخاب شود ، ۶ عضو = تعداد کبوترها (۰/۲۵)</p> <p>تعداد حالاتی که ۱۰ ایجاد می شود با استفاده از اعداد تکراری یا اعداد بی تکرار (۵ حالت) یا (۴ حالت) = تعداد لانه ها (۰/۵)</p> <p>{ (۱, ۹), (۲, ۸), (۳, ۷), (۴, ۶) } یا { (۱, ۹), (۲, ۸), (۳, ۷), (۴, ۶), (۵, ۵) }</p> <p>بر طبق اصل لانه کبوتر $6 > 5$ یا $6 > 4$ پس حداقل دو عضو با مجموع ۱۰ وجود دارد. (۰/۵)</p>	۵
۱/۲۵	$A = \{x^2 \mid x \in Z, x \geq -1\} \quad (0/5)$ <p>حاصلضرب دو ریشه مجموع دو ریشه</p> $S = \dots, P = -2 \Rightarrow x^2 - Sx + P = \dots \Rightarrow x^2 - 2 = \dots \Rightarrow B = \{x \mid x^2 - 2 = \dots\}$ <p>(۰/۵) (۰/۲۵)</p>	۶
۱/۵	$B - (B - A) = B - (B \cap A') = B \cap (B \cap A')' = B \cap (B' \cup A) = (B \cap B') \cup (B \cap A) = \emptyset \cup (B \cap A) = A$ <p>(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) طبق فرض $A \subset B$</p> <p>(۰/۵)</p>	۷
« ادامه در صفحه ی دوم »		

ساعت شروع: ۹ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۶ / ۶ / ۱۳۹۰		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۰

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۸	<p>رسم دایره (۰/۲۵)</p> <p>رسم سهمی (۰/۲۵)</p> <p>مشخص شدن ناحیه مشترک (۰/۲۵)</p>	۰/۷۵
---	---	------



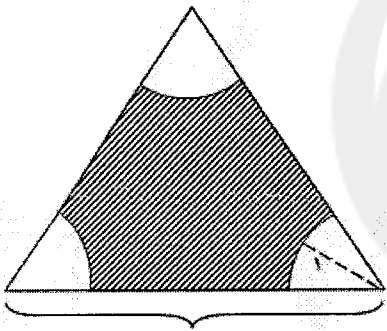
۹	<p>۱) $aRa \Rightarrow a^2 + 2a = a^2 + 2a$ رابطه بازتابی (۰/۲۵)</p> <p>۲) $aRb \Rightarrow bRa$</p> <p>$a^2 + 2b = b^2 + 2a \Rightarrow b^2 + 2a = a^2 + 2b \Rightarrow bRa$ رابطه تقارنی (۰/۲۵)</p> <p>۳) $(aRb \text{ و } bRc) \Rightarrow aRc$</p> <p>$\left. \begin{matrix} a^2 + 2b = b^2 + 2a \\ b^2 + 2c = c^2 + 2b \end{matrix} \right\} \Rightarrow a^2 + 2c = c^2 + 2a \Rightarrow aRc$ رابطه تعدی (۰/۵)</p> <p>این دو رابطه را جمع می کنیم.</p> <p>هر سه خاصیت را دارد پس هم ارزی است.</p> <p>$[2] = \{x \mid xR2\} \Rightarrow \{x \mid x^2 + 4 = 4 + 2x\} = \{0, 2\}$</p> <p>(۰/۲۵) (۰/۲۵)</p>	۱/۵
---	--	-----

۱۰	الف) نادرست هر قسمت (۰/۲۵) نمره دارد.	ب) درست	ج) نادرست	د) درست	۱
----	--	---------	-----------	---------	---

۱۱	الف) $n(S) = 25$ (۰/۵)	ب) هر دو عضو نوشته شده ۰/۲۵ نمره دارد.	ج)	<p>$A = \{12, 14, 22, 24, 32, 34\}$ (۰/۷۵)</p> <p>$B = \{41, 43, 45, 51, 53, 55\}$ (۰/۷۵)</p>	۲
----	------------------------	--	----	---	---

	« ادامه در صفحه ی سوم »	
--	-------------------------	--

ساعت شروع: ۹ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۶ / ۶ / ۱۳۹۰		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۰

نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
۱/۵	$P(A) = \frac{\binom{6}{1}\binom{10}{2} + \binom{6}{2}\binom{10}{1} + \binom{6}{3}}{\binom{16}{3}} = \frac{440}{560} = \frac{11}{14} \quad (۰/۲۵)$ <p>صورت کسر هر قسمت نوشته شده ۰/۲۵ نمره و مخرج کسر ۰/۵ نمره داده شود.</p>	۱۲
۱/۵	$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1 \Rightarrow$ $2x + x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{6} \quad P(b) = \frac{1}{6}$ $P(a') = 1 - P(a) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	۱۳
۱/۵	 <p>شکل ۰/۲۵</p> $P(A) = \frac{a(A)}{a(S)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\pi}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{4\sqrt{3} - \pi}{4\sqrt{3}}$	۱۴
۱/۵	$A = 3 \text{ بخش پذیری بر } 3 \Rightarrow P(A) = \frac{\lfloor \frac{1000}{3} \rfloor}{1000} = \frac{333}{1000}$ $B = 5 \text{ بخش پذیری بر } 5 \Rightarrow P(B) = \frac{\lfloor \frac{1000}{5} \rfloor}{1000} = \frac{200}{1000} \quad (۰/۲۵)$ $P(A \cap B) = \frac{\lfloor \frac{1000}{15} \rfloor}{1000} = \frac{66}{1000} \quad (۰/۵)$ $P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{200}{1000} - \frac{66}{1000} = \frac{134}{1000} \quad (۰/۲۵)$	۱۵
۰/۷۵	<p>تشخیص پیدا کردن اشتراک دو پیشامد ۰/۲۵ نمره دارد.</p> $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0/2 + 0/3 - 0/4 = 0/1$	۱۶
۲۰	جمع نمره	

مصححین گرامی:

لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر هم به تناسب نمره منظور فرمایید.