

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	رشته: علوم ریاضی	ساعات شروع: ۱۰ صبح	سوالات امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)
تاریخ امتحان: ۱۳۹۱ / ۴ / ۳	پیش دانشگاهی		
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم (سال تحصیلی ۹۱-۱۳۹۰)		
ردیف	سوالات		نمره

۰/۷۵	۱	اشتراک دو بازه‌ی $(-۳, ۳)$ و $(-۱, ۶)$ را به صورت یک همسایگی متقارن بنویسید و مرکز و شعاع همسایگی را تعیین کنید.
۱/۲۵	۲	اگر a و b دو عدد حقیقی باشند که $۰ < a < b$ ، ثابت کنید $۰ < b^{-1} < a^{-1}$.
۱/۵	۳	با استفاده از تعریف حد دنباله‌ها ثابت کنید: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{2n-1} = \frac{3}{2}$.
۱/۵	۴	الف) آیا دنباله‌ی $\left\{ \frac{2+3^n}{1+2^n} \right\}$ همگراست؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید. ب) یکنوایی دنباله‌ی $\left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} \right\}$ را بررسی کنید.
۱/۵	۵	ثابت کنید اگر سری $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ همگرا باشد، آن گاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.
۱	۶	مقدار سری $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ را پیدا کنید.
۱/۷۵	۷	با استفاده از دنباله‌ها، ثابت کنید تابع $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ در نقطه‌ی $x = 0$ حد ندارد.
۲/۵	۸	حدود توابع زیر را بدون استفاده از هم ارزی و قاعده‌ی هوییتال محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$ ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x-1} \times \text{Arc tan } x$
۱/۵	۹	نقاط پیوستگی تابع $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x+1}}{x^2 - 1}$ را بیابید.
۱/۲۵	۱۰	نشان دهید معادله‌ی $x^3 + 2x - 1 = 0$ در بازه‌ی $[0, 1]$ حداقل یک ریشه دارد.
۱/۵	۱۱	معادله‌ی کلیدی خطوط مجانب تابع $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ را بنویسید.
۱/۷۵	۱۲	مشتق پذیری تابع $f(x) = (x-2)[x]$ را در $x=2$ بررسی کنید.
۱/۲۵	۱۳	اگر $g(x) = x^2 - 1$ ، $f'(x) = \sqrt{3x+4}$ و $F = f \circ g$ باشند، $F'(1)$ را به دست آورید.
۱	۱۴	اگر $h(x) = \sqrt{x-2}$ باشد، $D_{h'}$ را تعیین کنید.
۲۰	جمع نمره	موفق باشید.

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)
تاریخ امتحان: ۱۳۹۱/۴/۳	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم (سال تحصیلی ۹۱-۱۳۹۰)	
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

۰/۷۵	$(-۱,۶) \cap (-۳,۳) = (-۱,۳)$ $(۰/۲۵) \Rightarrow a = \frac{-۱+۳}{۲} = ۱ (۰/۲۵), r = \frac{۳-(-۱)}{۲} = ۲ (۰/۲۵)$	۱
۱/۲۵	$a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0 (۰/۲۵)$ $b > 0 \Rightarrow \frac{1}{b} > 0 (۰/۲۵)$ $\Rightarrow \frac{1}{ab} > 0 (۰/۲۵) \Rightarrow 0 < a < b \xrightarrow{\frac{1}{ab} > 0} 0 < b^{-1} < a^{-1} (۰/۵)$	۲
۱/۵	$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq M \Rightarrow \left \frac{۳n}{۲n-۱} - \frac{۳}{۲} \right < \varepsilon (۰/۲۵) \Rightarrow \left \frac{۶n-۶n+۳}{۲(۲n-۱)} \right < \varepsilon (۰/۲۵) \Rightarrow (۲n-۱) > \frac{۳}{۲\varepsilon} (۰/۵)$ $\Rightarrow n > \frac{۳}{۴\varepsilon} + \frac{1}{۲} (۰/۲۵) \Rightarrow M \geq \left[\frac{۳}{۴\varepsilon} + \frac{1}{۲} \right] + 1 (۰/۲۵)$	۳
۱/۵	الف) خیر (۰/۲۵) زیرا $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{۲+۳^n}{۱+۲^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{۳^n \left(\frac{۲}{۳^n} + 1 \right)}{۳^n \left(\frac{1}{۳^n} + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{۳^n}{۳^n} = 1 (۰/۲۵)$ چون $\frac{۳}{۲} > 1$ دنباله $\left\{ \left(\frac{۳}{۲} \right)^n \right\}$ واگراست (۰/۲۵) لازم به ذکر است در صورتی که مقدار حد را $+\infty$ نیز به دست آورده و از آن واگرایی نتیجه گرفته شود، نمره‌ی کامل منظور گردد. ب) غیر یکنوا (۰/۲۵) زیرا $a_n: \frac{-1}{۲}, \frac{1}{۳}, \frac{-1}{۴}, \frac{1}{۵}, \dots (۰/۲۵)$	۴
۱/۵	$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n (۰/۲۵)$ $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ $\Rightarrow S_n - S_{n-1} = a_n (۰/۲۵)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - S_{n-1} = S - S = 0 (۰/۲۵)$ بنابراین (۰/۲۵) همگراست. $\{S_n\}$ به S همگراست.	۵
۱	$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{۲} - \frac{1}{n+۲} (۰/۲۵) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{۲} - \frac{1}{n+۲} \right) = \frac{1}{۲} (۰/۲۵)$	۶
۱/۷۵	$a_n = \frac{1}{۲n\pi}$ $b_n = \frac{1}{۲n\pi + \frac{\pi}{۲}}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N} a_n, b_n \neq 0 (۰/۲۵)$ $f(a_n) = \sin(۲n\pi) = 0 (۰/۲۵), f(b_n) = \sin\left(۲n\pi + \frac{\pi}{۲}\right) = ۱ (۰/۲۵)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = 0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = 1 (۰/۲۵)$ چون دو دنباله $\{f(a_n)\}, \{f(b_n)\}$ به دو عدد نابرابر همگرایند، لذا $f(x)$ در صفر حد ندارد. (۰/۲۵)	۷
۲/۵	الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1} \times \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (۰/۲۵)$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{۲ \cos ۴x \times \sin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} ۲ \cos ۴x = ۲ (۰/۲۵)$	۸

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)
تاریخ امتحان: ۱۳۹۱ / ۴ / ۳	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم (سال تحصیلی ۹۱-۱۳۹۰)	
نمره	راهنمای تصحیح	

		ادامه ی سوال ۸	
		$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x-1} \times \text{Arctan } x = \underbrace{\frac{1}{2}}_{(./25)} \times \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{(./25)} = \frac{\pi}{4} \quad (./25)$	
۱/۵		$x+1 \geq 0 \quad (./25) \Rightarrow x \geq -1 \quad (./25)$ <p>نقاط پیوستگی برابر است با $(-1, -\infty)$. (./۵)</p> $x^2 - 1 \neq 0 \quad (./25) \Rightarrow x \neq \pm 1 \quad (./25)$	۹
۱/۲۵		<p>تابع $f = x^2 + 2x - 1$ در بازه ی $[0, 1]$ پیوسته است (./۲۵) و $f(0) \times f(1) = -1 < 0$ (./۲۵)</p> <p>طبق نتیجه ی قضیه ی مقدار میانی، معادله در این بازه حداقل دارای یک ریشه است. (./۲۵)</p>	۱۰
۱/۵		<p>مجانبات های قائم $\begin{cases} x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \quad (./25)$, $\begin{cases} x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \quad (./25)$</p> <p>$x^2 - 1 = 0 \quad (./25) \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow x = 1 \quad (./25)$, $\begin{cases} x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \quad (./25)$</p> <p>$x^2 + x = x(x^2 - 1) + 2x \quad (./5) \Rightarrow y = x \quad (./25)$ مجانب مایل</p>	۱۱
۱/۷۵		<p>تابع در $x = 2$ مشتق پذیر نیست (./۲۵). زیرا</p> $f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2) \times 1 - 0}{x-2} = 1 \quad (./25)$ $f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2) \times 2 - 0}{x-2} = 2 \quad (./25)$	۱۲
۱/۲۵		<p>$g'(x) = 2x \Rightarrow g'(1) = 2 \quad (./25)$</p> <p>$F'(1) = (f \circ g)'(1) = \underbrace{g'(1)}_{(./25)} \times \underbrace{f'(g(1))}_{(./25)} = 2 \times \underbrace{f'(0)}_{(./25)} = 2 \times \underbrace{2}_{(./25)} = 4 \quad (./25)$</p>	۱۳
۱		<p>$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} \quad (./25) \Rightarrow x-2 > 0 \quad (./25) \Rightarrow x > 2 \quad (./25) \Rightarrow D_{h'} = (2, +\infty) \quad (./25)$</p>	۱۴
۲۰	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، لطفا به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره داده شود. با سپاس و احترام		