باسمه تعالی

سوالات امتحان نهایی درس: **حساب دیفرانسیل و انتگرال**	رشته: **علوم ریاضی**	ساعت شروع: **۸/۳۰ صبح**	مدت امتحان : **۱۲۰ دقیقه**
پیش دانشگاهی			تاریخ امتحان : ۹ / ۱۰/ ۱۳۹۱
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در **دی ماه** سال ۱۳۹۱			مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir

ردیف	سوالات (پاسخنامه دارد)	نمره
۱	فرض کنیم برای هر عدد مثبت h ، $0 \le a < h$. ثابت کنید $a = 0$.	۱
۲	به کمک قضیه‌ی فشردگی، همگرایی دنباله‌ی $\{\frac{\cos n}{n}\}$ را نشان دهید.	۱
۳	مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع زیر در نقطه‌ی صفر پیوسته باشد. $f(x) = \begin{cases} a+[x] & x<0 \\ b & x=0 \\ 3-x^2 & x>0 \end{cases}$	۱/۲۵
٤	کلیه‌ی مجانب های تابع $f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-2}$ را در صورت وجودبیابید.	۰/۷۵
۵	بادکنکی کروی شکل مملو از هوا، شعاعی برابر ۱۰سانتی متر دارد. اگر ۱ سانتی متر دیگر به شعاع آن افزوده شود، آهنگ تغییر حجم آن چقدر است؟	۱
٦	مشتق پذیری تابع $f(x)=\lvert \sin x \rvert$ را در نقطه‌ی $x=0$ بررسی کنید.	۱/۵
۷	ضابطه‌ی تابع درجه‌ی دوم f را چنان بیابید که $f(-1)=-6$ ، $f'(-1)=4$ و $f''(-1)=-2$ باشد.	۱/۵
۸	شیب خط مماس بر منحنی $x^3+4x^2y-3y^3=0$ را در نقطه‌ی $(-1,1)$ بنویسید.	۱/۲۵
۹	تابع $f(x)=1+e^{2x}$ را در نظر بگیرید. مقدار $(f^{-1})'(2)$ را در صورت وجود بیابید.	۱
۱۰	مشتق تابع $g(x)=Ln(x+\sqrt{x})$ را به دست آورید.	۰/۷۵
۱۱	الف) نقطه‌ی بحرانی را تعریف کنید. ب) نقاط بحرانی تابع $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ را در صورت وجود تعیین کنید.	۱/۵
۱۲	با اعمال آزمون مشتق دوم، مقادیر اکسترمم های موضعی تابع $f(x)=x^4-4x+1$ را در صورت وجود بیابید.	۱/۵
۱۳	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=x^3-3x+1$ را رسم کنید.	۲
۱٤	مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار $y=2x+1$ و خطوط $y=0$ ، $x=0$ و $x=2$ را محاسبه کنید.	۱/۵
۱۵	ثابت کنید هر گاه f بر $[a,b]$ تابعی پیوسته باشد، نقطه ای مانند c از این بازه هست به قسمی که: $\int_a^b f(x)\, x=(b-a)f(c)$	۱
۱٦	انتگرال $\int_0^2 (x-[x])\,dx$ را محاسبه کنید.	۱/۵
	موفق باشید. جمع نمره	۲۰

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : **حساب دیفرانسیل و انتگرال**	رشته: **علوم ریاضی**	مدت امتحان : **۱۲۰قیقه**
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان : **۱۳۹۱ /۱۰ / ۹**
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال تحصیلی ۹۲-۱۳۹۱		**مرکز سنجش آموزش و پرورش** **http://aee.medu.ir**

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	فرض خلف: فرض کنیم $a\neq 0$ (۰/۲۵).پس طبق فرض $0<a<h$ (۰/۲۵). حال قرار می دهیم $h=\frac{a}{2}$ (۰/۲۵) که در این صورت داریم $0<a<\frac{a}{2}$ و این تناقض است. (۰/۲۵)	۱
۲	$-1\le\cos n\le 1$ (۰/۲۵) $\Rightarrow -\frac{1}{n}\le\frac{\cos n}{n}\le\frac{1}{n}$ (۰/۲۵) , $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n}=0$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n}=0$ (۰/۲۵)	۱
۳	$f(0)=b$ (۰/۲۵) , $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}a+[x]=a-1=3$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a=4$ (۰/۲۵) $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}3-x^2=3$ (۰/۲۵) $\Rightarrow b=3$ (۰/۲۵)	۱/۲۵
٤	مجانب قائم $x=2$ (۰/۲۵). چون $f(x)=x-1+\frac{1}{x-2}$ (۰/۲۵). بنابراین $y=x-1$ مجانب مایل است (۰/۲۵).	۰/۷۵
۵	$V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \frac{dV}{dr}=4\pi r^2$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{r=10} \frac{dV}{dr}(10)=400\pi$ (۰/۵)	۱
٦	$f'_+(0)=\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}_{\text{(۰/۲۵)}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\lvert\sin x\rvert}{x}=\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}}_{\text{(۰/۲۵)}}=1$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$ (۰/۲۵) مشتق پذیر نیست $f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}}_{\text{(۰/۲۵)}}=-1$ (۰/۲۵)	۱/۵
۷	$f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=2ax+b$ (۰/۲۵) , $f''(x)=2a$ (۰/۲۵) $\Rightarrow f''(-1)=-2 \Rightarrow a=-1$ (۰/۲۵) $f'(-1)=4 \Rightarrow b=2$ (۰/۲۵) , $f(-1)=-6 \Rightarrow c=-3$ (۰/۲۵) $\Rightarrow f(x)=-x^2+2x-3$ (۰/۲۵)	۱/۵
۸	$\underbrace{3x^2}_{\text{(۰/۲۵)}}+\underbrace{8xy}_{\text{(۰/۲۵)}}+\underbrace{4x^2y'}_{\text{(۰/۲۵)}}-\underbrace{9y^2y'}_{\text{(۰/۲۵)}}=0 \xrightarrow{x=-1\ ,\ y=1} y'=-1$ (۰/۲۵)	۱/۲۵
۹	$b=2 \Rightarrow 1+e^{2x}=2 \Rightarrow x=0$ (۰/۲۵) , $f'(x)=2e^{2x}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \underbrace{(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(0)}}_{\text{(۰/۲۵)}}=\frac{1}{2}$ (۰/۲۵)	۱
۱۰	$g'(x)=\dfrac{(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})\ \text{(۰/۵)}}{(x+\sqrt{x})\ \text{(۰/۲۵)}}$	۰/۷۵
۱۱	الف) نقطه ی درونی c (۰/۲۵) را نقطه‌ی بحرانی نامیم هرگاه $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد. (۰/۵) ب) $D_f=[-2,2]$ (۰/۲۵) , $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow f'(0)=0$ در نتیجه $x=0$ بحرانی است. (۰/۲۵)	۱/۵

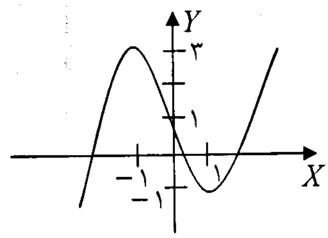
ادامه در برگه ی دوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : **حساب دیفرانسیل و انتگرال**	رشته: **علوم ریاضی**	مدت امتحان : **۱۲۰قیقه**
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان : **۹ / ۱۰ /۱۳۹۱**
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال تحصیلی ۹۲-۱۳۹۱		**مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir**

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۲	$f'(x)=4x^3-4\ (0/25)=4(x^3-1)=0 \Rightarrow x=1\ (0/25)\ ,\ f''(x)=12x^2\ (0/25)$ $f''(1)=12>0\ (0/25) \Rightarrow x=1$ مینیمم موضعی (۰/۲۵) مقدار مینیمم موضعی $f(1)=-2$ (۰/۲۵) .	۱/۵
۱۳	$f'(x)=3x^2-3\ (0/25)\xrightarrow{f'(x)=0} x=1,-1\ (0/25)$ $f''(x)=6x\ (0/25)=0\xrightarrow{f''(x)=0} x=0\ (0/25)$	۲

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		+	0	-		-	0	+	
f''		-	-	-	0	+	+	+	
f	$-\infty$	↗	3	↘	1	↘	-1	↗	$+\infty$

(۰/۵)



(۰/۵)

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۴	$\Delta x=\frac{2}{n}\ (0/25)\ ,\ x_i=\frac{2i}{n}\ (0/25)\ ,\ f(x_i)=2x_i+1=\frac{4i}{n}+1\ (0/25)$ $S_n=\sum_{i=1}^{n}(\frac{4i}{n}+1)\frac{2}{n}=\frac{2}{n}(\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}1)=\frac{2}{n}(\underbrace{\frac{4}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}}_{(0/25)}+n)=\frac{4(n+1)}{n}+2(0/25)$ $A=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{4(n+1)}{n}+2)=6(0/25)$	۱/۵
۱۵	می دانیم $m<\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx<M$ که در آن M,m به ترتیب مقادیر مینیمم و ماکسیمم مطلق تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ هستند (۰/۲۵). چون f پیوسته است (۰/۲۵) بنابر قضیه‌ی مقدار میانی (۰/۲۵) هر مقدار بین ماکسیمم و مینیمم خود را در نقطه ای مانند $c\in[a,b]$ می گیرد. لذا $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(c)$ (۰/۲۵) یا $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c)$.	۱
۱۶	$\int_0^2(x-[x])dx=\underbrace{\int_0^1(x-[x])dx+\int_1^2(x-[x])dx}_{(0/25)}=\underbrace{\int_0^1 xdx}_{(0/25)}+\underbrace{\int_1^2(x-1)dx}_{(0/25)}=\underbrace{\frac{1}{2}x^2]_0^1}_{(0/25)}+\underbrace{(\frac{1}{2}x^2-x)]_1^2}_{(0/25)}=1\ (0/25)$	۱/۵
	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر	۲۰