www.konkur.in

باسمه تعالی

سوالات امتحان نهایی درس: **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)**	رشته: **علوم ریاضی**	ساعت شروع: **۸/۳۰ صبح**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
پیش دانشگاهی			تاریخ امتحان: **۱۳۹۰/۱۲/۱۰**
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی اول (اسفند ماه ۱۳۹۰)			**مرکز سنجش آموزش و پرورش** **http://aee.medu.ir**

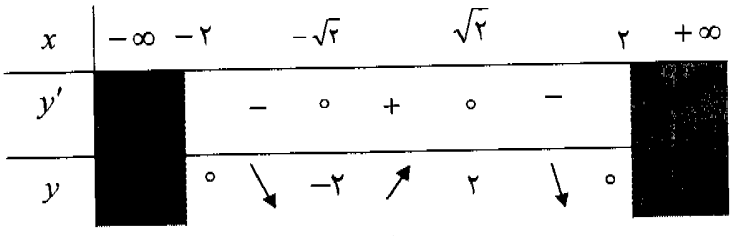
ردیف	سوالات	نمره
۱	تابع $f(x)=\sqrt{x^3+1}$ را در نظر بگیرید. معادله ی خط مماس در نقطه ی A' به طول ۳ واقع بر f^{-1} را بنویسید.	۱/۵
۲	نقطه ی M روی مسیر $3x^2-y^2+2xy=3$ در حرکت است. هنگامی که M در نقطه ی $(1,2)$ قرار دارد، اگر x با سرعت ۲ متر بر ثانیه کاهش یابد، y با چه سرعتی تغییر می کند؟	۱
۳	مشتق پذیری تابع $f(x)=x\|x\|$ و مشتق دوم آن را در نقطه ی $x=0$ بررسی کنید.	۱/۵
٤	نقاط ماکسیمم ومینیمم مطلق تابع $y=x+\frac{4}{x}$ را در بازه ی $[-3,-1]$ تعیین کنید.	۱/۷۵
۵	با استفاده از قضیه ی رول ثابت کنید معادله ی $x^3+x+1=0$ فقط یک ریشه دارد.	۱/۵
٦	با زه هایی که تابع $y=x\sqrt{4-x^2}$ بر آن ها صعودی یا نزولی است را تعیین کنید.	۲/۲۵
۷	در تابع $f(x)=x^3+9x^2+1$ جهت تقعر و نقطه ی عطف را در صورت وجود پیدا کنید.	۱/۵
۸	جدول تغییرات و نمودار تابع $y=\frac{\cos x}{1+\cos x}$ را در بازه ی $[0,2\pi]$ رسم کنید.	۲
۹	با استفاده از قاعده ی هوپیتال حد زیر را محاسبه کنید. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\tan^2 x}$	۱
۱۰	مجموع بالای ریمان را برای تابع $f(x)=x^2+1$ روی بازه ی $[0,1]$ بیابید.	۱/۲۵
۱۱	ثابت کنید اگر f در بازه ی $[a,b]$ پیوسته باشد، آن گاه عدد حقیقی c، $a\le c\le b$ وجود دارد که $\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$.	۱
۱۲	اگر f تابعی انتگرال پذیر و فرد باشد و بدانیم $\int_3^5 f(x)\,dx=4$، مطلوبست $\int_{-3}^{5}(f(x)+1)\,dx$.	۱
۱۳	اگر مقدار متوسط تابع $f(x)=2x+1$ در بازه ی $[a,2]$ برابر ۳ باشد، مقدار a را به دست آورید.	۱/۲۵
۱٤	انتگرال زیر را محاسبه کنید. $\int_0^2(x^{2[x]}+1)\,dx$	۱/۵
	موفق باشید.	
	جمع نمره	۲۰

forum.konkur.in

www.konkur.in

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)**	رشته: **علوم ریاضی**	مدت امتحان : **۱۲۰ دقیقه**
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان : **۱۰ / ۱۲ / ۱۳۹۰**
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی اول (اسفند ماه ۱۳۹۰)		**مرکز سنجش آموزش و پرورش** http://aee.medu.ir

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	$(۳,a)\in f^{-1}\Rightarrow (a,۳)\in f \Rightarrow \sqrt{a^۳+۱}=۳\Rightarrow a=۲$ (۰/۲۵) $f'(x)=\frac{۳x^۲}{۲\sqrt{x^۳+۱}}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow f'(۲)=۲$ (۰/۲۵) $(f^{-1})'(۳)=\frac{۱}{f'(۲)}=\frac{۱}{۲}$ (۰/۲۵) $\underbrace{y-۲=\frac{۱}{۲}(x-۳)}_{(۰/۲۵)}$	۱/۵
۲	$\underbrace{۶x\frac{dx}{dt}-۲y\frac{dy}{dt}+۲y\frac{dx}{dt}+۲x\frac{dy}{dt}=۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow \underbrace{(۶x+۲y)\frac{dx}{dt}+(۲x-۲y)\frac{dy}{dt}=۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow \underbrace{(۱۰\times(-۲))-۲\frac{dy}{dt}=۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow \frac{dy}{dt}=-۱۰$ (۰/۲۵)	۱
۳	$f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\geq ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}$ $f'_+(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x^۲-۰}{x-۰}=۰$ (۰/۲۵) $f'_-(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{-x^۲-۰}{x-۰}=۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲x & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ -۲x & x<۰\end{cases}$ (۰/۲۵) $f''_+(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۲x-۰}{x-۰}=۲$ (۰/۲۵) , $f''_-(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{-۲x-۰}{x-۰}=-۲$ (۰/۲۵) مشتق دوم در نقطه ی صفر وجود ندارد (۰/۲۵)	۱/۵
٤	$f'(x)=۱-\frac{۴}{x^۲}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow \begin{matrix}x=۲ \text{ غ ق ق } (۰/۲۵)\\ x=-۲\end{matrix}$ $\Rightarrow \begin{cases}f(-۳)=-\frac{۱۳}{۳} & (۰/۲۵)\\ f(-۲)=-۴ & (۰/۲۵)\\ f(-۱)=-۵ & (۰/۲۵)\end{cases}$ تابع در $x=-۲$ ماکسیمم مطلق (۰/۲۵) و در $x=-۱$ مینیمم مطلق دارد. (۰/۲۵)	۱/۷۵
۵	$f(x)=x^۳+x+۱$ تابعی پیوسته است (۰/۲۵). چون $f(۰)=۱, f(-۱)=-۱$ (۰/۲۵)، طبق قضیه ی مقدار میانی حداقل یک ریشه در بازه ی $(-۱,۰)$ دارد (۰/۲۵). اگر f دو ریشه مانند $x_۱$ و $x_۲$ داشته باشد که $x_۲>x_۱$ و $f(x_۲)=f(x_۱)=۰$ ، طبق قضیه ی رول $\exists c\in(x_۱,x_۲)\ ;\ f'(c)=۰$ (۰/۲۵). از طرفی $f'(x)=۳x^۲+۱\neq ۰$ (۰/۲۵). پس فرض خلف باطل و معادله فقط یک ریشه دارد. (۰/۲۵)	۱/۵
٦	 (۰/۵) $D_f=[-۲,۲]$ (۰/۲۵) $f'(x)=\underbrace{\sqrt{۴-x^۲}}_{(۰/۲۵)}+x\times\underbrace{\frac{-۲x}{۲\sqrt{۴-x^۲}}}_{(۰/۲۵)}=۰\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$ (۰/۲۵) تابع در بازه ی $[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}]$ صعودی (۰/۲۵) و در بازه های $[-۲,-\sqrt{۲}]$, $[\sqrt{۲},۲]$ نزولی (۰/۵) است.	۲/۲۵

ادامه در برگه ی دوم

forum.konkur.in

www.konkur.in

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان : ۱۲۰دقیقه
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان : ۱۳۹۰ / ۱۲/ ۱۰
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی اول (اسفند ماه ۱۳۹۰)		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۷

$y' = ۳x^۲ + ۱۸x$ (۰/۲۵)

$\underbrace{y'' = ۶x + ۱۸}_{(۰/۲۵)} = ۰ \Rightarrow x = -۳$ (۰/۲۵)

نقطه ی عطف (۰/۲۵) (−۳,۵۵)

x	$-\infty$	-۳	$+\infty$
y''	−	۰	+
y	∩	۵۵	∪

(۰/۵) — ۱/۵

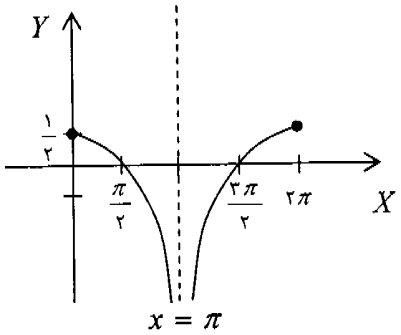
۸

$۱ + \cos x = ۰ \Rightarrow x = \pi$ مجانب قائم (۰/۲۵)

$y' = \frac{-\sin x}{(۱+\cos x)^۲} = ۰$ (۰/۵) $\Rightarrow x = ۰, \pi, ۲\pi$ (۰/۲۵)

x	۰	π	۲π
y'	۰	-	+ ۰
y	$\frac{۱}{۲}$ ↘	$-\infty$ | $-\infty$	↗ $\frac{۱}{۲}$

(۰/۵)



$x = \pi$ (۰/۵) — ۲

۹

$H: \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{(-\sqrt{۲}\sin x)\,(۰/۲۵)}{-۲\tan x\,(۱+\tan^۲ x)\,(۰/۵)} = \frac{۱}{۴}$ (۰/۲۵) — ۱

۱۰

$\Delta x = \frac{۱}{n}$ (۰/۲۵) , $x_i = \frac{i}{n}$ (۰/۲۵)

$U_n(f) = \frac{۱}{n}\underbrace{((\frac{۱}{n})^۲ + ۱ + (\frac{۲}{n})^۲ + ۱ + \cdots + (\frac{n}{n})^۲ + ۱)}_{(۰/۲۵)} = \frac{۱}{n}(\frac{۱+۴+\cdots+n^۲}{n^۲} + n) = \frac{۱}{n}(\underbrace{\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶n^۳}}_{(۰/۲۵)} + n) = \frac{۸n^۲ + ۳n + ۱}{۶n^۲}$ (۰/۲۵) — ۱/۲۵

۱۱

چون $\frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ بین دو مقدار ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع است (۰/۲۵)، بنابر قضیه ی مقدار میانی $\exists c \in [a,b]$ (۰/۲۵) که

$f'(c) = \frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ (۰/۵).

۱

۱۲

چون f فرد است، $\underbrace{\int_{-۳}^{۳} f(x)\,dx = ۰}_{(۰/۲۵)}$. لذا

$\int_{-۳}^{۵}(f(x)+۱)\,dx = \underbrace{\int_{-۳}^{۵} f(x)\,dx}_{(۰/۲۵)} + \underbrace{\int_{-۳}^{۵} dx}_{(۰/۲۵)} = \int_{-۳}^{۳} f(x)\,dx + \int_{۳}^{۵}(f(x)\,dx + ۸ = \underbrace{۱۲}_{(۰/۲۵)}$

۱

۱۳

$۳ = \frac{۱}{۲-a}\int_a^۲ (۲x+۱)\,dx$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۶ - ۳a = x^۲ + x\Big|_a^۲ = ۶ - (a^۲ + a)$ (۰/۲۵)

$a^۲ - ۲a = ۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a = ۲$ غ ق ق (۰/۲۵) , $a = ۰$ (۰/۲۵)

۱/۲۵

۱۴

$\underbrace{\int_۰^۱ (x^{۲[x]} + ۱)\,dx}_{(۰/۲۵)} + \underbrace{\int_۱^۲ (x^{۲[x]} + ۱)\,dx}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\int_۰^۱ ۲\,dx}_{(۰/۲۵)} + \underbrace{\int_۱^۲ (x^۲ + ۱)\,dx}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{۲}_{(۰/۲۵)} + \underbrace{(\frac{۱}{۳}x^۳ + x)\Big|_۱^۲}_{(۰/۲۵)} = \frac{۱۶}{۳}$ (۰/۲۵)

۱/۵

همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر

۲۰

forum.konkur.in