باسمه تعالی

سوالات امتحان نهایی درس: **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)**	رشته: **علوم ریاضی**	ساعت شروع: **۸/۳۰ صبح**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
پیش دانشگاهی			تاریخ امتحان: **۱۳۹۰/۱۲/۶**
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی اول (اسفند ماه ۱۳۹۰)			**مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir**

ردیف	سوالات	نمره
۱	ثابت کنید معکوس یک عدد منفی،عددی منفی است.	۱
۲	بازه ی $(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$ را به صورت یک همسایگی محذوف متقارن به مرکز a و شعاع ε بنویسید.	۱
۳	ثابت کنید اگر دنباله ی $\{a_n\}$ همگرا باشد، آن گاه حد آن یکتا است.	۲
٤	یکنوایی دنباله ی $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$ را بررسی کنید.	۱/۲۵
۵	نشان دهید سری $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$ همگرا است.	۱/۵
٦	آیا سری $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{3k-1}{3k}$ همگراست؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید.	۰/۷۵
۷	با استفاده از تعریف حد، ثابت کنید: $\lim_{x\to -1}\frac{(-1)^{[x]}(x^2-1)}{x-1}=0$.	۱/۲۵
۸	با استفاده از دنباله ها، ثابت کنید تابع $f(x)=\frac{\lvert x\rvert}{x}$ در نقطه ی $x=0$ حد ندارد.	۱/۲۵
۹	حدود توابع زیر را بدون استفاده از هم ارزی و قاعده ی هوپیتال محاسبه کنید. الف) $\lim_{x\to 0} x^2[\frac{1}{x^2}]$ ب) $\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ ج) $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{1+x}\times Arc\tan x$	۲/۷۵
۱۰	نشان دهید حداقل یکی از ریشه های معادله ی $x^3-3x+1=0$ در بازه ی $[0,1]$ قرار دارد.	۱
۱۱	معادله ی کلیه ی مجانب های تابع $y=\frac{x^3+3}{x^2-2x}$ را بنویسید.	۱/۲۵
۱۲	نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=\frac{3-\sqrt{x+9}}{x+9}$ را در دامنه اش تعیین کنید.	۱
۱۳	معادله ی خط مماس بر منحنی تابع $y=x^2-5x$ را در نقطه ای به طول ۲ واقع بر منحنی به دست آورید.	۱/۲۵
١٤	اگر $g(x)=x^3-1$ و $f'(x)=\sqrt{3x+16}$ باشد، مقدار عددی $(fog)'(1)$ را محاسبه کنید.	۱/۵
۱۵	ثابت کنید اگر تابع g در نقطه ی a مشتق پذیر باشد، آن گاه تابع $\frac{1}{g}$ نیز در نقطه ی a مشتق پذیر است و $(\frac{1}{g})'(a)=\frac{-g'(a)}{g^2(a)}$.	۱/۲۵
	موفق باشید. جمع نمره	۲۰

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)**	رشته: **علوم ریاضی**	مدت امتحان : **۱۲۰دقیقه**
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان : **۶ / ۱۲/ ۱۳۹۰**
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی اول (اسفند ماه ۱۳۹۰)		**مرکز سنجش آموزش و پرورش** **http://aee.medu.ir**

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	$\underbrace{a<0 \xrightarrow{\times\frac{1}{a^2}>0}}_{(0/25)} \underbrace{\frac{1}{a^2}\times a<\frac{1}{a^2}\times 0}_{(0/5)} \Rightarrow \frac{1}{a}<0\ (0/25)$	۱
۲	$a=\frac{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}{2}=2\ (0/25)\quad,\quad \varepsilon=\frac{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{2}=\frac{1}{2}\ (0/25) \Rightarrow \{x\in R\mid 0<\lvert x-2\rvert<\frac{1}{2}\}\quad (0/5)$	۱
۳	**برهان خلف: فرض کنیم دنباله دارای دو حد متمایز مانند l_1 , l_2 باشد، داریم : (۰/۲۵)** $\lim_{n\to+\infty} a_n=l_1 \Rightarrow \forall\varepsilon>0\,,\exists M_1\in N \ni n\geq M_1 \Rightarrow \lvert a_n-l_1\rvert<\frac{\varepsilon}{2}\ (0/25)$ $\lim_{n\to+\infty} a_n=l_2 \Rightarrow \forall\varepsilon>0\,,\exists M_2\in N \ni n\geq M_2 \Rightarrow \lvert a_n-l_2\rvert<\frac{\varepsilon}{2}\ (0/25)$ **فرض می کنیم $M=Max\{M_1,M_2\}$، پس برای هر $n\geq M$ داریم: (۰/۲۵)** $0\leq\lvert l_1-l_2\rvert=\lvert l_1-a_n+a_n-l_2\rvert\leq\lvert a_n-l_1\rvert+\lvert a_n-l_2\rvert<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\ (0/5) \Rightarrow 0\leq\lvert l_1-l_2\rvert<\varepsilon \Rightarrow l_1=l_2\ (0/25)$ **پس فرض خلف باطل و دنباله ی همگرا تنها یک حد دارد. (۰/۲۵)**	۲
٤	**روش اول:** $\underbrace{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\times\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}_{(0/25)}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\ (0/25) \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}+1}\,,\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\,,\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}\,,}_{(0/5)}\ldots$ **دنباله نزولی است. (۰/۲۵)** **روش دوم:** a_n نزولی $\Leftrightarrow \underbrace{a_n>a_{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{n+1}-\sqrt{n}>\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}_{(0/25)} \Leftrightarrow \underbrace{2\sqrt{n+1}>\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}_{(0/25)}$ $\Leftrightarrow \underbrace{4(n+1)>2n+2+2\sqrt{n^2+2n}}_{(0/25)} \Leftrightarrow \underbrace{n+1>\sqrt{n^2+2n} \Leftrightarrow n^2+2n+1>n^2+2n}_{(0/25)} \Leftrightarrow \underbrace{1>0}_{(0/25)}$	۱/۲۵
۵	$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=1+1+\underbrace{\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\cdots+\frac{1}{1\times2\times3\times\cdots\times n}}_{(0/25)})<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\ (0/25)$ **عبارت** $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$ **یک مجموع هندسی است. (۰/۲۵) بنابراین** $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3\ (0/5)$ **. پس سری** **صعودی و کراندار است در نتیجه همگراست. (۰/۲۵)**	۱/۵
٦	**خیر. واگراست. (۰/۲۵) . زیرا** $\underbrace{\lim_{k\to+\infty}\frac{3k-1}{3k}}_{(0/25)}=1\neq0\ (0/25)$	۰/۷۵
۷	$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists\ \delta>0 \ni 0<\lvert x+1\rvert<\delta \Rightarrow \lvert\frac{(-1)^{[x]}(x^2-1)}{x-1}-0\rvert<\varepsilon\quad(0/5)$ $\lvert\frac{(-1)^{[x]}(x^2-1)}{x-1}\rvert=\underbrace{\lvert(-1)^{[x]}\rvert\times\lvert\frac{x^2-1}{x-1}\rvert}_{(0/25)}=\underbrace{1\times\lvert x+1\rvert}_{(0/25)}<\varepsilon \Rightarrow \delta\leq\varepsilon\ (0/25)$	۱/۲۵
	ادامه در برگه ی دوم	

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)**	رشته: **علوم ریاضی**	مدت امتحان : **۱۲۰قیقه**
	پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان : **۶ /۱۲ / ۱۳۹۰**
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی اول (اسفند ماه ۱۳۹۰)		**مرکز سنجش آموزش و پرورش** **http://aee.medu.ir**

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۸	$\begin{cases} a_n=\frac{1}{n}\ (0/25) \\ b_n=-\frac{1}{n}\ (0/25) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty} b_n=0\ \ (0/25) \\ f(a_n)=1\ ,\ \ f(b_n)=-1\ (0/25) \end{matrix}$ چون $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\neq \lim_{n\to+\infty} f(b_n)$، لذا $f(x)$ در صفر حد ندارد . (۰/۲۵)	۱/۲۵
۹	الف) $\frac{1}{x^2}-1<[\frac{1}{x^2}]\le\frac{1}{x^2}\ (0/25) \xrightarrow{\times x^2} \underbrace{1-x^2<x^2[\frac{1}{x^2}]\le 1}_{(0/25)}\ ,\ \lim_{x\to0}(1-x^2)=\lim_{x\to0}(1)=1\ (0/25)$ $\lim_{x\to0}x^2[\frac{1}{x^2}]=1(0/25)$ ب) $\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x-2}\times\sqrt{x+2}\ \ (0/25)}{\sqrt{x-2}\times\sqrt{x-2}\ \ (0/25)}=\underbrace{\frac{2}{0^+}}_{(0/25)}=+\infty\ \ (0/25)$ ج) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x}\times Arc\tan x=\underbrace{2}_{(0/25)}\times\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{(0/25)}=\pi\ \ (0/25)$	۲/۷۵
۱۰	تابع $f=x^3-3x+1$ در بازه ی $[0,1]$ پیوسته است (۰/۲۵) و $f(0)\times f(1)=-1<0$ (۰/۵) . طبق نتیجه ی قضیه ی مقدار میانی، معادله حداقل دارای یک ریشه است. (۰/۲۵)	۱
۱۱	مجانب های قائم $x^2-2x=0\ \ (0/25)\Rightarrow\begin{cases}x\to0\\y\to\infty\end{cases}\Rightarrow x=0\ \ (0/25)\ ,\ \begin{cases}x\to2\\y\to\infty\end{cases}\Rightarrow x=2\ \ (0/25)$ $x^3+3=(x^2-2x)\ (x+2)+(4x+3)\ \Rightarrow\ (0/25)\ \Rightarrow$ مجانب مایل $y=x+2$ **(۰/۲۵)**	۱/۲۵
۱۲	$\begin{matrix} x+9\ge0\Rightarrow x\ge-9\ (0/25) \\ x+9\ne0\Rightarrow x\ne-9\ (0/25)\end{matrix}\ \Rightarrow D_f=(-9,+\infty)\ \ (0/25)$. نقاط ناپیوستگی برابر است با $(-\infty,-9]$.(۰/۲۵)	۱
۱۳	$f(2)=-6\ \ (0/25)\ \ ,\ \ y'=2x-5\ (0/25)\ \Rightarrow m=-1\ (0/25)$ $y-(-6)=(-1)(x-2)\ (0/25)\Rightarrow y=-x-4\ (0/25)$	۱/۲۵
۱۴	$g'(x)=3x^2\ \ (0/25)\Rightarrow g'(1)=3\ \ (0/25)$ $(fog)'(1)=\underbrace{g'(1)\times f'(g(1))}_{(0/25)}=3\times\underbrace{f'(0)}_{(0/25)}=3\times\underbrace{4}_{(0/25)}=12\ \ \ (0/25)$	۱/۵
۱۵	$(\frac{1}{g})'(a)=\underbrace{\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{g(a+h)}-\frac{1}{g(a)}}{h}}_{(0/25)}=\underbrace{\lim_{h\to0}\frac{g(a)-g(a+h)}{h(g(a+h)g(a))}}_{(0/25)}$ $=\underbrace{\lim_{h\to0}\frac{-1}{g(a+h)g(a)}\times\lim_{h\to0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}}_{(0/25)}=\underbrace{\frac{-1}{g^2(a)}\times g'(a)=}_{(0/25)}=\frac{-g'(a)}{g^2(a)}\ \ (0/25)$	۱/۲۵
	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر	۲۰