باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)	رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۳۵ دقیقه
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان : ۴ / ۴ / ۱۳۹۰	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم سال تحصیلی ۹۰–۱۳۸۹		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	اشتراک دو بازه ی $(۰,۸)$ و $(-۳,۶)$ را به صورت یک همسایگی متقارن بنویسید.سپس مرکز و شعاع آن را تعیین کنید.	۱
۲	درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید. الف) $\exists x\in \mathbb{R} \ , \ x^۲=-۲$. ب) برای هر عدد حقیقی a، یک عدد طبیعی n وجود دارد که $n>a$. ج) بازه ی $[۲,۲]$ برابر است با مجمو عه ی $\{۲\}$. د) اگر b و a دو عدد حقیقی باشند، فاصله ی a تا b برابر است با $\lvert a-b\rvert$.	۱
۳	با استفاده از تعریف حد دنباله ها ثابت کنید: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^۲}{۲n^۲-۱}=\dfrac{۱}{۲}$	۱
۴	الف) ثابت کنید دنباله ی کران دار، هم کران بالا دارد و هم کران پایین. ب) با یک مثال نشان دهید که دنباله ی کران دار ممکن است همگرا نباشد.	۱/۵
۵	با ذکر دلیل، همگرایی یا واگرایی سری های زیر را بررسی کنید و در صورت همگرایی،مقدار سری را بیابید. الف) $\sum\limits_{k=۱}^{+\infty}\dfrac{۵k+۳}{۲k-۱}$ ب) $\sum\limits_{k=۱}^{+\infty}\dfrac{۱}{۴k^۲-۱}$ ج) $\sum\limits_{k=۱}^{+\infty}\dfrac{۲^k}{۳^{k+۱}}$	۳
۶	با استفاده از دنباله ها، ثابت کنید تابع $f(x)=\dfrac{\lvert x\rvert}{x}$ در نقطه ی صفر حد ندارد.	۱/۲۵
۷	بدون استفاده از هم ارزی و قاعده ی هوپیتال، حدهای زیر را در صورت وجود، بیابید. الف) $\lim\limits_{x\to۱^-}\dfrac{x^۳-۱}{\lvert x-۱\rvert}$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^۲+۴x-۱۰}\right)$	۱/۷۵
۸	در تابع زیر، مقدار a را طوری بیابید که تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin x}{۱-\cos x} & x\neq ۰\\ a & x=۰\end{cases}$	۱
۹	فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ و $L>۰$ باشد. ثابت کنید که f در یک همسایگی محذوف a مثبت است.	۱
۱۰	نشان دهید معادله ی $x^۲-۲x+(x-۱)(x+۱)(x-۳)=۰$ در بازه ی $[-۲,۲]$ حداقل دو ریشه دارد.	۱/۷۵
۱۱	معادله ی مجانب های تابع $y=\dfrac{x^۳}{x^۲+x-۲}$ را بنویسید.	۱/۷۵
۱۲	مشتق پذیری تابع $y=(x^۲-۱)[x]$ را در نقطه ی $x=۱$ بررسی کنید.	۱/۵
۱۳	اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر و $\lim\limits_{x\to۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\dfrac{۳}{۲}$ باشد، حاصل $\left(f\left(\dfrac{۱}{x}\right)\right)'$ را در $x=\dfrac{۱}{۲}$ به دست آورید.	۱
۱۴	مختصات نقاطی روی منحنی تابع $y=\dfrac{x}{x+۱}$ را بیابید که مماس بر منحنی در آن نقاط، بر خط به معادله ی $y=-۴x+۱$ عمود باشد.	۱/۵
	موفق باشید. جمع نمره	۲۰

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان : ۱۳۵ دقیقه
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان : ۱۳۹۰/ ۴/ ۴
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشوردرجبرانی دوم سال تحصیلی ۹۰-۱۳۸۹		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	$(۰,۸)\cap(-۳,۶)=(۰,۶)$ $(۰/۵)$ $\Rightarrow$ $a=\frac{۰+۶}{۲}=۳$ $(۰/۲۵)$, $r=\frac{۶-۰}{۲}=۳$ $(۰/۲۵)$	۱
۲	الف)نادرست (۰/۲۵) ب)درست (۰/۲۵) ج)درست (۰/۲۵) د)درست (۰/۲۵)	۱
۳	$\underbrace{\forall\varepsilon>۰,\exists M\in\mathbb{N},(\forall n\ge M\ ,\ \left\|\frac{n^۲}{۲n^۲-۱}-\frac{۱}{۲}\right\|<\varepsilon)}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow\frac{۱}{۲(۲n^۲-۱)}<\varepsilon\ (۰/۲۵)\Rightarrow n>\sqrt{\frac{۲\varepsilon+۱}{۴\varepsilon}}\ (۰/۲۵)\Rightarrow M\ge\left[\sqrt{\frac{۲\varepsilon+۱}{۴\varepsilon}}\right]+۱(۰/۲۵)$	۱
۴	الف)دنباله $\{a_n\}$ کراندار است اگرو تنها اگر $\exists K>۰,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \|a_n\|\le K$ (۰/۲۵). بنابراین $\forall n\in\mathbb{N}, -K\le a_n\le K$ (۰/۲۵) . K کران بالای دنباله و $-K$ کران پایین دنباله است .(۰/۵) ب) دنباله ی $\{(-۱)^n\}$. $(\|(-۱)^n\|\le ۱\ \ \forall n\in\mathbb{N})$ کرانداراست (۰/۲۵)ولی دنباله ای نوسانی است. پس واگراست . (۰/۲۵)	۱/۵
۵	الف) $\lim_{k\to+\infty}\frac{۵k+۳}{۲k-۱}=\underbrace{\frac{۵}{۲}}_{(۰/۲۵)}\ne ۰$ $(۰/۲۵)\Rightarrow$ $(۰/۲۵)$ سری واگراست. ب) $s_n=\sum_{k=۱}^{n}\underbrace{\frac{۱}{(۲k-۱)(۲k+۱)}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{۱}{۲}}_{(۰/۲۵)}\times\sum_{k=۱}^{n}\underbrace{\left(\frac{۱}{۲k-۱}-\frac{۱}{۲k+۱}\right)}_{(۰/۲۵)}=\frac{۱}{۲}\underbrace{\left(۱-\frac{۱}{۲n+۱}\right)}_{(۰/۲۵)}$ $\sum_{k=۱}^{+\infty}\frac{۱}{۴k^۲-۱}=\lim_{n\to+\infty}s_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{۱}{۲n+۱}\right)=\frac{۱}{۲}$ $(۰/۲۵)$ ج) $\underbrace{\sum_{k=۱}^{+\infty}\frac{۲}{۹}\times(\frac{۲}{۳})^{k-۱}}_{(۰/۵)}=\underbrace{\frac{\frac{۲}{۹}}{۱-\frac{۲}{۳}}}_{(۰/۲۵)}=\frac{۲}{۳}$ $(۰/۲۵)$	۳
۶	$\begin{cases}a_n=\frac{۱}{n}\\ b_n=-\frac{۱}{n}\end{cases}$ $(۰/۲۵)\Rightarrow\underbrace{\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}b_n=۰\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\ a_n,b_n\ne ۰}_{(۰/۲۵)}$, $\lim_{n\to+\infty}f(a_n)=۱$ $(۰/۲۵)$ $\lim_{n\to+\infty}f(b_n)=-۱$ $(۰/۲۵)$ چون دو دنباله $\{f(a_n)\},\{f(b_n)\}$ به دو عدد نابرابر همگرایند، لذا $f(x)$ در صفر حد ندارد . (۰/۲۵)	۱/۲۵
۷	الف) $\underbrace{\lim_{x\to۱^-}\frac{(x-۱)(x^۲+x+۱)}{-(x-۱)}}_{(۰/۵)}=-۳$ $(۰/۲۵)$ ب) $\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^۲+۴x-۱۰}\right)\times\frac{x-\sqrt{x^۲+۴x-۱۰}}{x-\sqrt{x^۲+۴x-۱۰}}}_{(۰/۲۵)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۴x+۱۰}{\underbrace{x-\sqrt{x^۲+۴x-۱۰}}_{(۰/۲۵)}}$ $=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۴x}{x-\|x\|}=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{\frac{-۴x}{۲x}}_{(۰/۲۵)}=-۲$ $(۰/۲۵)$	۱/۷۵

ادامه در برگه ی دوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)**	رشته: **علوم ریاضی**	مدت امتحان : **۱۳۵ دقیقه**
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان : **۱۳۹۰ / ۴ / ۴**
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشوردرجبرانی دوم سال تحصیلی ۹۰-۱۳۸۹		**مرکز سنجش آموزش و پرورش** **http://aee.medu.ir**

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۸	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\frac{x\sin x}{2\sin^2\frac{x}{2}}}_{(0/25)}=\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\frac{x^2}{2\times\frac{x^2}{4}}}_{(0/25)}=2\quad(0/25)\xrightarrow{\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)} a=2\quad(0/25)$	۱
۹	**برای هر** $\varepsilon>0$ **طبق فرض** $\underbrace{\exists\delta>0\ ,\ \forall x\in D_f\quad \lvert x-a\rvert<\delta\Rightarrow\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon}_{(0/25)}$ **. حال با فرض** $\underbrace{\varepsilon=L>0}_{(0/25)}$ **داریم** $\exists\delta>0\ ,\ \forall x\in D_f\quad \lvert x-a\rvert<\delta\Rightarrow\underbrace{\lvert f(x)-L\rvert<L}_{(0/25)}\Rightarrow 0<f(x)<2L\quad(0/25)$	۱
۱۰	f **همواره پیوسته است (۰/۲۵).** $\left.\begin{matrix}f(-2)=-7\quad(0/25)\\ f(0)=3\quad(0/25)\end{matrix}\right\}\Rightarrow f(-2)f(0)<0\xrightarrow{\text{قضیه ی مقدار میانی}}\exists\ x_1\in(-2,0)\ ,\ f(x_1)=0\quad(0/25)$ $\left.\begin{matrix}f(2)=-3\quad(0/25)\\ f(0)=3\quad(0/25)\end{matrix}\right\}\Rightarrow f(2)f(0)<0\xrightarrow{\text{قضیه ی مقدار میانی}}\exists\ x_2\in(0,2)\ ,\ f(x_2)=0\quad(0/25)$	۱/۷۵
۱۱	$\begin{cases}x\to -2\\ y\to\infty\end{cases}\ ,\quad\begin{cases}x\to 1\\ y\to\infty\end{cases}\quad\Rightarrow x=2\ ,\ x=1$ **(۰/۵) مجانبهای قائم** $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\underbrace{\frac{x^3}{x(x^2+x-2)}}_{(0/25)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+x-2}=1\quad(0/25)$ $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\underbrace{\frac{x^3}{x^2+x-2}}_{(0/25)}-x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2+2x}{x^2+2x-2}=-1\quad(0/25)\quad\Rightarrow y=x-1\ (0/25)$ **مجانب مایل**	۱/۷۵
۱۲	$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\underbrace{\frac{(x^2-1)[x]-0}{x-1}}_{(0/25)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)\times\overset{(0/25)}{1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2\ (0/25)$ $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)\times\overset{(0/25)}{0}}{x-1}=0\ (0/25)$ $\Rightarrow f'_+(1)\neq f'_-(1)\quad(0/25)$ **مشتق پذیر نیست**	۱/۵
۱۳	$f'(2)=\frac{3}{2}\ (0/25)\quad ,\quad (f(\frac{1}{x}))'=-\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{(0/25)}\times\underbrace{f'(\frac{1}{x})}_{(0/25)}\quad\Rightarrow\quad (f(\frac{1}{x}))'\Big\vert_{x=\frac{1}{2}}=-\frac{1}{(\frac{1}{2})^2}\times\frac{3}{2}=-6\ (0/25)$	۱
۱۴	$y'=\frac{1}{(x+1)^2}\quad(0/25)\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{(x+1)^2}\overset{(0/25)}{=}\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\quad x=1\ ,\ x=-3\ (0/5)\quad\Rightarrow\quad(1,\frac{1}{2})\ ,\ (-3,\frac{3}{2})\quad(0/5)$	۱/۵
	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر	۲۰