

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع: ۸/۳۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پیش دانشگاهی			
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال تحصیلی ۹۱-۱۳۹۰		مرکز سنجش آموزش و پرورش	
		http://aee.medu.ir	
ردیف	سؤالات		نمره

۱	معادله ی خط قائم بر نمودار منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$ را در نقطه ی $A(4,1)$ واقع بر منحنی بنویسید.	۱/۵
۲	تابع $f$ با ضابطه ی $f(x) = \frac{x-1}{x+5}$ را در نظر بگیرید. مقدار $(f^{-1})'(-1)$ را محاسبه کنید.	۱/۲۵
۳	فرض کنید بادکنکی کروی مملو از هوا شعاعی برابر ۱۰ سانتی متر دارد. اگر ۱ سانتی متر دیگر به شعاع آن افزوده شود، (الف) آهنگ تغییر حجم چقدر است؟ (ب) میزان واقعی تغییر حجم را حساب کنید.	۱/۲۵
۴	جدول رفتار تابع $y = \frac{1}{1+x^2}$ را رسم نمایید و بازه هایی که تابع در آن صعودی یا نزولی است را تعیین کنید.	۱/۷۵
۵	ثابت کنید اگر تابع $f$ روی بازه ی $I$ مشتق پذیر بوده و $f'$ روی $I$ برابر مقدار ثابت صفر باشد، آنگاه $f$ روی $I$ ثابت است.	۱
۶	به کمک آزمون مشتق دوم، ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع $g(x) = x + \frac{1}{x}$ را بیابید.	۱/۷۵
۷	جدول تغییرات و نمودار تابع $y = \frac{x^2 + x + 2}{x-1}$ را رسم کنید.	۲
۸	با استفاده از قاعده ی هوییتال حد زیر را محاسبه کنید.	۱/۲۵
	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{3x^2}$	
۹	به کمک دیفرانسیل، مقدار تقریبی $(0/9)^5$ را به دست آورید.	۱/۲۵
۱۰	اگر بخواهیم ریشه ی مثبت معادله ی $2x^2 - 3 = 0$ را با روش نیوتن و تقریب اولیه ی $x_1 = 1$ بیابیم، مقدار $x_2$ را محاسبه کنید.	۱
۱۱	مقدار تقریب اضافی مساحت زیر منحنی $f(x) = x^2 - 1$ را در بازه ی $[2,4]$ برای $n = 4$ به دست آورید.	۱/۵
۱۲	نامساوی $\frac{7}{6} \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{1-x^2} dx \leq \frac{21}{10}$ را ثابت کنید.	۱/۵
	انتگرال های زیر را محاسبه کنید.	
۱۳	الف) $\int \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x}} dx$ ب) $\int_{-1}^1 x^2 [x] dx$	۲
۱۴	بدون محاسبه ی انتگرال، مشتق زیر را به دست آورید.	۱
	$\frac{d}{dt} \int_{\sin x}^{\cos x} \frac{1}{4+x^2} dx$	
۲۰	جمع نمره	موفق باشید.

باسمه تعالی

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)
تاریخ امتحان: ۱۳۹۰/۱۰/۲۵	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال تحصیلی ۹۱-۱۳۹۰	
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

۱/۵	$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{y}}} \Rightarrow m = -\frac{1}{2} \Rightarrow m' = 2 \quad y-1 = 2(x-4) \Rightarrow y = 2x-7$	۱																			
۱/۲۵	$\frac{a-1}{a+5} = -1 \Rightarrow a = -2 \quad f'(x) = \frac{6}{(x+5)^2} \Rightarrow (f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(-2)} = \frac{3}{2}$	۲																			
۱/۵	<p>الف) <math>V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V'(r) = 4\pi r^2 \Rightarrow V'(10) = 400\pi</math></p> <p>ب) <math>V(11) - V(10) = \frac{4}{3}\pi(11)^3 - \frac{4}{3}\pi(10)^3 = \frac{4}{3}\pi(1331 - 1000)</math></p>	۳																			
۱/۵	$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ <p>تابع در بازه <math>(-\infty, 0)</math> صعودی</p> <p>تابع در بازه <math>(0, +\infty)</math> نزولی</p> <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>x</td> <td><math>-\infty</math></td> <td>0</td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>0</td> <td>↗ 1 ↘</td> <td>0</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	y'	+	0	-	y	0	↗ 1 ↘	0	۴							
x	$-\infty$	0	$+\infty$																		
y'	+	0	-																		
y	0	↗ 1 ↘	0																		
۱	<p>نقطه <math>a \in I</math> دلخواه را اختیار می کنیم. نشان می دهیم که برای هر <math>x \in I</math> برابر <math>f(a)</math> و در نتیجه ثابت است.</p> <p>فرض کنیم <math>x &gt; a</math>. تابع <math>f</math> روی بازه <math>[a, x]</math> در شرایط قضیه ی مقدار میانگین صدق می کند. پس</p> <p><math>\exists c \in (a, x) \ni f(x) - f(a) = f'(c)(x-a)</math> و <math>f'(c) = 0</math> لذا <math>f(x) = f(a)</math>.</p>	۵																			
۱/۷۵	$g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \xrightarrow{g'(x)=0} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ <p>چون <math>g''(1) = 2 &gt; 0</math> تابع در <math>x = 1</math> مینیمم دارد و <math>g''(-1) = -2 &lt; 0</math> تابع در <math>x = -1</math> ماکسیمم دارد.</p>	۶																			
۲	<p>مجانِب مایل <math>y = x + 2 + \frac{4}{x-1}</math> و <math>x = 1</math> مجانب قائم</p> $y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 3, -1$ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>x</td> <td><math>-\infty</math></td> <td>-1</td> <td>1</td> <td>3</td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td><math>-\infty</math></td> <td>↗ -1 ↘</td> <td>↘ -∞ ↗</td> <td>↘ 7 ↗</td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> </table>	x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	y'	+	0	-	-	0	+	y	$-\infty$	↗ -1 ↘	↘ -∞ ↗	↘ 7 ↗	$+\infty$	۷
x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$																
y'	+	0	-	-	0	+															
y	$-\infty$	↗ -1 ↘	↘ -∞ ↗	↘ 7 ↗	$+\infty$																

ادامه در برگه ی دوم

نمره	راهنمای تصحیح	رتبه: علوم ریاضی	ماده امتحان: ۲۰ دقیقه
	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۱۰ / ۲۵
	دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال تحصیلی ۹۱-۱۳۹۰	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح		
۱/۲۵	$H: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cdot (\frac{1}{25})^H}{6x \cdot (\frac{1}{25})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (\frac{1}{25})}{6 \cdot (\frac{1}{25})} = 0 \cdot (\frac{1}{25})$		۸
۱/۲۵	$f(x) = x^5, x=1, \Delta x = -0/1 \cdot (\frac{1}{25}), f'(x) = 5x^4 \cdot (\frac{1}{25}) \Rightarrow f(0/9) = f(1) + (-0/1) f'(1) \cdot (\frac{1}{25})$ $(0/9)^5 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \cdot (\frac{1}{25})$		۹
۱	$f'(x) = 4x \cdot (\frac{1}{25}), x_T = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Rightarrow x_T = 1 - \frac{(-1) \cdot (\frac{1}{25})}{4 \cdot (\frac{1}{25})} = 1/25 \cdot (\frac{1}{25})$		۱۰
۱/۵	$\Delta x = \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{25}), \sum_{n=1}^4 f(u_i) \Delta x = \frac{1}{4} (f(\frac{5}{4}) + f(3) + f(\frac{7}{4}) + f(2)) = \frac{1}{4} (\frac{21}{4} + 8 + \frac{45}{4} + 16) = \frac{25}{4} \cdot (\frac{1}{25})$ (در صورتی که به جای (*) جدول محاسبات نیز آورده شد نیز بایم مورد نظر داده شود.)		۱۱
۱/۵	$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} = 0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \cdot (\frac{1}{25}) & \text{مینیمم مقدار} \\ f(-\frac{1}{2}) = \frac{4}{3} \cdot (\frac{1}{25}) \\ f(\frac{2}{3}) = \frac{9}{5} \cdot (\frac{1}{25}) & \text{ماکزیمم مقدار} \end{cases}$ $1 \leq \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{1-x^2} dx \leq \frac{9}{5} \cdot (\frac{1}{25}) \Rightarrow \frac{5}{6} \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{1-x^2} dx \leq \frac{21}{10} \cdot (\frac{1}{25})$		۱۲
۲	الف) $\int (x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}) dx = \frac{1}{1+\frac{3}{2}} x^{1+\frac{3}{2}} + 2x \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 4\sqrt{x} + c$ ب) $\int_{-1}^0 x^{\sqrt{x}} [x] dx + \int_0^1 x^{\sqrt{x}} [x] dx = \int_0^1 -x^{\sqrt{x}} dx + \int_0^1 x^{\sqrt{x}} dx = -\frac{1}{3} x^{\sqrt{x}} \Big _0^1 = -\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{25})$		۱۳
۱	$\frac{d}{dt} \int_{\sin x}^{\cos x} \frac{dx}{4+x^2} = \frac{(-\sin t) \times \frac{1}{4+\cos^2 t}}{(\frac{1}{25})} - \frac{\cos t \times \frac{1}{4+\sin^2 t}}{(\frac{1}{25})}$		۱۴
۲۰	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. یا تشکر		