

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ساعات شروع: ۱۰ صبح	رشته: علوم ریاضی	سوالات امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)
تاریخ امتحان: ۱۳۹۱/۳/۲۷	پیش دانشگاهی		
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم (سال تحصیلی ۹۱-۱۳۹۰)		
نمره	سوالات		ردیف

۱/۲۵	۱	مشتق $y$ نسبت به $x$ را از رابطه $y - \sqrt{xy} = 0$ پیدا کنید.
۱/۵	۲	تابع $f(x) = x^3 + 2$ را در نظر بگیرید. معادله‌ی خط مماس بر معکوس این تابع را در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر $f^{-1}$ بنویسید.
۱/۲۵	۳	یک کارخانه‌ی پارچه بافی برای تولید $x$ متر پارچه $C(x) = 40000 + 10x + 0.005x^2$ تومان هزینه دارد. (الف) هزینه‌ی نهایی برای تولید $x$ متر پارچه را به دست آورید. (ب) هزینه‌ی متوسط برای تولید ۱۰۰ متر پارچه را محاسبه نمایید.
۲	۴	(الف) نقطه‌ی بحرانی را تعریف کنید. (ب) نقاط بحرانی تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ را در صورت وجود تعیین کنید.
۱	۵	ثابت کنید برای هر $x \in [-1, 1]$ داریم: $\text{Arcsin } x + \text{Arccos } x = \frac{\pi}{2}$ .
۱/۵	۶	تابع $y = x + \frac{1}{x}$ در کدام بازه صعودی و در کدام بازه نزولی است؟
۱/۵	۷	جهت تقعر و نقطه‌ی عطف تابع $f(x) = x^4 + 4x$ را در صورت وجود پیدا کنید.
۲	۸	جدول تغییرات و نمودار تابع $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ را رسم کنید.
۱	۹	با استفاده از قاعده‌ی هوبیتال مقدار حد رو به رو را محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-\frac{4}{3}}}{\sin \frac{1}{x}}$
۱	۱۰	دیفرانسیل تابع $f(x) = \frac{4}{3}x^3$ را در نقطه‌ای به طول $x = 1$ بیابید. سپس مقدار تقریبی افزایش $f$ هنگامی که $x$ از ۱ به $1.02$ افزایش می‌یابد را به دست آورید.
۰/۷۵	۱۱	بدون محاسبه‌ی انتگرال، مشتق $\frac{d}{dt} \int_{\sqrt{t}}^0 \frac{1}{4-x^2} dx$ را پیدا کنید.
۱/۷۵	۱۲	انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید. الف) $\int_{-1}^1 (x -  x ) dx$ ب) $\int (x^2 + 1) \sin(x^3 + 3x) dx$
۰/۷۵	۱۳	نشان دهید $\frac{x}{4-x^2}$ تابع اولیه‌ی تابع $\frac{x^2 + 4}{(4-x^2)^2}$ است.
۲	۱۴	بدون محاسبه‌ی انتگرال، نامساوی $0 \leq \int (x^2 - 2x) dx \leq 2$ را ثابت کنید.
۰/۷۵	۱۵	ثابت کنید اگر $f$ در بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته باشد، عدد حقیقی $c$ ، $a \leq c \leq b$ وجود دارد که $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)
تاریخ امتحان: ۱۳۹۱/۳/۲۷	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم (سال تحصیلی ۹۱-۱۳۹۰)	
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

۱/۲۵	$\frac{dy}{dx} = \frac{-(3x^2y - \frac{y}{2\sqrt{xy}})(\cdot/5)}{(x^2 + 8y^2 - \frac{x}{2\sqrt{xy}})(\cdot/75)}$	۱												
۱/۵	$a^2 + 2 = 1 (\cdot/25) \Rightarrow a^2 = -1 \Rightarrow a = -1 (\cdot/25) \Rightarrow (1, -1) \in f^{-1}$ $f'(x) = 3x^2 (\cdot/25), f'(-1) = 3 \Rightarrow \underbrace{(f^{-1})'(1)}_{(\cdot/25)} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{3} (\cdot/25) \Rightarrow y + 1 = \frac{1}{3}(x - 1) (\cdot/25)$	۲												
۱/۲۵	<p>الف) <math>C'(x) = 10 + 0 \cdot 1x (\cdot/5)</math></p> <p>ب) <math>\frac{C(100)}{100} = \frac{(40000 + 1000 + 50)(\cdot/25)}{100} = 410/5 (\cdot/25)</math></p>	۳												
۲	<p>الف) نقطه‌ی <math>c \in D_f</math> را نقطه‌ی بحرانی تابع <math>f</math> نامند هرگاه <math>f'(c)</math> تعریف نشده باشد یا <math>f'(c) = 0 (\cdot/75)</math>.</p> <p>ب) <math>f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} (\cdot/5) \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 (\cdot/5) \Rightarrow \{-1, 1\}</math> نقاط بحرانی <math>(\cdot/25)</math></p>	۴												
۱	<p>برای تابع <math>f(x) = \text{Arc sin } x + \text{Arc cos } x</math> داریم <math>f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 (\cdot/5)</math>. طبق نتیجه ای از قضیه‌ی مقدار میانگین تابع <math>f</math> روی بازه‌ی <math>[-1, 1]</math> ثابت است <math>(\cdot/25)</math>. بنابراین <math>\exists k \in \mathbb{R}, \text{Arc sin } x + \text{Arc cos } x = k</math>.</p> <p>از طرفی برای <math>x = 0</math> <math>(\cdot/25)</math> <math>k = \text{Arc sin } 0 + \text{Arc cos } 0 = \frac{\pi}{2}</math>.</p>	۵												
۱/۵	$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} (\cdot/25) \xrightarrow{f'(x)=0} x = \pm 1$ <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>-1</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>1</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>y'</math></td> <td></td> <td><math>+</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>-</math></td> <td><math>+</math></td> </tr> </table> <p>تابع در بازه‌های <math>(-\infty, -1)</math> و <math>(1, +\infty)</math> صعودی <math>(\cdot/5)</math> و در بازه‌ی <math>(-1, 1)</math> نزولی است <math>(\cdot/5)</math>.</p>	$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$	$y'$		$+$	$0$	$-$	$+$	۶
$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$									
$y'$		$+$	$0$	$-$	$+$									
۱/۵	$y' = 4x^2 + 4 (\cdot/25)$ $y'' = 8x (\cdot/25) \xrightarrow{y''=0} x = 0 (\cdot/25)$ <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>y''</math></td> <td><math>-</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>+</math></td> </tr> <tr> <td><math>y</math></td> <td><math>\cup</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>\cup</math></td> </tr> </table> <p>چنان‌تقص هواد در به جلاصحت <math>(\cdot/25)</math> و نقطه‌ی عطف ندارد <math>(\cdot/25)</math></p>	$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$	$y''$	$-$	$0$	$+$	$y$	$\cup$	$0$	$\cup$	۷
$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$											
$y''$	$-$	$0$	$+$											
$y$	$\cup$	$0$	$\cup$											

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۲۷ / ۳ / ۱۳۹۱	
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم (سال تحصیلی ۹۱-۱۳۹۰)	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۸	<p>(۰/۲۵) مجانب افقی <math>y = 0</math> و (۰/۲۵) مجانبهای قائم <math>x = -1, x = 1</math></p> $y' = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} \quad (0/25) \xrightarrow{y'=0} x = 0$ <table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>-1</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>1</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>y'</math></td> <td><math>+</math></td> <td><math>+</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>-</math></td> <td><math>-</math></td> </tr> <tr> <td><math>y</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>+\infty</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> </table> <p>(۰/۵)</p> <p>(۰/۷۵)</p>	$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$	$y'$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$	$y$	$0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	
$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$															
$y'$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$															
$y$	$0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$															
۹	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{4}{3} x^{-\frac{1}{3}}}{\left(\frac{-1}{x^2}\right) \cos \frac{1}{x}} \quad (0/25) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{3} x^{-\frac{1}{3}}}{\cos \frac{1}{x}} = 0 \quad (0/25)$ <p>(۰/۲۵)</p>																			
۱۰	<p>الف) <math>dy = 4x^2 dx \quad (0/25) \xrightarrow{x=1} dy = 4 dx \quad (0/25)</math> ب) <math>dx = 0/02 \quad (0/25) \Rightarrow \Delta y \approx dy = 0/08 \quad (0/25)</math></p>																			
۱۱	$\frac{-\frac{d}{dt} \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{4-x^2} dx}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = \frac{-1}{2\sqrt{t}} \times \frac{1}{4-t} \quad (0/25)$																			
۱۲	<p>الف) <math>\int_{-1}^0 (x- x ) dx + \int_0^1 (x- x ) dx = \int_{-1}^0 2x dx + \int_0^1 -2x dx = x^2 \Big _{-1}^0 = -1 \quad (0/25)</math></p> <p>ب) <math>\frac{1}{3} \int (\frac{1}{3} x^2 + 3) \sin(x^2 + 3x) dx = -\frac{1}{3} \cos(x^2 + 3x) + c \quad (0/5)</math></p>																			
۱۳	$\left(\frac{x}{4-x^2}\right)' = \frac{(4-x^2) - x(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{x^2 + 4}{(4-x^2)^2} \quad (0/25)$																			
۱۴	<p><math>f(x) = x^2 - 2x \Rightarrow f'(x) = 2x - 2 \quad (0/25) \xrightarrow{f'(x)=0} x = 1 \quad (0/25)</math> , <math>f(2) = f(0) = 0</math> , <math>f(1) = -1 \quad (0/5)</math></p> <p>مینیمم مقدار تابع برابر <math>-1</math> (۰/۲۵) و ماکسیمم مقدار برابر صفر است (۰/۲۵). لذا داریم</p> $-1 \leq \frac{1}{2-0} \int_0^2 (x^2 - 2x) dx \leq 0 \quad (0/25) \Rightarrow -2 \leq \int_0^2 (x^2 - 2x) dx \leq 0 \quad (0/25)$																			
۱۵	<p>چون <math>\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx</math> بین دو مقدار ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع است (۰/۲۵)، بنابراین قضیه ی مقدار میانی <math>\exists c \in [a, b]</math> (۰/۲۵) که</p> $f'(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (0/25)$																			
۲۰	<p>همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، لطفاً به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره داده شود. با سپاس و احترام</p>																			