

## باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۴/۰۶/۰۵	تعداد صفحه: ۲
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۳۹۴		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

توجه: استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی، جذر و درصد) بلامانع است.

ردیف	سؤالات	نمره
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید: الف) اگر مجموعه A دارای زیر مجموعه سره نباشد، در این صورت مجموعه A برابر ..... است. ب) نقطه ای مانند x را به طور تصادفی در بازه (۱,۴) انتخاب می کنیم. احتمال اینکه $۲ < x < ۳$ باشد برابر ..... است.	۰/۵
۲	با استفاده از اصل استقرای ریاضی برای هر عدد طبیعی n، ثابت کنید $۷^n - ۱$ بر ۶ بخش پذیر است.	۱/۵
۳	کدام یک از احکام زیر درست است؟ احکام درست را اثبات کنید و برای رد احکام نادرست یک مثال نقض بیاورید. الف) اگر $x > ۲$ ، آنگاه $x > \frac{۵}{۲}$ ب) اگر x و y هر دو گویا باشند، آنگاه $x + y$ گویا است.	۱/۲۵
۴	با استفاده از استدلال بازگشتی، ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی کوچکتر یا مساوی نصف مجموع مربع های آن ها است.	۱
۵	با استفاده از استدلال برهان خلف، ثابت کنید که با فرض صحیح بودن n، اگر $n^2$ زوج باشد، n نیز زوج است.	۰/۷۵
۶	مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۲ مفروض است. پنج نقطه را داخل مثلث در نظر می گیریم. نشان دهید حداقل دو نقطه وجود دارند که فاصله آن ها کمتر از ۱ است.	۱
۷	مجموعه های $A = \{\emptyset, ۲\}$ و $B = \{\emptyset, \{۲\}\}$ مفروض اند: الف) مجموعه $A-B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید. ب) مجموعه توانی A را با نوشتن اعضا مشخص کنید.	۰/۷۵
۸	با استفاده از قوانین جبرمجموعه ها ثابت کنید: $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$	۱
۹	مجموعه های $A = \{۲k + ۱ \mid k \in Z, -۲ < k \leq ۰\}$ و $B = \{x \mid x \in N, x^2 \leq ۲\}$ را در نظر بگیرید. الف) مجموعه های A و B را با نوشتن اعضا مشخص کنید. ب) مجموعه های $B^2$ و $A \times B$ و $(A \times B) \cap B^2$ را با اعضا مشخص کنید.	۱/۵
۱۰	رابطه $R = \{(a, b) \mid a^2 \leq b\}$ روی مجموعه $A = \{۱, ۲, ۵\}$ تعریف شده است. کدام یک از گزینه های زیر نادرست است؟ الف) $۲ \in R$ ب) $۵ \notin R$ ج) $(۵, ۱) \notin R$ د) $(۲, ۱) \in R$	۰/۵
۱۱	رابطه R روی مجموعه Z به صورت زیر تعریف شده است: الف) ثابت کنید R یک رابطه هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی [۳] را مشخص کنید.	۱/۵
	« ادامه سوالات در صفحه دوم »	

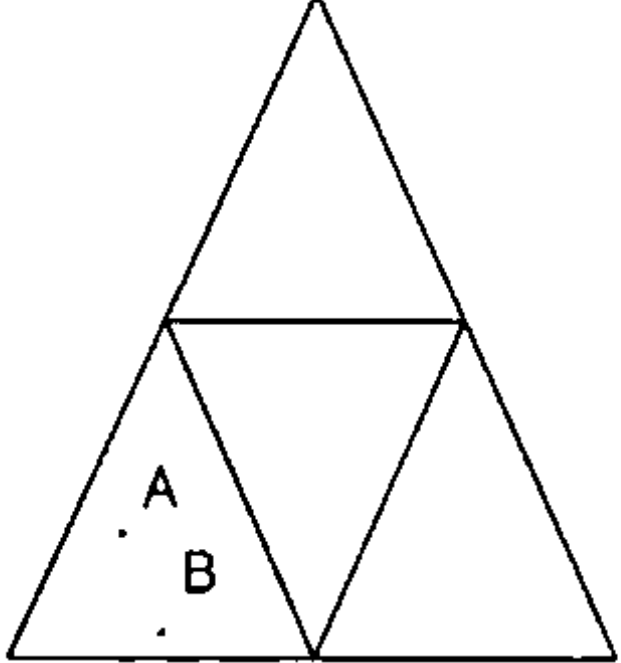
## باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۴ / ۰۶ / ۰۵	تعداد صفحه: ۲
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۳۹۴		مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	
<b>توجه:</b> استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی، جذر و درصد) بلامانع است.			
ردیف	سؤالات		
نمره			
۱۲	اگر A و B دو پیشامد معین باشند، پیشامد "پیشامد A و پیشامد B هر دو باهم اتفاق بیفتد" را با یک عبارت مجموعه ای مناسب بنویسید و آن را با استفاده از نمودار ون نشان دهید.		
۱۳	هر یک از اعداد طبیعی فرد کوچکتر از ۱۲ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت ها یکی را به طور قرعه برمی داریم. مطلوب است: الف) فضای نمونه ای ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت بر ۳ بخش پذیر باشد. ج) پیشامد B که عدد روی کارت عددی اول و بزرگتر از ۵ باشد.		
۱۴	از یک جعبه محتوی ۴ لامپ سالم و ۵ لامپ معیوب، ۳ لامپ به طور تصادفی بیرون می آوریم. مطلوب است احتمال آن که: الف) هر سه لامپ سالم باشد. ب) حداقل دو لامپ سالم باشد.		
۱۵	سکه سالمی را ۱۵ بار پرتاب می کنیم، احتمال آنکه ۷ بار برآمد سکه رو باشد چقدر است؟ (ساده کردن جواب الزامی نیست).		
۱۶	تاس به گونه ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد کوچکتر از ۴، سه برابر احتمال وقوع هر عدد بزرگتر یا مساوی ۴ است. اگر در یک پرتاب این تاس، A پیشامد وقوع عددی زوج باشد، $P(A)$ را بیابید.		
۱۷	دو عدد حقیقی x و y را در بازه $[-1, 1]$ به تصادف انتخاب می کنیم، مطلوب است احتمال آنکه $x^2 + y^2 \leq 1$ باشد.		
۱۸	برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه ای S داریم: $P(A) = P(B) = 1/2$ ، نشان دهید: $P(A \cap B) = 1/4$		
۲۰	جمع نمره « موفق باشید »		

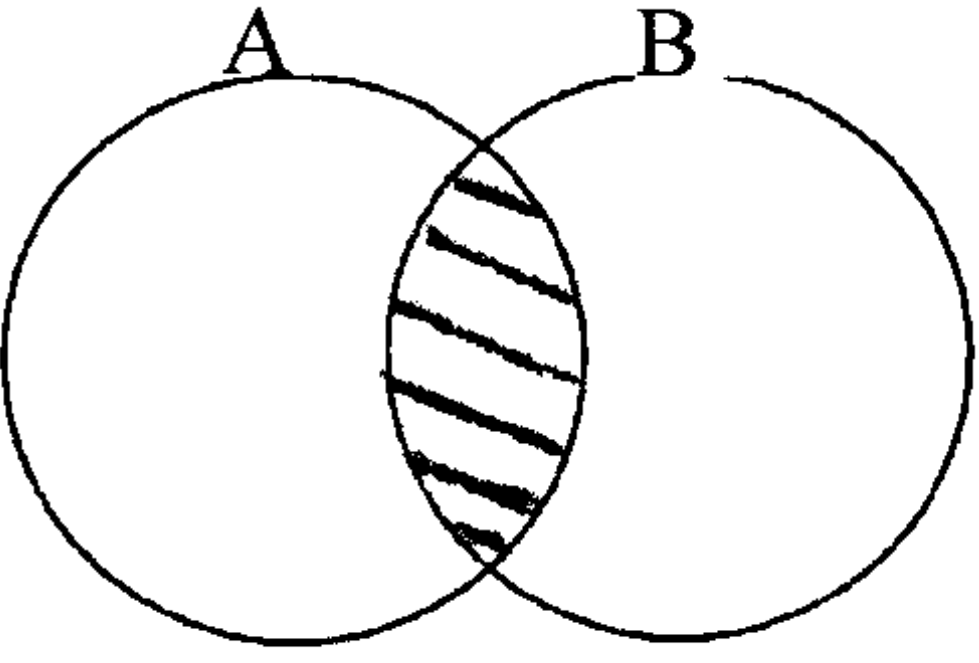


## باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۴ / ۰۶ / ۰۵	
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۳۹۴	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	الف) $A = \emptyset$ (۰/۲۵) ص ۴۱ ب) $\frac{1}{3}$ (۰/۲۵) ص ۱۰۹	۰/۱۵
۲	(۰/۲۵) که بر ۶ بخش پذیر است پس درست است. ص ۱۵ $P(1) : 7-1=6=6 \times 1$ : آزمون استقراء (۰/۲۵) $P(K) : 7^k - 1 = 6a, k \in N$ فرض استقراء (۰/۲۵) $P(K+1) : 7^{k+1} - 1 = 6a'$ حکم استقراء (۰/۲۵) $7(7^k - 1) = 7 \times 6a$ طرفین فرض استقراء را در ۷ ضرب می کنیم. اثبات (۰/۲۵) $7^{k+1} - 7 = 7 \times 6a \rightarrow 7^{k+1} - 1 - 6 = 7 \times 6a$ بنابراین حکم برقرار است. (۰/۲۵) $\rightarrow 7^{k+1} - 1 = 6(7a + 1) = 6a'$	۱/۱۵
۳	الف) نادرست (۰/۲۵) - ارائه مثال نقض (۰/۲۵) ص ۲۸ ب) ص ۲۷ فرض: $\begin{cases} x = \frac{a}{b} \\ y = \frac{c}{d} \end{cases} a, b, c, d \in Z, (b, d \neq 0)$ $x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ (۰/۲۵) صورت و مخرج کسر عددی صحیح است و $bd \neq 0$ در نتیجه $x + y$ گویا است. (۰/۲۵)	۱/۲۵
۴	ص ۲۸ $a \cdot b \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$ (۰/۲۵) به یک رابطه بدیهی رسیدیم و چون همه ی روابط برگشت پذیر است در نتیجه حکم برقرار است. (۰/۲۵)	۱
۵	فرض کنیم n فرد باشد: $n = 2k + 1$ (۰/۲۵) ص ۲۸ $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ (۰/۲۵) $n^2$ فرد می شود که خلاف فرض است. (۰/۲۵) پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.	۰/۷۵
۶	سطح مثلث را به ۴ مثلث مساوی تقسیم می کنیم. ۴ مثلث را ۴ لانه و ۵ نقطه را ۵ کبوتر در نظر می گیریم (۰/۲۵) بنا بر اصل لانه کبوتری حداقل دو تا از نقطه ها به یکی از مثلث های کوچک تعلق دارند. (۰/۲۵) طول هر ضلع مثلث کوچک ۱ می باشد. بنا بر این حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آنها کمتر از ۱ است. (۰/۲۵)	۱
	رسم شکل (۰/۲۵) ص ۳۳ 	
	« ادامه راهنما در صفحه دوم »	

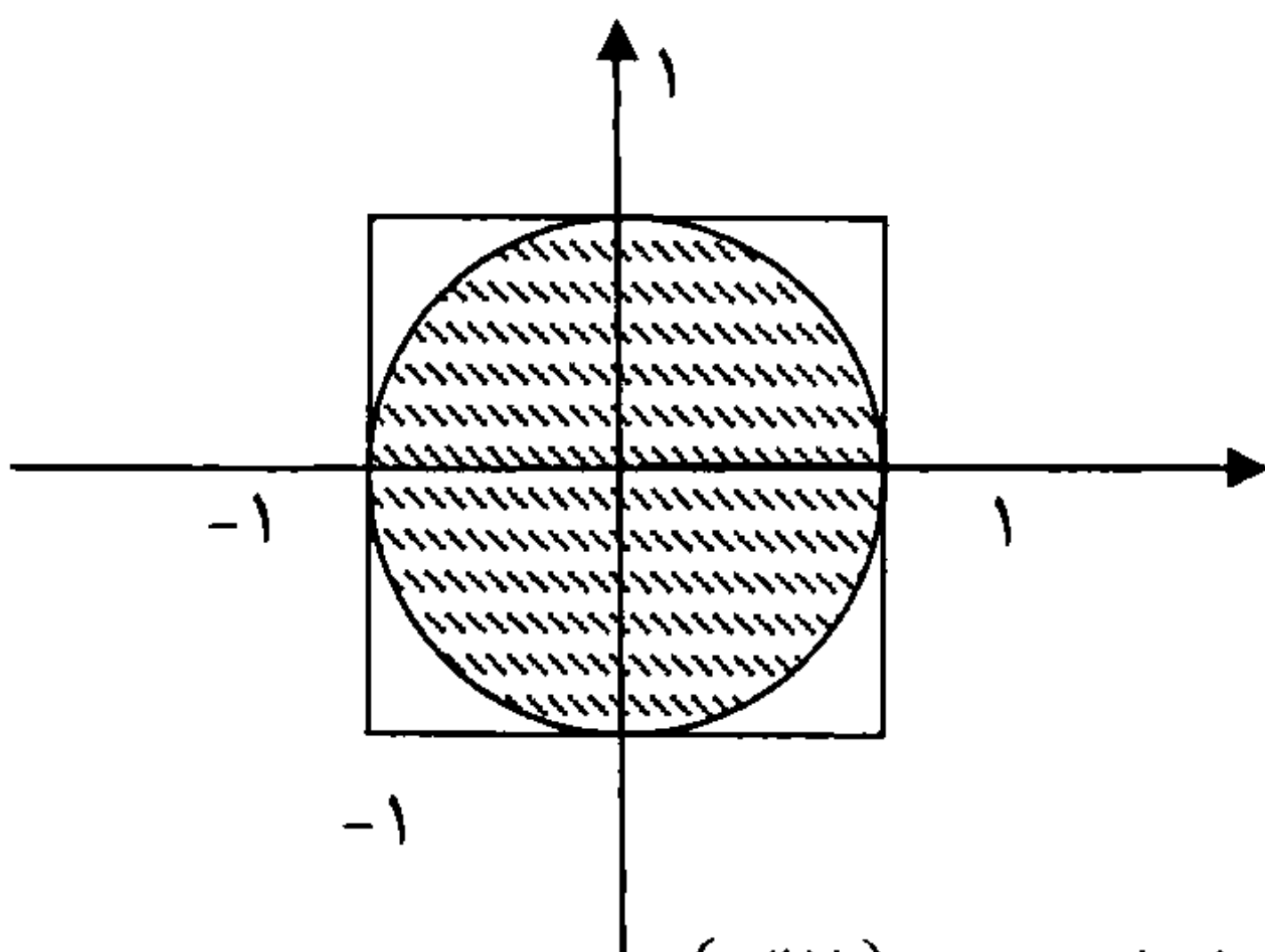
## باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال		رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۴ / ۰۶ / ۰۵	
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۳۹۴		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح		
۷	الف) $A - B = \{2\}$ (۰/۲۵) ص ۵۶	ب) $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{2\}, A\}$ (۰/۱۵) (هر دو عضو مجموعه) (۰/۲۵) ص ۴۱	۰/۲۵ ۰/۵
۸	ص ۵۷ $A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)'$ (۰/۲۵) = $A \cap (B' \cup C')$ (۰/۲۵) = $(A \cap B') \cup (A \cap C')$ (۰/۲۵) = $(A - B) \cup (A - C)$ (۰/۲۵)		۱
۹	ص ۶۱ الف) $A = \{-1, 1\}$ (۰/۲۵) $B = \{1\}$ (۰/۲۵) ب) $B^c = \{(1, 1)\}$ (۰/۲۵), $A \times B = \{(-1, 1), (1, 1)\}$ (۰/۵) $(A \times B) \cap B^c = \{(1, 1)\}$ (۰/۲۵)		۱/۵
۱۰	گزینه «د» نادرست است. (۰/۵) ص ۶۶		۰/۵
۱۱	برقرار است. (۰/۲۵) تقارنی: $mRn \Rightarrow m^2 + n = n^2 + m \Rightarrow n^2 + m = m^2 + n \Rightarrow nRm$ (۰/۲۵) تعدی: $\begin{cases} mRn \Rightarrow m^2 + n = n^2 + m \\ nRt \Rightarrow n^2 + t = t^2 + n \end{cases}$ (۰/۲۵) با جمع طرفین تساوی $\Rightarrow m^2 + t = t^2 + m \Rightarrow mRt$ (۰/۲۵) بنابر این R یک رابطه هم ارزی است. ب) $[3] = \{x \in Z   xR3\}$ (۰/۲۵) $x^2 + 3 = 3^2 + x$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$	ص ۶۶	۱/۵
۱۲	ص ۸۱		۰/۵
		$A \cap B$ (۰/۲۵)	(۰/۲۵)
۱۳	ص ۸۳ (۰/۱۵) الف) $S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ ب) $A = \{3, 9\}$ (۰/۱۵) ج) $B = \{7, 11\}$ (۰/۱۵)		۱/۵
«ادامه راهنما در صفحه سوم»			



باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۴ / ۰۶ / ۰۵	
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۳۹۴	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۴	<p>الف) <math>n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = 84</math> (۰/۲۵) <math>n(A) = \binom{4}{2} = 6</math> (۰/۲۵) ص ۸۷</p> <p><math>P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{84} = \frac{1}{14}</math> (۰/۲۵)</p> <p>ب) <math>n(B) = \binom{4}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{4}{3} = 24</math> (۰/۲۵) <math>p(B) = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}</math> (۰/۲۵)</p>	۱/۵
۱۵	<p><math>P(\text{۷ بار رو بیاید}) = \frac{\binom{15}{7} (0.25)^7 (0.75)^8}{2^{15}}</math> (۰/۱۵) ص ۹۱</p>	۱
۱۶	<p><math>\begin{cases} P(1) = P(2) = P(3) = 3\omega \\ P(4) = P(5) = P(6) = \omega \end{cases}</math> (۰/۱۵) ص ۹۹</p> <p><math>A = \{2, 4, 6\}</math></p> <p><math>P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1</math> (۰/۲۵) <math>\Rightarrow 12\omega = 1</math></p> <p><math>\Rightarrow \omega = \frac{1}{12}</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}</math> (۰/۲۵)</p>	۱/۵
۱۷	<p><math>a_S = 2 \times 2 = 4</math> (۰/۲۵) مساحت مربع به ضلع ۲</p>  <p><math>a_A = \pi R^2 = \pi \times 1 = \pi</math> (۰/۲۵) مساحت دایره ای به شعاع ۱</p> <p><math>P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\pi}{4}</math> (۰/۲۵)</p> <p>رسم فضای نمونه (۰/۲۵) رسم پیشامد (۰/۲۵)</p> <p>ص ۱۰۲ و ۱۰۸</p>	۱/۵
۱۸	<p>می دانیم: <math>P(A \cap B) \leq 1</math> (۰/۲۵)</p> <p>می دانیم: <math>P(A \cup B) \leq 1</math> (۰/۲۵) <math>\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>\Rightarrow 1 + 1 - P(A \cap B) \leq 1 \Rightarrow P(A \cap B) \geq 1</math> (۰/۲۵)</p> <p>بنابراین: <math>P(A \cap B) \leq 1</math> و <math>P(A \cap B) \geq 1 \Rightarrow P(A \cap B) = 1</math> (۰/۲۵) ص ۱۲۱</p>	۱/۲۵
۲۰	جمع نمره « موفق باشید »	

مصححین گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر هم به تناسب نمره منظور فرمایید.