

مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه	رشته: علوم ریاضی	ساعات شروع: ۹ صبح	سوالات امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۱ / ۵ / ۳۱	پیش دانشگاهی		
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان سالی واحدی (روزانه) سراسر کشور در مرداد ماه سال ۱۳۹۱		
نمره	سوالات (پاسخنامه دارد)		ردیف

۰/۷۵	اشتراک دو بازه‌ی $(-۱, ۶)$ و $(-۲, ۴)$ را به صورت یک همسایگی متقارن نوشته و مرکز و شعاع آن را تعیین کنید.	۱
۱/۲۵	دنباله‌ی $\{\cos \frac{\pi}{n}\}$ را در نظر بگیرید. با ارائه‌ی دلیل به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) کران‌داری دنباله‌ی فوق را بررسی کنید. ب) آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{n}$ همگراست؟	۲
۱/۵	مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع رو به رو در $x=1$ پیوسته باشد. $f(x) = \begin{cases} b[x] + ۳ & x > ۱ \\ ۶ & x = ۱ \\ \frac{۳a(x-1)}{x^2 - 1} & x < ۱ \end{cases}$	۳
۱/۵	کلیدی مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ را تعیین کنید.	۴
۱	فرض کنید $f'(2) = \frac{۳}{۲}$. مشتق $g(x) = f(\frac{1}{x})$ را در $x = \frac{1}{۲}$ محاسبه کنید.	۵
۱	معادله‌ی خط مماس بر منحنی $x^4 + 16y^4 = ۳۲$ را در نقطه‌ی $(۲, -۱)$ بنویسید.	۶
۱	نقطه‌ی M روی مسیر $f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$ در حال حرکت است. هنگامی که M در نقطه‌ی $(۱, ۲)$ قرار دارد، اگر مولفه‌ی y آن با سرعت ۶ متر بر ثانیه افزایش یابد، مولفه‌ی x با چه سرعتی تغییر می‌کند؟	۷
۲	مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ را در بازه‌ی $[-۱, \frac{1}{۲}]$ در صورت وجود بیابید.	۸
۲	برای تابع $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ در بازه‌ی $[۱, ۳]$ شرایط قضیه‌ی مقدار میانگین را بررسی کنید و در صورت برقراری شرایط قضیه، مقدار یا مقادیر مناسبی برای c بیابید.	۹
۲	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x+1}$ را رسم کنید.	۱۰
۱/۵	با استفاده از قاعده‌ی هوییتال حد رو به رو را محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x}{\tan 2x}$	۱۱
۱/۵	با استفاده از حد مجموع بالای ریمان، مقدار $\int_0^1 2x \, dx$ را به دست آورید.	۱۲
۰/۷۵	بدون محاسبه‌ی انتگرال، مشتق $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \frac{t}{2 + \sqrt{t}} \, dt$ را پیدا کنید.	۱۳
۱	مقدار متوسط تابع $y = x - \frac{1}{x^2}$ را در بازه‌ی $[۱, ۳]$ بیابید.	۱۴
۱/۲۵	انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید. الف) $\int \frac{3x^2 - x}{x} \, dx$ ب) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$	۱۵

مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۱/۵/۳۱	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان سالی واحدی (روزانه) سراسر کشور در مرداد ماه سال ۱۳۹۱	
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

۰/۷۵	$(-۲, ۴) \cap (-۱, ۶) = (-۱, ۴)$ (۰/۲۵) , $a = \frac{۳}{۲}$ (۰/۲۵) , $r = \frac{۵}{۲}$ (۰/۲۵)	۱
۱/۲۵	الف) دنباله کراندار است (۰/۲۵) زیرا $ \cos \frac{\pi}{n} \leq 1$ (۰/۲۵) ب) سری واگراست (۰/۲۵) زیرا $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{n} = \cos 0 = 1 \neq 0$ (۰/۲۵)	۲
۱/۵	$f(1) = ۶$ (۰/۲۵) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{۲a(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{۲a}{۲} = ۶$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a = ۴$ (۰/۲۵) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} b + ۳ = ۶$ (۰/۲۵) $\Rightarrow b = ۳$ (۰/۲۵)	۳
۱/۵	$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ (۰/۲۵) , $b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x-1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x}{x-1} = 1$ (۰/۲۵)	۴
۱	$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \times f'(\frac{1}{x}) \Big _{x=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} f'(2) = -۶$ (۰/۲۵)	۵
۱	$\frac{dy}{dx} = \frac{-(۴x^2)}{۱۶ \times ۴y^2} = \frac{-x^2}{۱۶y^2} \Rightarrow m = \frac{1}{۲}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow y + 1 = \frac{1}{۲}(x - 2)$ (۰/۲۵)	۶
۱	$y'(t) = \frac{۶x x'(t)}{۲\sqrt{۳x^2 + 1}} \xrightarrow{(1, 2)} ۶ = \frac{۶ \times 1 \times x'(t)}{۴} \Rightarrow x'(t) = ۴ \frac{m}{s}$ (۰/۲۵)	۷
۲	$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$ (۰/۲۵) $f(0) = 0$ (۰/۲۵) ماکسیمم مطلق $x = 2$ غق ق (۰/۲۵) $\Rightarrow f(\frac{1}{2}) = f(-1) = -\frac{1}{۲}$ (۰/۲۵) مینیمم مطلق	۸
۲	f روی بازه $[1, 2]$ پیوسته (۰/۲۵) و روی $(1, 2)$ مشتق پذیر است (۰/۲۵). از طرفی $f'(x) = ۳x^2 - 10x - 3$ (۰/۲۵) که $c \in (1, 2)$ وجود دارد و $f(1) = -7$ و $f(2) = -27$ (۰/۲۵). بنابراین مقادیر میانگین وجود دارد $c = 1$ غق ق (۰/۲۵) $c = \frac{7}{۳}$ غق ق (۰/۲۵) $\Leftarrow 3c^2 - 10c - 3 = 0$ در نتیجه $f'(c) = 3c^2 - 10c - 3 = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = -10$	۹

مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۱/۵/۳۱		پیش دانشگاهی
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان سالی واحدی (روزانه) سراسر کشور در مرداد ماه سال ۱۳۹۱
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

۲	$\begin{cases} x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ (۰/۲۵) } \quad \begin{cases} x \rightarrow \pm \infty \\ y \rightarrow 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1 \text{ (۰/۲۵)}$ $y' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \text{ (۰/۵)}$ <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td></td> <td>-1</td> <td></td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td></td> <td>+</td> <td>+</td> <td>+</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>1</td> <td>↗</td> <td>$+\infty$</td> <td>$-\infty$</td> <td>↘ 1</td> </tr> </table> <div style="text-align: right;">(۰/۵)</div>	x	$-\infty$		-1		$+\infty$	y'		+	+	+	+	y	1	↗	$+\infty$	$-\infty$	↘ 1		۱۰
x	$-\infty$		-1		$+\infty$																
y'		+	+	+	+																
y	1	↗	$+\infty$	$-\infty$	↘ 1																
۱/۵	$H: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 1}{2(1 + \tan^2 2x)} = 1 \text{ (۰/۵)}$		۱۱																		
۱/۵	$\Delta x = \frac{1}{n} \text{ (۰/۲۵)}$ $x_i = \frac{i}{n} \text{ (۰/۲۵)}$ $\Rightarrow U_n(f) = \sum_{i=1}^n \Delta x \times f(x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times \left(2 \times \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n i \right) = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{n}$ $\int_0^1 2x \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \text{ (۰/۲۵)}$		۱۲																		
۰/۷۵	$\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \frac{t}{2 + \sqrt{t}} dt = \frac{2x}{2 + x } \times \frac{x^2}{2 + x } \text{ (۰/۲۵)}$		۱۳																		
۱	$\frac{1}{3-1} \int_1^3 \left(x - \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{x} \right) \Big _1^3 = \frac{5}{3} \text{ (۰/۲۵)}$		۱۴																		
۱/۲۵	<p>الف) $\int (3x-1) dx = \frac{3}{2} x^2 - x + c \text{ (۰/۲۵)}$</p> <p>ب) $2 \int \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = 2 \sin \sqrt{x} + c \text{ (۰/۲۵)}$</p>		۱۵																		
۲۰	<p>همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، لطفاً به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره داده شود. با سپاس و احترام</p>																				