

سؤالات امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته : علوم ریاضی	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۵۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی :	دوره ی پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان : ۱۳۹۳/۲/۴	تعداد صفحه : ۱
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۳		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
------	-------------------------	------

توجه : استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی ، جذر و درصد) بلامانع است.

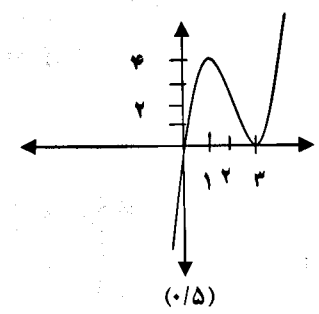
۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) کسر یا عدد گویای مساوی بسط اعشاری .../۸۳۳۳۰ برابر است با ب) اینفیموم بازه ی $A = (-۲, ۳]$ برابر است با ج) اگر $f(x) = \ln x$ باشد مقدار $(f^{-1})'(۱)$ ، برابر است با	۱/۵
۲	ابتدا حد دنباله ی $\left\{ \frac{2n-1}{n} \right\}_{n=1}$ را حدس بزنید سپس حدس خود را به روش ϵ اثبات کنید.	۱
۳	با استفاده از قضیه ی بولزانو ثابت کنید معادله ی $x^3 - x - 1 = 0$ در بازه ی $[۱, ۲]$ جواب دارد.	۱
۴	به کمک تعریف دنباله ای حد ، ثابت کنید تابع $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ در نقطه ی $x = 0$ حد ندارد.	۱
۵	هزینه ی ساخت x تلویزیون $c(x)$ تومان است که در آن $300x^2 - 300000x + 6000000 = c(x)$ می باشد. هزینه ی تولید ۱۰۱ امین تلویزیون چقدر است و معنی آن را توضیح دهید.	۱
۶	با استفاده از تعریف مشتق ، مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ را در $x = 0$ بررسی نمایید.	۱/۵
۷	از نقطه $A(0, -1)$ دو خط مماس بر منحنی $f(x) = x^2 + x$ رسم شده است. معادله های این دو خط مماس را به دست آورید.	۱/۵
۸	مشتق بگیرید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $x^2y + \sqrt{x} - 5y^3 = 0$ ب) $y = e^{\sin 2x}$	۱/۵
۹	اگر تابع f زوج و تابع g فرد باشند و داشته باشیم $f'(1) = 2$ و $g'(1) = 3$ ، مقدار $(f+g)'(-1)$ را حساب کنید.	۱
۱۰	مقادیر ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع با ضابطه ی $f(x) = 3x^4 - 8x^3$ را در بازه ی $[۱, ۳]$ بیابید.	۲
۱۱	شعاع کره ای با آهنگ ۵ میلی متر بر ثانیه بزرگ می شود. در لحظه ای که شعاع کره ۴ میلی متر است حجم کره با چه آهنگی افزایش می یابد؟	۱
۱۲	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ را رسم کنید.	۲
۱۳	مساحت ناحیه ای را بیابید که تحت خط مستقیم $y = 3x$ بوده و محدود به خطوط $x = 0$ و $x = 1$ می باشد.	۱/۵
۱۴	مقدار میانگین تابع $f(x) = e^{-x}$ را بر بازه ی $[0, 1]$ به دست آورید.	۱
۱۵	انتگرال های معین و نامعین زیر را بیابید. الف) $\int_0^{\pi} \cos x dx$ ب) $\int (x^3 - \sqrt{x}) dx$	۱/۵
۲۰	موفق باشید	جمع نمره

مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۳/۳/۴	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۳	
نمره	راهنمای تصحیح	
ردیف		

۱/۵	الف) $\frac{5}{6}$ (۰/۵) ب) -2 (۰/۵) اینفیموم ج) e (۰/۵)	۱
۱	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-1}{n} = 2 \quad (۰/۲۵)$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq M \quad a_n - L < \varepsilon \rightarrow \left \frac{2n-1}{n} - 2 \right < \varepsilon \quad (۰/۲۵)$ $\rightarrow \left \frac{2n-1-2n}{n} \right < \varepsilon \rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \quad (۰/۲۵) \rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow M = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 \quad (۰/۲۵)$	۲
۱	تابع $f(x) = x^3 - x - 1$ چند جمله ای است پس در هر نقطه از \mathbb{R} پیوسته است پس در بازه $[1, 2]$ نیز، پیوسته است. (۰/۲۵) از طرفی $f(1) = -1$ ، $f(2) = 5$ پس داریم $f(1) \times f(2) < 0$ بنابراین طبق قضیه ی بولزانو دست کم عددی مانند c در بازه $(1, 2)$ وجود دارد به طوری که $f(c) = 0$ یعنی c ریشه ی معادله ی $x^3 - x - 1 = 0$ است. (۰/۲۵)	۳
۱	$\left. \begin{aligned} a_n = \frac{1}{n} \quad a_n \neq 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \\ b_n = \frac{1}{2n + \frac{1}{2}} \quad b_n \neq 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0 \end{aligned} \right\} (۰/۲۵)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n\pi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \quad (۰/۲۵)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \quad (۰/۲۵)$ <p>بنابراین طبق تعریف حد، $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x}$ وجود ندارد. (۰/۲۵)</p> $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n)$	۴
۱	$c'(x) = 3 \dots - 6 \cdot x \quad (۰/۲۵)$ $c'(1 \cdot 0) = 3 \dots - 6 \cdot 0 = 24 \dots \quad (۰/۲۵)$ <p>یعنی وقتی کارخانه ۱۰۰ تلویزیون تولید کرده و بخواهد ۱۰۱ امین تلویزیون را تولید کند تقریباً ۲۴۰۰۰۰ تومان هزینه می کند. (۰/۵)</p>	۵
۱/۵	$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad (۰/۲۵) =$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{x} \quad (۰/۲۵) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (۰/۲۵) \rightarrow \begin{cases} f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \quad (۰/۲۵) \\ f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{x}} = -\infty \quad (۰/۲۵) \end{cases}$ <p>پس تابع f در $x = 0$ مشتق پذیر نمی باشد. (۰/۲۵)</p>	۶

ادامه در برگه ی دوم

مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۳/۳/۴	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۳	
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

۱/۵	<p>نقطه ی تماس $T(\alpha, \alpha^2 + \alpha)$ $f'(x) = 2x + 1 \quad f'(\alpha) = 2\alpha + 1 \quad (./25)$ معادله ی خط مماس: $y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - \alpha^2 - \alpha = (2\alpha + 1)(x - \alpha) \quad (./25)$ خط مماس از نقطه ی $A(0, -1)$ میگذرد بنابراین: $-1 - \alpha^2 - \alpha = -2\alpha^2 - \alpha \quad (./25) \rightarrow \alpha^2 = 1 \rightarrow \alpha = \pm 1 \quad (./25)$ معادله ی خطوط مماس: $\alpha = 1 \rightarrow y - 2 = 3(x - 1) \quad (./25) \quad \alpha = -1 \rightarrow y = -1(x + 1) \quad (./25)$</p>	۷																								
۱/۵	<p>الف) $2xy + y'x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 15y^2y' = 0 \quad (1) \quad (./25)$ ب) $y' = 2x \cos 2x \times e^{\sin 2x} \quad (./5)$</p>	۸																								
۱	<p>تابع f' فرد و تابع g' زوج است پس داریم: $f'(-1) = -f'(1) = -2 \quad (./25)$ $g'(-1) = g'(1) = 3 \quad (./25)$ $\rightarrow (f+g)'(-1) = \underbrace{f'(-1) + g'(-1)}_{(./25)} = -2 + 3 = 1 \quad (./25)$</p>	۹																								
۲	<p>$D = \mathbb{R} \quad y' = 12x^2 - 24x \quad (./25) \quad 12x^2 - 24x = 0 \quad (./25)$ $\rightarrow 12x^2(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \quad (./25) \\ x=2 \quad (./25) \end{cases}$ غیرقابل قبول $(./25)$ ماکسیمم مطلق $f(3) = 27 \quad (./25)$ مینیمم مطلق $f(2) = -16 \quad (./25)$ $f(1) = -5 \quad (./25)$</p>	۱۰																								
۱	<p>$v = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (./25)$ $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \times \frac{dr}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \times \frac{dr}{dt} \quad (./25) \rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi (4)^2 \times 5 \quad (./25) = 3200 \cdot \pi \quad (./25)$</p>	۱۱																								
۲	<p>$D = \mathbb{R} \quad y' = 3x^2 - 12x + 9 \quad 3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad (./25) \rightarrow \begin{cases} x=1 \quad (./25) \\ x=3 \quad (./25) \end{cases}$ $y'' = 6x - 12 \quad 6x - 12 = 0 \rightarrow x=2 \quad (./25)$</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>۱</td> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td>+</td> <td>۰</td> <td>-</td> <td>۰</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>y''</td> <td></td> <td>-</td> <td>۰</td> <td>+</td> <td></td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>$-\infty$</td> <td>↗</td> <td>↘</td> <td>↗</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">مینیمم عطف ماکسیمم (./5)</p> 	x	$-\infty$	۱	۲	۳	$+\infty$	y'	+	۰	-	۰	+	y''		-	۰	+		y	$-\infty$	↗	↘	↗	$+\infty$	۱۲
x	$-\infty$	۱	۲	۳	$+\infty$																					
y'	+	۰	-	۰	+																					
y''		-	۰	+																						
y	$-\infty$	↗	↘	↗	$+\infty$																					

ادامه در برگه ی سوم

مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۳/۳/۴	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۳	
نمره	راهنمای تصحیح	
ردیف		

	بازه ی $[0, 1]$ را به n بازه ی جزء با طول مساوی تقسیم می کنیم:	۱۳
۱/۵	$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1 \quad (0/25) \rightarrow$ $f(x_i) = 3 \times \frac{i}{n} \quad (0/25), \Delta x_i = \frac{1}{n} \quad (0/25)$ $\rightarrow s_n = \sum_{i=1}^n \underbrace{3 \times \frac{i}{n} \times \frac{1}{n}}_{(0/25)} = \frac{3}{n^2} \times \sum_{i=1}^n i = \frac{3}{n^2} \times \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{(0/25)} \rightarrow A = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{3}{2} \quad (0/25)$	
۱	$\bar{f} = \frac{1}{1-0} \int_0^1 e^{-x} dx = \underbrace{-e^{-x}}_{(0/25)} \Big _0^1 = \underbrace{-e^{-1} - (-e^0)}_{(0/25)} = -\frac{1}{e} + 1 \quad (0/25)$	۱۴
۱/۵	$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx = \sin x \Big _{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \sin x \Big _{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \quad (0/25) =$ <p>الف) $1 - (-1) = 2 \quad (0/25)$</p> <p>ب) $\frac{x^4}{4} - \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + c \quad (0/5)$</p>	۱۵
۲۰	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر	