

سؤالات امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۳۵ دقیقه
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان : ۱۳۹۰ / ۳ / ۲۹	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم سال تحصیلی ۹۰-۱۳۸۹		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	سؤالات	نمره	

۱	معادله ی خط قائم بر منحنی $x^2 + 2x^2y^2 - 3y^2 = 0$ را در نقطه ی $A(-1, 1)$ روی منحنی بنویسید.	۱/۲۵
۲	تابع f با ضابطه ی $f(x) = x^2 - 4x + 7$ را برای $x \geq 2$ در نظر بگیرید. مقدار $(f^{-1})'(7)$ را محاسبه کنید.	۱/۵
۳	نقطه ی P روی منحنی به معادله ی $y = \sqrt[3]{1+7x}$ حرکت می کند. در لحظه ای که P روی نقطه ی $(1, 2)$ قرار دارد، اگر سرعت افزایش مؤلفه ی x برابر با ۳ سانتی متر بر ثانیه باشد، سرعت تغییر مؤلفه ی y را حساب کنید.	۱/۲۵
۴	طول نقاط ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \frac{3x}{9+x^2}$ را در بازه ی $[0, 4]$ مشخص کنید.	۲
۵	برای هر دو عدد a و b که $a < b$ باشد نامعادله ی $ \sin b - \sin a \leq b - a $ را ثابت کنید.	۱
۶	مقادیر a و b را طوری بیابید تا نقطه ی $A(1, 2)$ نقطه ی عطف تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + 4$ باشد.	۱/۵
۷	با استفاده از قاعده ی هوییتال، حد تابع زیر را محاسبه کنید.	۱/۲۵
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$	
۸	جدول تغییرات و نمودار تابع $y = \sqrt{x^2 + 1}$ را رسم کنید.	۱/۲۵
۹	می خواهیم با استفاده از روش نیوتن، ریشه ی مثبت معادله ی $x^2 - 2 = 0$ را با تقریب اولیه ی $x_0 = 2$ پیدا کنیم. مقادیر x_1 و x_2 را محاسبه کنید.	۱/۲۵
۱۰	برای تابع $f(x) = \sqrt[4]{x}$: الف) دیفرانسیل f را در نقطه ی $x = 81$ بیابید. ب) مقدار تقریبی افزایش f هنگامی که x از ۸۱ به ۸۳ افزایش می یابد چقدر است؟	۱
۱۱	مقدار تقریب نقصانی مساحت زیر منحنی $f(x) = 1 - x^2$ را در بازه ی $[-1, 1]$ و برای $n = 4$ محاسبه کنید.	۱/۲۵
۱۲	مقدار متوسط تابع $f(x) = 3x^2 + 2x$ را در بازه ی $[1, 2]$ محاسبه کنید و تعیین کنید در چه نقطه ای از این بازه مقدار تابع f با مقدار متوسط تابع، برابر است.	۱/۵
۱۳	بدون محاسبه ی انتگرال، مشتق تابع $\int_{x^2}^3 (\sin \sqrt{t+1} - t) dt$ را محاسبه کنید.	۱
۱۴	انتگرال های زیر را محاسبه کنید.	۲
	الف) $\int (x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}) dx$ ب) $\int_{-1}^0 x x-1 dx$	
۲۰	جمع نمره	موفق باشید.

مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)
تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۳ / ۲۹	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم سال تحصیلی ۹۰-۱۳۸۹	
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

۱/۲۵	$y' = \frac{-(2x + 4xy^2)(0/25)}{(4x^2y - 6y)(0/25)} \Rightarrow m = -3 (0/25) \Rightarrow m' = \frac{1}{3} (0/25) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{3}(x + 1) (0/25)$	۱
۱/۵	$(y, a) \in f^{-1} \Rightarrow (a, y) \in f \Rightarrow a^2 - 4a + y = y (0/25) \Rightarrow a = 0 \text{ غ ق ق} (0/25)$ $a = 4 \text{ ق ق} (0/25)$ $f'(x) = 2x - 4 (0/25) \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(4)} = \frac{1}{4} (0/25)$	۲
۱/۲۵	$y'(t) = \frac{y \times x'(t) (0/25)}{3\sqrt{(1+yx)^2} (0/5)} \Rightarrow y'(t_0) = \frac{y \times 3}{3\sqrt{(1+y \times 1)^2} (0/25)} = \frac{y}{4} (0/25)$	۳
۲	$f(0) = 0$ $y' = \frac{27 - 3x^2}{(9 + x^2)^2} = 0 (0/25) \Rightarrow x = \pm 3 (0/25) \Rightarrow f(3) = \frac{1}{2} (0/25) \Rightarrow x = 0 \text{ طول مینیمم مطلق} (0/25)$ $x = 3 \text{ طول ماکسیمم مطلق} (0/25)$ $f(4) = \frac{12}{25}$	۴
۱	تابع $f(x) = \sin x$ روی بازه ی $[a, b]$ پیوسته و روی بازه ی (a, b) مشتق پذیر است. (۰/۲۵) لذا طبق قضیه ی مقدار میانگین $\exists c \in (a, b), f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (0/25)$ بنابراین $ \cos c b - a = \sin b - \sin a (0/25)$ از آنجایی که $ \cos c \leq 1 (0/25)$ بنابراین $ \sin b - \sin a \leq b - a (0/25)$	۵
۱/۵	$f'(x) = 3ax^2 + 2bx (0/25)$ $f''(x) = 6ax + 2b (0/25) \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 3a + b = 0 (0/25) \Rightarrow a = 1 (0/25), b = -3 (0/25)$ $f(1) = 2 \Rightarrow a + b = -2 (0/25)$	۶
۱/۲۵	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-1}{x^2} \times \cos \frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = 1 (0/25)$	۷
۱/۷۵	$D_f = R (0/25)$ $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ x }{x} = \pm 1$ $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x \rightarrow +\infty \end{cases} \begin{cases} y = -x \\ x \rightarrow -\infty \end{cases} (0/5) \text{ مجانبهای افقی}$ $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-2x} = 0$ $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0 \Rightarrow x = 0 (0/25)$	۸

ادامه در برگه ی دوم

مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)
تاریخ امتحان: ۱۳۹۰/۳/۲۹	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم سال تحصیلی ۹۰-۱۳۸۹	
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td>$-$</td> <td>0</td> <td>$+$</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>$+\infty$</td> <td>\searrow</td> <td>\nearrow</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </table> <p>(۰/۵)</p>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	y'	$-$	0	$+$	y	$+\infty$	\searrow	\nearrow			1	$+\infty$	
x	$-\infty$	0	$+\infty$															
y'	$-$	0	$+$															
y	$+\infty$	\searrow	\nearrow															
		1	$+\infty$															
۱/۲۵	$f'(x) = 2x$ (۰/۲۵) $x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})} \Rightarrow x_1 = 2 - \frac{2}{4} = 1/2$ (۰/۲۵), $x_2 = 1/2 - \frac{1/4}{1} = 1/4$ (۰/۲۵)	۹																
۱	الف) $df = \frac{1}{4\sqrt{x^3}} dx$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{x=1} df = \frac{1}{1.8} dx$ (۰/۲۵) ب) $dx = 2$ (۰/۲۵) \Rightarrow مقدار تقریبی افزایش $\approx \frac{1}{1.8} \times 2 = \frac{1}{0.9}$ (۰/۲۵)	۱۰																
۱/۷۵	$\Delta x = \frac{1}{4}$ (۰/۲۵), $\sum_{i=1}^4 f(l_i) \Delta x = \frac{1}{4} \times (f(-1) + f(-\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}) + f(1)) = \frac{1}{4} (0 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 0) = \frac{3}{4}$ (۰/۲۵)	۱۱																
۱/۵	$\text{مقدار متوسط} = \frac{1}{2-1} \int_1^2 (3x^2 + 2x) dx = x^3 + x^2 \Big _1^2 = 10$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 3x^2 + 2x = 10$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x = \frac{5}{3}$ ق ق (۰/۲۵) $x = -\frac{7}{3}$ غ ق (۰/۲۵)	۱۲																
۱	$\frac{d}{dx} \int_{x^2}^3 (\sin \sqrt{t+1} - t) dt = \frac{d}{dx} (- \int_2^{x^2} (\sin \sqrt{t+1} - t) dt) = (-2x) \times (\sin \sqrt{x^2+1} - x^2)$ (۰/۲۵)	۱۳																
۲	الف) $\int (x^2 + 3x + x^{-2}) dx = \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - x^{-1} + c$ (۰/۲۵) ب) $\int_{-1}^0 -x(x-1) dx = \int_{-1}^0 (-x^2 + x) dx = -\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \Big _{-1}^0 = -\frac{5}{6}$ (۰/۲۵)	۱۴																
۲۰	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر																	