

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۱۰ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان: ۱۶ / ۶ / ۱۳۹۲	سال سوم آموزش متوسطه	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۲	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	با استفاده از اصل استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید: $P(n): 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$	۱/۵
۲	در یک کلاس ۳۰ نفری حداقل چند دانش آموز در یک روز هفته متولد شده اند؟ چرا؟	۱/۲۵
۳	اگر x عددی حقیقی و مثبت باشد، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید: $x + \frac{1}{x} \geq 2$	۱/۲۵
۴	با استفاده از برهان خلف، نشان دهید اگر n^2 عددی فرد باشد، آنگاه n نیز فرد است.	۱/۵
۵	مجموعه های $A = \{1, 3\}$ و $B = \{-1, 0, 2\}$ مفروضند: الف) $(A \times B)$ را به صورت زوج های مرتب بنویسید. ب) نمودار $(A \times B)$ را رسم کنید.	۱/۵
۶	مقادیر x و y را طوری بیابید که دو زوج مرتب $(3, x^2 - y^2)$ و $(y, x - 15)$ با هم برابر باشند.	۱
۷	با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها، ثابت کنید: $A - B = A - (A \cap B)$	۱/۵
۸	رابطه ی R روی R^2 به صورت زیر تعریف شده است: $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow (y - t) = 3(x - z)$ الف) نشان دهید که R یک رابطه هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[(2, 3)]$ را مشخص کنید.	۱/۵
۹	تمام ترکیبات دورقمی بدون تکرار، مجموعه ی اعداد $\{1, 2, 3\}$ را روی کارت های مختلف نوشته ایم (هر ترکیب روی یک کارت)، یک کارت را به طور تصادفی خارج می کنیم مطلوب است: الف) فضای نمونه ای ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت زوج باشد. ج) پیشامد B که در آن روی کارت عددی اول باشد.	۲
	« ادامه ی سؤالات در صفحه ی دوم »	

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۶ / ۶ / ۱۳۹۲	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۲		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱۰	نقطه ای به تصادف درون مربعی به ضلع ۲ واحد در نظر می گیریم، مطلوب است احتمال آن که فاصله آن نقطه از هر راس مربع بیشتر از $\frac{1}{2}$ باشد.	۱/۵
۱۱	تاس سالمی را ۵ بار پرتاب می کنیم مطلوب است احتمال آن که ۳ بار عدد زوج بیاید.	۰/۷۵
۱۲	سه دونه A و B و C با هم مسابقه می دهند، اگر احتمال برد A با B برابر باشد و احتمال برد هر کدام از آنها ۲ برابر برد C باشد، احتمال آنکه B یا C برنده شود چقدر است؟	۱/۲۵
۱۳	از مجموعه $A = \{1, 2, \dots, 1000\}$ عددی به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال این که عدد انتخابی بر ۳ و یا بر ۵ یا بر هر دو بخش پذیر باشد چقدر است؟	۲
۱۴	برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ی S اگر $A \subseteq B$ ثابت کنید: $P(B - A) = P(B) - P(A)$	۱/۵
	« موفق باشید »	۲۰

باسمه تعالی

ساعت شروع: ۱۰ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۶ / ۶ / ۱۳۹۲		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۲

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	$P(1): 1 = \frac{1(1+1)}{2} \Rightarrow 1 = 1 \quad (0/25)$ $P(K): 1+2+3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (0/25)$ $P(K+1): 1+2+3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (0/25)$ $P(K+1): 1+2+3 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \quad (0/25)$ $= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (0/5)$	۱/۵
۲	<p>اگر ۳۰ نفر دانش آموز به منزله کبوتران و روزهای هفته به منزله لانه ها باشند (۰/۲۵)</p> $\begin{array}{l} 30 \\ \hline 28 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 7 \\ \hline 4 \end{array} \Rightarrow 4+1=5 \quad (0/5)$ <p>بنا به اصل لانه کبوتری حداقل ۵ نفر از دانش آموزان در یک روز هفته متولد شده اند. (۰/۵)</p>	۱/۲۵
۳	$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \quad (0/5)$ <p>درستی عبارت بدیهی است. بنابراین تمامی روابط برگشت پذیر است. (۰/۲۵)</p>	۱/۲۵
۴	<p>فرض می کنیم n فرد نباشد پس زوج است (فرض خلف) (۰/۵)</p> $n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2(2k^2) = 2k' \quad (0/5)$ <p>به تناقض رسیدیم پس فرض خلف باطل و حکم صحیح است. (۰/۵)</p>	۱/۵
	« ادامه در صفحه ی دوم »	

باسمه تعالی

ساعت شروع: ۱۰ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۶ / ۶ / ۱۳۹۲		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۲

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

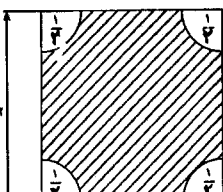
۱/۵	<p>الف) $A \times B = \{(3,2)(3,0)(3,-1)(1,2)(1,0)(1,-1)\}$ (./۷۵)</p> <p>رسم (۰/۷۵)</p>	۵
۱	$\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \Rightarrow (x-y)(x+y) = 15 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow 2(x+y) = 15 \Rightarrow x+y = 5 \quad (./۵)$ $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow x=4, y=1 \quad (./۲۵) \quad (./۲۵)$	۶
۱/۵	$A - (A \cap B) = A \cap (A \cap B)' = A \cap (A' \cup B') = (A \cap A') \cup (A \cap B') = \Phi \cup (A \cap B') = (A \cap B') = (A - B)$ <p>(./۲۵) (./۲۵) (./۲۵) (./۲۵) (./۲۵)</p>	۷
۱/۵	<p>$(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow (y-t) = 3(x-z)$</p> <p>۱) $(x, y) R(x, y) \Rightarrow (y-y) = 3(x-x)$ (./۲۵) بازتابی.</p> <p>۲) $(x, y) R(z, t) \Rightarrow (y-t) = 3(x-z) \Rightarrow (t-y) = 3(z-x) \Rightarrow (z, t) R(x, y)$ (./۲۵) تقارنی</p> <p>۳) $\left. \begin{aligned} (x, y) R(z, t) &\Rightarrow (y-t) = 3(x-z) \\ (z, t) R(e, f) &\Rightarrow (t-f) = 3(z-e) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y-t+t-f = 3(x-z) + 3(z-e) \Rightarrow (y-f) = 3(x-e) \Rightarrow (x, y) R(e, f)$</p> <p>تعدی (./۲۵)</p> <p>پس رابطه R هم ارزی است (۰/۲۵)</p> <p>(ب)</p> <p>$[(2, 3)] = \{(x, y) \in R^2 \mid (x, y) R(2, 3)\} = \{(x, y) \mid y - 3 = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x - 3\}$ (./۵)</p>	۸
	«ادامه در صفحه‌ی سوم»	

باسمه تعالی

ساعت شروع: ۱۰ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۲ / ۶ / ۱۶		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۲	

نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
------	---------------	------

۲	الف) $S = \{12, 13, 21, 31, 23, 32\}$ (۰/۵) ب) $A = \{12, 32\}$ (۰/۷۵) ج) $B = \{13, 31, 23\}$ (۰/۷۵)	۹
---	---	---

۱/۵	<p>در چهار گوشه مربع چهار ربع دایره به شعاع $\frac{1}{2}$ و به مرکز راس های مربع داریم که دایره ای به شعاع $\frac{1}{2}$ را تشکیل می دهند: (۰/۵)</p>  <p>$a_S = 2 \times 2 = 4$ (۰/۲۵)</p> <p>$a_A = 4 - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \pi\right) = 4 - \frac{\pi}{4}$ (۰/۲۵)</p> <p>$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{4 - \frac{\pi}{4}}{4} = \frac{16 - \pi}{16}$ (۰/۵)</p>	۱۰
-----	--	----

۰/۷۵	$P(A) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{5}{2}} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = \frac{5}{16}$ (۰/۲۵)	۱۱
------	--	----

۱/۲۵	<p>$P(C) = x$</p> <p>$P(A) = P(B) = 2x$ (۰/۲۵)</p> <p>$P(A) + P(B) + P(C) = 1 \Rightarrow 2x + 2x + x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{2}{5}, P(C) = \frac{1}{5}$</p> <p>$P(B \cup C) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ (۰/۵)</p>	۱۲
------	--	----

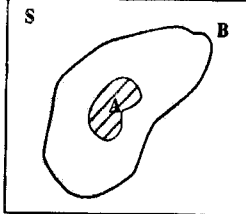
«ادامه در صفحه‌ی چهارم»		
-------------------------	--	--

باسمه تعالی

ساعت شروع: ۱۰ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۲ / ۶ / ۱۶		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۲	

نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
------	---------------	------

۲	<p>اگر A پیشامد بخش پذیر بودن عدد انتخابی بر ۳ و B پیشامد بخش پذیر بودن عدد انتخابی بر ۵ باشد آنگاه:</p> $P(A) = \frac{333}{1000} \quad (0/5)$ $P(B) = \frac{200}{1000} \quad (0/5)$ $P(A \cap B) = \frac{66}{1000} \quad (0/5)$ $P(A \cup B) = \frac{333}{1000} + \frac{200}{1000} - \frac{66}{1000} = \frac{467}{1000} \quad (0/25)$ $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (0/25)$	۱۳
---	---	----

۱/۵	 <p>می دانیم $(0/25) B = (B - A) \cup A$ همچنین A و $(B - A)$ دو پیشامد از هم جدا هستند زیرا: $(0/5) A \cap (B - A) = \Phi$ بنابراین:</p> $P(B) = P(B - A) + P(A) \quad (0/25) \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A) \quad (0/5)$	۱۴
-----	---	----

مصححین گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر هم به تناسب نمره منظور فرمایید.