

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۹ صبح	رشته: علوم ریاضی	سؤالات امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)
تاریخ امتحان: ۱۳۹۱/۶/۱۸	پیش دانشگاهی		
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۱		
نمره	سؤالات (پاسخنامه دارد)		ردیف

۱	مرکز و شعاع همسایگی متقارن (۴, ۶) را تعیین کرده و آن را به صورت $ x - \alpha < \beta$ بنویسید.	۱
۱	ثابت کنید معکوس یک عدد منفی، عددی منفی است.	۲
۱/۵	با استفاده از تعریف حد دنباله ها ثابت کنید: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 - 1} = 2$	۳
۱/۲۵	دنباله ی $\{2 + \frac{(-1)^n}{n}\}$ را در نظر بگیرید. (الف) چهار جمله ی اول این دنباله را بنویسید. (ب) آیا دنباله ی فوق یکنواست؟	۴
۰/۵	نشان دهید سری $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{2k+2}{k+1}\right)$ واگراست.	۵
۲/۲۵	ثابت کنید سری های زیر همگراست و مقدار عددی آن ها را بیابید. الف) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ ب) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{5^{k+1}}$	۶
۲/۷۵	حدود توابع زیر را بدون استفاده از هم ارزی و قاعده ی هوییتال محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} - x$	۷
۱/۵	با استفاده از دنباله ها، ثابت کنید تابع رو به رو در نقطه ی $x = 0$ حد ندارد. $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$	۸
۲	مقادیر a و b را چنان بیابید تا تابع زیر در $x = 2$ پیوسته باشد. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x > 2 \\ x - 2 & x = 2 \\ a & x = 2 \\ b + x & x < 2 \end{cases}$	۹
۱/۲۵	با استفاده از قضیه ی مقدار میانی، نشان دهید معادله ی $x^2 = \frac{1}{2}$ در بازه ی $[0, 1]$ حداقل یک ریشه دارد.	۱۰
۱	معادله ی کلیه ی خطوط مجانب تابع $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$ را بنویسید.	۱۱
۱/۵	مشتق پذیری تابع $f(x) = x[x]$ را در $x = 0$ بررسی کنید.	۱۲
۱	معادله ی خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = -x^2 + 4x$ را در نقطه ای به طول ۱ واقع بر منحنی بنویسید.	۱۳
۱/۵	اگر g در نقطه ی a مشتق پذیر و در یک همسایگی a مخالف صفر باشد آنگاه تابع $\frac{1}{g}$ نیز در a مشتق پذیر است و داریم $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$	۱۴

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)
تاریخ امتحان: ۱۳۹۱/۶/۱۸	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۱	
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

۱	$\alpha = 5 \text{ (} \cdot / 25 \text{)}, \beta = 1 \text{ (} \cdot / 25 \text{)} \Rightarrow x - 5 < 1 \text{ (} \cdot / 5 \text{)}$	۱
۱	برهان خلف: فرض کنیم a عددی منفی باشد و $a^{-1} > 0 \text{ (} \cdot / 25 \text{)}$. حال طرفین را در a ضرب می کنیم. $\underbrace{a a^{-1}}_{\text{(} \cdot / 25 \text{)}} < \underbrace{0}_{\text{(} \cdot / 25 \text{)}}$. بنابراین $1 < 0 \text{ (} \cdot / 25 \text{)}$ که تناقض است.	۲
۱/۵	$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq M \Rightarrow \left \frac{2n^2}{n^2 - 1} - 2 \right < \varepsilon \text{ (} \cdot / 5 \text{)} \Rightarrow \left \frac{2}{n^2 - 1} \right < \varepsilon \text{ (} \cdot / 25 \text{)} \xrightarrow{n \neq 1} n^2 - 1 > \frac{2}{\varepsilon} \text{ (} \cdot / 25 \text{)}$ $\Rightarrow n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} + 1} \text{ (} \cdot / 25 \text{)} \Rightarrow M \geq \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon} + 1} \right] + 1 \text{ (} \cdot / 25 \text{)}$	۳
۱/۲۵	(الف) $a_1 = 1, a_2 = \frac{5}{2}, a_3 = \frac{5}{3}, a_4 = \frac{9}{4}$ (ب) خیر (۲۵/۰).	۴
۰/۵	$\lim_{n \rightarrow \infty} \log\left(\frac{3n+2}{n+1}\right) = \log 3 \neq 0 \text{ (} \cdot / 25 \text{)}$	۵
۲/۲۵	(الف) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \text{ (} \cdot / 25 \text{)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \text{ (} \cdot / 25 \text{)}$ (ب) $a = \frac{2}{25}, r = \frac{1}{5} \text{ (} \cdot / 5 \text{)} \Rightarrow r < 1 \text{ (} \cdot / 25 \text{)}$ سری همگراست مقدار سری: $S = \frac{\frac{2}{25}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{10} \text{ (} \cdot / 25 \text{)}$	۶
۲/۷۵	(الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2 \times 1 = 2 \text{ (} \cdot / 25 \text{)}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2}{x} = -\infty \text{ (} \cdot / 25 \text{)}$ (ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x) \times \frac{\sqrt{x^2 + 2} + x}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{ x \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ (} \cdot / 25 \text{)}$	۷

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)
تاریخ امتحان: ۱۳۹۱/۶/۱۸	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۱	
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

۱/۵	$\begin{cases} a_n = \frac{1}{n} & \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}, a_n, b_n \neq 0 \text{ (۰/۲۵)} \\ b_n = -\frac{1}{n} & f(a_n) = \frac{1}{n} \text{ (۰/۲۵)}, f(b_n) = 1 \text{ (۰/۲۵)} \end{cases}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = 0 \text{ (۰/۲۵)}, \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = 1 \text{ (۰/۲۵)}$ <p>چون دو دنباله ی $\{f(a_n)\}$، $\{f(b_n)\}$ به دو عدد نابرابر همگرايند، لذا در $f(x)$ در صفر حد ندارد. (۰/۲۵)</p>	۸
۲	$f(2) = a \text{ (۰/۲۵)}$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4 \text{ (۰/۲۵)}$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} b + x = b + 2 \text{ (۰/۲۵)}$ $\Rightarrow b + 2 = a = 4 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \text{ (۰/۲۵)} \\ b = 2 \text{ (۰/۲۵)} \end{cases}$	۹
۱/۲۵	<p>تابع $f(x) = x^2 - \frac{1}{y}$ در بازه ی $[0, 1]$ پیوسته است (۰/۲۵) و $f(0) = -\frac{1}{y}$ واضح است که $f(1) = \frac{1}{y}$ (۰/۲۵)</p> <p>$f(0) \times f(1) < 0$ (۰/۲۵). طبق نتیجه ی قضیه ی مقدار میانی، مقدار f در نقطه ای از بازه ی $(0, 1)$ صفر خواهد شد. (۰/۲۵)</p>	۱۰
۱	<p>مجانبات های قائم $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ (۰/۲۵)}, \begin{cases} x \rightarrow -2 \\ y \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow x = -2 \text{ (۰/۲۵)}$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = 1 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow$ $y = 1$ (۰/۲۵) مجانبات افقی</p>	۱۱
۱/۵	<p>تابع در $x = 0$ مشتق پذیر نیست (۰/۲۵). زیرا</p> $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x[x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0 \text{ (۰/۲۵)}$ $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x[x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1 \text{ (۰/۲۵)}$	۱۲
۱	$f(1) = 2 \text{ (۰/۲۵)}, f'(x) = -2x + 4 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow m = f'(1) = 2 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow y - 2 = 2(x - 1) \text{ (۰/۲۵)}$	۱۳
۱/۵	$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{g(a) - g(a+h)}{g(a+h)g(a)} \right)$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{g(a+h)g(a)} \left(\frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right) = \frac{-1}{g^2(a)} \times g'(a) \text{ (۰/۲۵)}$	۱۴