www.konkur.in

وزارت آموزش و پرورش

سؤالات امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)	رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع : ۹صبح	مدت امتحان : ۱۳۵ دقیقه
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان : ۱۹ / ۶ / ۱۳۹۰	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال تحصیلی ۹۰- ۱۳۸۹		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	نامساوی $۳<x<۹$ را به صورت $\lvert x-\alpha\rvert<\beta$ بنویسید.	۱
۲	اگر برای هر عدد حقیقی $\varepsilon>۰$ داشته باشیم $۰\le x<\varepsilon$ ثابت کنید که $x=۰$.	۱
۳	با استفاده از تعریف حد دنباله ها ثابت کنید: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{۱+(-۱)^n}{n^۲}=۰$	۱/۵
۴	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) حد دنباله ی $\{(\frac{۳n-۱}{n+۱})^۲\}$ برابر است با ..... . ب) اگر برای دنباله های $\{a_n\},\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ داشته باشیم $\forall n\in N\ ,\ a_n\le c_n\le b_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=L$، آن گاه $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n$ برابر است با	۱
۵	با ذکر دلیل، همگرایی یا واگرایی سری های زیر را بررسی کنید و در صورت همگرایی،مقدار سری را بیابید. الف) $\sum\limits_{k=۱}^{+\infty}\frac{۳k+۷}{۳k-۱}$ ب) $\sum\limits_{k=۱}^{+\infty}(\frac{۲}{۵})^{k+۱}$ ج) $\sum\limits_{k=۱}^{+\infty}\log\frac{k+۱}{k+۲}$	۳
۶	با استفاده از دنباله ها، ثابت کنید تابع زیر در نقطه ی $x=۰$ حد ندارد. $f(x)=\begin{cases}x & x\ge ۰\\ ۱ & x<۰\end{cases}$	۱/۵
۷	بدون استفاده از قاعده ی هوپیتال، حدهای زیر بیابید. الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{۲x}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x-۲}$ ج) $\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{x+۴}{[-x]-۳}$	۲/۲۵
۸	مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع زیر در R پیوسته باشد. $f(t)=\begin{cases}a\sin t+b\cos ۲t & t<\frac{\pi}{۶}\\ \cos ۳t+۲ & \frac{\pi}{۶}\le t\le\frac{\pi}{۳}\\ \sin^۲ t+b & t>\frac{\pi}{۳}\end{cases}$	۱/۵
۹	با استفاده از قضیه ی مقدار میانی، ثابت کنید خط $y=۴$ نمودار تابع $f(x)=(x-۳)(x-۵)+x$ را قطع می کند.	۱/۲۵
۱۰	معادله ی مجانب های تابع $y=\frac{۲x^۵-۱}{x^۴-۳x^۲}$ را بنویسید.	۲
۱۱	با استفاده از تعریف ، مشتق تابع $y=\sqrt[۳]{x}$ را در نقطه ی $x=۲۷$ بیابید.	۱
۱۲	اگر $g(x)=x^۴+۲$ و $f(x)=\sqrt{۵x+۱}$ و $F=f\circ g$ باشد ، $F'(x)$ را به دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست)	۱
۱۳	فرض کنید تابع f روی R مشتق پذیر و فرد باشد. ثابت کنید تابع f' زوج است.	۱
۱۴	معادله ی خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=۴x^۳-۵x+۲$ را در نقطه ی $A(۱,-۲)$ بنویسید.	۱
	موفق باشید. جمع نمره	۲۰

forum.konkur.in

www.konkur.in

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)**	رشته: **علوم ریاضی**	مدت امتحان : **۱۳۵ دقیقه**
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان : **۱۹ / ۶ / ۱۳۹۰**
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال تحصیلی ۹۰-۱۳۸۹		**مرکز سنجش آموزش و پرورش** http://aee.medu.ir

ردیف	راهنمای تصحیح (اصلاحیه دارد)	نمره
۱	$\alpha=\frac{۳+۹}{۲}=۶$ (۰/۲۵) , $\beta=\frac{۹-۳}{۲}=۳$ (۰/۲۵) $\Rightarrow |x-۶|<۳$ (۰/۵)	۱
۲	اگر $x=۰$ که حکم برقرار است (۰/۲۵). حال فرض کنیم چنین نباشد (فرض خلف) یعنی $x\neq ۰$. لذا $x>۰$ چون عبارت برای هر $\varepsilon>۰$ برقرار است، قرار می دهیم $\varepsilon=x$ (۰/۲۵). در نتیجه $۰\leq x<x$ (۰/۲۵).که این تناقض است پس فرض خلف باطل است، یعنی $x=۰$ (۰/۲۵).	۱
۳	$\forall \varepsilon>۰, \exists M\in N, (\forall n\geq M , |\frac{۱+(-۱)^n}{n^۲}-۰|<\varepsilon$ (۰/۲۵) اگر n فرد باشد که $|\frac{۱+(-۱)^n}{n^۲}|=۰<\varepsilon$ و این رابطه همواره برقرار است (۰/۵). اگر n زوج باشد داریم: $\frac{۲}{n^۲}<\varepsilon \Rightarrow \frac{n^۲}{۲}>\frac{۱}{\varepsilon}$ (۰/۵) $\Rightarrow n>\sqrt{\frac{۲}{\varepsilon}}$ بنابراین کافی است $M\geq [\sqrt{\frac{۲}{\varepsilon}}]+۱$ باشد (۰/۲۵) .	۱/۵
٤	الف) ۹ (۰/۵) ب) L (۰/۵)	1
۵	الف) $\lim_{k\to+\infty}\frac{۳k+۷}{۳k-۱}=۱\neq ۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$ (۰/۲۵) سری واگراست. ب) $\sum_{k=۱}^{+\infty}\frac{۴}{۲۵}\times(\frac{۲}{۵})^{k-۱}=\frac{\frac{۴}{۲۵}}{۱-\frac{۲}{۵}}=\frac{۴}{۱۵}$ (۰/۲۵) (۰/۵) (۰/۵) ج) $s_n=\sum_{k=۱}^{n}(\log(k+۱)-\log(k+۲))=\log ۲-\log(n+۲)$ (۰/۲۵) دنباله ی $\{s_n\}$ واگراست (۰/۲۵). پس سری واگراست. (۰/۲۵)	3
٦	$\begin{cases}a_n=\frac{۱}{n}\\ b_n=-\frac{۱}{n}\end{cases}$ (۰/۵) $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}b_n=۰ , \forall n\in N a_n,b_n\neq ۰$ (۰/۲۵) , $\lim_{n\to+\infty}f(a_n)=۰$ (۰/۲۵) $\lim_{n\to+\infty}f(b_n)=۱$ (۰/۲۵) چون دو دنباله $\{f(b_n)\},\{f(a_n)\}$ به دو عدد نابرابر همگرایند، لذا $f(x)$ در صفر حد ندارد . (۰/۲۵)	۱/۵
۷	الف) $\lim_{x\to۰}\frac{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}{۲x}=\lim_{x\to۰}\frac{۲\times\frac{x^۲}{۴}}{۲x}=\lim_{x\to۰}\frac{x}{۴}=۰$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) ب) $\lim_{x\to۲}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x-۲}\times\frac{\sqrt{x+۲}+۲}{\sqrt{x+۲}+۲}=\lim_{x\to۲}\frac{x-۲}{(x-۲)(\sqrt{x+۲}+۲)}=\frac{۱}{۴}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) ج) $\lim_{x\to۲^+}\frac{x+۴}{[-x]-۳}=\lim_{x\to۲^+}\frac{۶}{-۳-۳}=-۱$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)	۲/۲۵

ادامه در برگه ی دوم

forum.konkur.in

www.konkur.in

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان : ۱۳۵ دقیقه
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان : ۱۹ / ۶ / ۱۳۹۰
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال تحصیلی ۹۰-۱۳۸۹		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir

ردیف	راهنمای تصحیح (اصلاحیه دارد)	نمره

۸ باید $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{۶}} f(t)=f(\frac{\pi}{۶})$ و $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{۳}} f(t)=f(\frac{\pi}{۳})$ باشد. بنابراین — **۱/۵**

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{۶}^-}(a\sin t+b\cos ۳t)=a\sin\frac{\pi}{۶}+b\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{a}{۲}+\frac{b}{۲}\quad(۰/۲۵)\Rightarrow a+b=۴$$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{۶}^+}(\cos ۳t+۲)=\cos\frac{\pi}{۲}+۲=۲\quad(۰/۲۵)$$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{۳}^-}(\cos ۳t+۲)=\cos\pi+۲=۱\quad(۰/۲۵)$$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{۳}^+}(\sin^۲ t+b)=\sin^۲\frac{\pi}{۳}+b=\frac{۳}{۴}+b\quad(۰/۲۵)\Rightarrow\frac{۳}{۴}+b=۱$$

$$\Rightarrow \underbrace{a=\frac{۱۵}{۴}\ ,\ b=\frac{۱}{۴}}_{(۰/۵)}$$

۹ تابع f در بازه ی $[۳,۵]$ پیوسته است (۰/۲۵) و $f(۳)=۳$ و $f(۵)=۵$ (۰/۵). $k=۴$ بین $f(۳)$ و $f(۵)$ است (۰/۲۵). آن گاه حداقل یک عدد حقیقی $x_۰$ در بازه ی $[۳,۵]$ وجود دارد که $f(x_۰)=۴$ (۰/۲۵). — **۱/۲۵**

۱۰ — **۲**

مجانبهای قائم (۰/۷۵)

$$\begin{cases}x\to\sqrt{۳}\\ y\to\infty\end{cases}\ ,\ \begin{cases}x\to ۰\\ y\to\infty\end{cases}\ ,\ \begin{cases}x\to-\sqrt{۳}\\ y\to\infty\end{cases}\Rightarrow x=\sqrt{۳}\ ,\ x=۰\ ,\ x=-\sqrt{۳}$$

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۵-۱}{x(x^۴-۳x^۲)}=۲\quad(۰/۲۵)\quad(۰/۲۵)$$

مجانب مایل

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{۲x^۵-۱}{x^۴-۳x^۲}-۲x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۶x^۲-۱}{x^۴-۳x^۲}=۰\quad(۰/۲۵)\quad(۰/۲۵)\Rightarrow y=۲x\ (۰/۲۵)$$

۱۱ — **۱**

$$f'(۲۷)=\lim_{x\to۲۷}\frac{\sqrt[۳]{x}-۳}{x-۲۷}\ (۰/۲۵)=\lim_{x\to۲۷}\frac{x-۲۷}{(x-۲۷)(\sqrt[۳]{x^۲}+۳\sqrt[۳]{x}+۹)}\ (۰/۱۵)=\frac{۱}{۲۷}\ (۰/۲۵)$$

۱۲ — **۱**

$$\begin{cases}F'(x)=f'(g(x))\times g'(x)\quad(۰/۲۵)\\ f'(x)=\frac{۵}{۲\sqrt{۵x+۱}}\ ,\ g'(x)=۴x^۳\quad(۰/۵)\end{cases}\Rightarrow F'(x)=\frac{۵}{۲\sqrt{۵(x^۴+۲)+۱}}\times۴x^۳\ (۰/۲۵)$$

۱۳ — **۱**

$\forall x\in R\ ,\ f(-x)=-f(x)\ (۰/۲۵)\Rightarrow -f'(-x)=-f'(x)\ (۰/۲۵)\Rightarrow f'(-x)=f'(x)\ (۰/۲۵)$

پس f' زوج است.(۰/۲۵)

۱۴ — **۱**

$f'(x)=۱۲x^۲-۵\ (۰/۲۵)\Rightarrow m=f'(۱)=۷\ (۰/۲۵)\ ,\ y+۲=۷(x-۱)\to y=۷x-۹\ (۰/۵)$

اصلاحیه ی سوال ۱۴

با احترام به عرض می رساند، در صورتی که دانش آموزان با در نظر گرفتن نقطه ی A روی منحنی تابع $f(x)$، مساله را به روش بالا حل نموده اند نمره ی کامل به آنها داده شود و در صورتی که دانش آموزی با بررسی وجود نقطه ی A روی منحنی $f(x)$ به این نکته اشاره نمود که نقطه روی منحنی صدق نمی کند و از راه حل ذیل تا مرحله ی تشکیل معادله ی درجه ی سه برای یافتن طول نقطه ی تماس منحنی و خط مماس، پیش رفته است نیز نمره کامل به وی داده شود.

$f'(x)=۱۲x^۲-۵\ (۰/۲۵)\ ,\ A=(۱,-۲)\ ,\ B=(\alpha,۴\alpha^۳-۵\alpha+۲)$

$$m_{AB}=f'(\alpha)\ (۰/۲۵)\Rightarrow\frac{۴\alpha^۳-۵\alpha+۴}{\alpha-۱}=۱۲\alpha^۲-۵\ (۰/۲۵)\Rightarrow ۸\alpha^۳-۱۲\alpha^۲+۱=۰\ (۰/۲۵)$$

همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر — **۲۰**

forum.konkur.in